Michèle Audin

ANALYSE COMPLEXE
(LICENCE DE MATHÉMATIQUES)

Michèle Audin
Institut de Recherche Mathématique Avancée, Université Louis Pasteur et CNRS,
7 rue René Descartes, 67084 Strasbourg cedex, France.
E-mail : `Michele.Audin@math.u-strasbg.fr`
Url : `http://www-irma.u-strasbg.fr/~maudin`

23 novembre 1999

ANALYSE COMPLEXE
(LICENCE DE MATHÉMATIQUES)

Michèle Audin

TABLE DES MATIÈRES

SOURCES, RÉFÉRENCES ET REMERCIEMENTS

Il s'agit ici de la rédaction d'un cours que j'ai donné dans la licence de mathématiques à l'Université Louis Pasteur de Strasbourg en 1997, 98 et 99.

J'ai appris les fonctions holomorphes dans le livre de Cartan [**2**] qui n'a pas plus vieilli que son auteur et reste la référence « incontournable » … et que j'ai donc copié et plagié sans vergogne. Le paragraphe sur l'exponentielle est copié sur l'époustouflant prologue du livre de Rudin [**3**], les démonstrations des résultats sur les produits infinis viennent du chapitre 15 de ce même livre, la démonstration « sans homotopie » de l'analyticité des fonctions holomorphes vient de l'article de Verley dans l'Encyclopædia Universalis [**5**]. J'ai aussi copié quelques démonstrations dans le cours de Jean-Benoît Bost à l'École Polytechnique [**1**] et quelques exercices « faciles » dans le livre de Silverman [**4**].

Que tous ces auteurs soient remerciés pour leur participation involontaire.

L'esprit de ce cours, l'idée d'utiliser la démonstration de [**5**] pour avoir au plus vite les grands théorèmes (Liouville…), beaucoup des exercices et même le style LaTeX utilisé proviennent de multiples conseils de et discussions avec Claude Sabbah. J'y ai aussi inclus beaucoup d'exercices proposés par Iris Muller. Pour cette version corrigée en novembre 1999, j'ai aussi bénéficié de remarques de Nicole Bopp.

Qu'ils soient remerciés pour leur participation plus ou moins volontaire.

Strasbourg, le 23 novembre 1999

CHAPITRE 1

SÉRIES ENTIÈRES ET FONCTIONS ANALYTIQUES

Le corps $\mathbf{C}$ des nombres complexes est muni de sa norme $|\cdot|$ et de la topologie qu'elle définit.

1.1. Définition des fonctions analytiques

Séries entières. On appelle *série entière* une série de fonctions de la forme

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \qquad a_n \in \mathbf{C}.$$

Proposition 1.1.1. *Soit* $\rho = \sup\{r \in [0, +\infty[\mid \sum |a_n| r^n < +\infty\}$.

(1) *Pour tout* $r < \rho$*, la série* $\sum a_n z^n$ *converge normalement sur le disque* $|z| \leq r$.

(2) *La série* $\sum a_n z^n$ *diverge pour* $|z| > \rho$.

Remarques 1.1.2

(1) D'abord, ρ existe (la série converge pour $r = 0$) mais il peut être nul, fini ou infini. On l'appelle le *rayon de convergence* de la série entière. Le disque fermé $|z| \leq \rho$ est le *disque de convergence*.

(2) La proposition ne dit rien sur ce qui se passe sur le *cercle de convergence* $|z| = \rho$.

(3) La somme de la série est une fonction continue sur l'intérieur du disque de convergence.

Démonstration. C'est une conséquence du lemme suivant, dû à Abel.

***Lemme 1.1.3* (Abel).** *Soient* r, r_0 *des réels tels que* $0 < r < r_0$*. S'il existe un nombre réel (fini)* $M > 0$ *tel qu'on ait*

$$|a_n| r_0^n \leq M \qquad \textit{pour tout } n \geq 0,$$

alors $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ *converge normalement pour* $|z| \leq r$.

Démonstration du lemme. On majore

$$|a_n z^n| \leq |a_n| r^n \leq M \left(\frac{r}{r_0}\right)^n.$$

Comme on a $r < r_0$, $M(r/r_0)^n$ est le terme général d'une série géométrique convergente. □

Montrons la première assertion de la proposition : si $r < \rho$, on choisit un nombre r_0 tel que $r < r_0 < \rho$. Par définition de ρ, la série $\sum |a_n| r_0^n$ converge, donc il existe un nombre (fixe) M tel que

$$|a_n| r_0^n \leq M \qquad \text{pour tout } n.$$

On applique le lemme d'Abel et on obtient la convergence normale de $\sum a_n z^n$ pour $|z| \leq r_0$.

Pour la deuxième assertion : si $|z_0| > \rho$, pour tout réel M, on peut trouver un entier n tel que $\left|a_n z_0^n\right| > M$ (sinon, le lemme d'Abel impliquerait que la série $\sum a_n z^n$ converge normalement pour $|z| < |z_0|$, ce qui est contradictoire avec la définition de ρ). □

Exemple 1.1.4. Le rayon de convergence de la série $\sum z^n$ est 1. Voir d'autres exemples dans l'exercice 1.5.2.

On dit parfois qu'une série entière est *convergente* quand son rayon de convergence est strictement positif (c'est-à-dire quand elle converge quelque part).

Somme et produit de séries entières convergentes. Considérons maintenant deux séries entières

$$f(z) = \sum a_n z^n, \qquad g(z) = \sum b_n z^n$$

de rayons de convergence respectifs ρ_1 et ρ_2 ainsi que les séries somme et produit

$$\sum c_n z^n \text{ avec } c_n = a_n + b_n, \qquad \sum d_n z^n \text{ avec } d_n = a_0 b_n + \cdots + a_n b_0.$$

Appelons enfin R le plus petit des deux nombres ρ_1 et ρ_2.

Proposition 1.1.5. *Les séries entières $s(z) = \sum c_n z^n$ et $p(z) = \sum d_n z^n$ ont un rayon de convergence au moins égal à R. Pour $|z| < R$, leurs sommes sont respectivement $f(z) + g(z)$ et $f(z)g(z)$.*

Démonstration. On écrit

$$\gamma_n = |a_n| + |b_n|, \quad \delta_n = \sum_{p=0}^{n} \left|a_p\right| \cdot \left|b_{n-p}\right|,$$

de sorte que $|c_n| \leq \gamma_n$ et $|d_n| \leq \delta_n$. Pour $r < R$, les séries $\sum |a_n| r^n$ et $\sum |b_n| r^n$ convergent. On a donc

$$\sum_{n\geq 0} \gamma_n r^n = \left(\sum_{n\geq 0} |a_n| r^n\right) + \left(\sum_{n\geq 0} |b_n| r^n\right) < +\infty$$

et

$$\sum_{n\geq 0} \delta_n r^n = \left(\sum_{n\geq 0} |a_n| r^n\right) \cdot \left(\sum_{n\geq 0} |b_n| r^n\right) < +\infty$$

les séries $s(z)$ et $p(z)$ sont donc convergentes pour $|z| < R$.

Il reste à vérifier que leurs sommes sont bien la somme et le produit des séries $f(z)$ et $g(z)$. Pour la somme, c'est clair. Pour le produit, ça résulte de la propriété rappelée dans l'exercice 1.5.4. □

Définition des fonctions analytiques.

Définition 1.1.6. Soit $U \subset \mathbf{C}$ un ouvert et soit $f : U \to \mathbf{C}$ une application. Soit $z_0 \in U$. On dit que f est *analytique* en z_0 s'il existe

– un nombre $r > 0$ tel que le disque $|z - z_0| < r$ soit contenu dans U

– et une série entière $\sum_{n\geq 0} a_n w^n$ de rayon de convergence $\rho \geq r$

tels que, pour $|z - z_0| < r$, on ait

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

On dit que f est analytique sur U si elle est analytique en tout point de U.

Exemple 1.1.7. Un polynôme est une fonction analytique en tout point de $\mathbf{C}$: en effet, on peut développer le polynôme en tout point grâce à la formule de Taylor :

$$P(z) = P(z_0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} P^{(k)}(z_0)(z - z_0)^k$$

où n est le degré de P.

On remarquera que la somme et le produit de deux fonctions analytiques sur U sont des fonctions analytiques sur U (en application de la proposition 1.1.5). L'ensemble des fonctions analytiques sur U est ainsi un anneau. C'est bien évidemment un espace vectoriel sur $\mathbf{C}$. En plus, les structures d'anneau et d'espace vectoriel sont compatibles ($\lambda(fg) = (\lambda f)g = f(\lambda g)$) ce qu'on résume en disant :

Proposition 1.1.8. *L'ensemble des fonctions analytiques sur l'ouvert U est une algèbre sur* $\mathbf{C}$.

On note souvent cette algèbre $O(U)$.

1.2. Les principes des zéros isolés et du prolongement analytique

***Proposition 1.2.1* (Principe des zéros isolés, version séries entières).** *Soit $f(z) = \sum a_n z^n$ la somme d'une série entière de rayon de convergence* $\rho > 0$. *Si au moins un des coefficients a_n n'est pas nul, il existe un r dans* $]0, +\infty[$ *tel que f ne s'annule pas pour $|z|$ dans l'intervalle* $]0, r[$.

Démonstration. Soit p le plus petit entier tel que le coefficient a_p ne soit pas nul. Ainsi

$$f(z) = \sum_{n \geq p} a_n z^n = z^p g(z)$$

avec $g(z) = a_p + a_{p+1} z + \cdots$ et $g(0) = a_p \neq 0$.

Comme g est la somme d'une série entière, elle est continue à l'intérieur de son disque de convergence, donc il existe tout un voisinage de 0 sur lequel elle ne s'annule pas. □

Remarque 1.2.2. Dans les notations de la démonstration, si $p = 0$, $f = g$ et f ne s'annule pas au voisinage de 0. Si $p \geq 1$, f a un zéro isolé en 0.

Corollaire 1.2.3. *Toute fonction analytique sur U admet un* unique *développement en série entière au voisinage de chaque point de U.*

Démonstration. En effet, si, pour tout z dans un voisinage de z_0, on a

$$\sum a_n (z - z_0)^n = \sum b_n (z - z_0)^n,$$

on a $\sum (a_n - b_n)(z - z_0)^n = 0$ et donc

$$\sum (a_n - b_n) w^n = 0 \text{ pour tout } w \text{ dans un voisinage de } 0.$$

Donc, en appliquant la proposition 1.2.1, on voit qu'on a $a_n = b_n$ pour tout n. □

***Théorème 1.2.4* (Principe du prolongement analytique).** *Soit U un ouvert* connexe *de* $\mathbf{C}$ *et soient f, g deux fonctions analytiques sur U. Si f et g coïncident sur une partie Σ de U qui a un point d'accumulation dans U, alors elles coïncident sur U.*

Démonstration. Soit a un point d'accumulation de Σ dans U et V un voisinage de a sur lequel f et g sont développables en série entière. Considérons la fonction $h = f - g$. Elle est analytique sur U puisque f et g le sont. Elle est développable en série entière sur V et ses zéros ont un point d'accumulation dans V donc, en vertu de la proposition 1.2.1, $h|_V = 0$. Soit

$$A = \{a \in U \mid h = 0 \text{ au voisinage de } a\}.$$

C'est un ouvert de U par définition. Il contient l'ouvert non vide V et n'est donc pas vide. Montrons maintenant qu'il est aussi *fermé*.

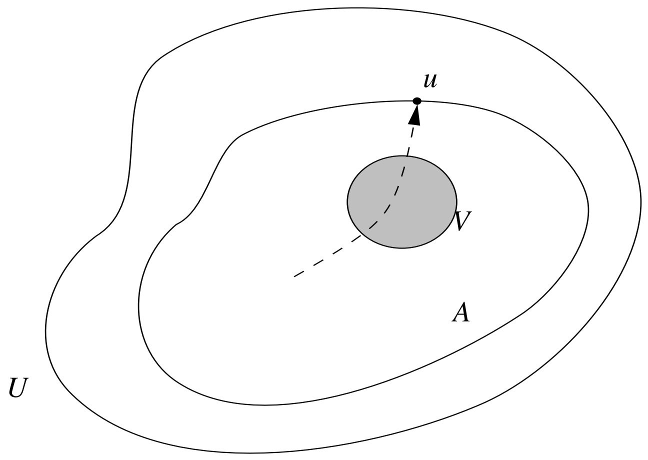

Figure 1

Soit u un élément de la frontière de A dans U. Si $u \notin A$, il existe une suite u_n d'éléments de A tels que $u = \lim u_n$. Comme u_n est dans A, $h(u_n) = 0$ pour tout n. Mais $u \in U$ et h est analytique dans U, donc elle se développe en série entière au voisinage de u :

$$h(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-u)^n$$

sur la boule $B = \{z \in U \mid |z-u| < r\}$. Si n est assez grand, u_n est dans B et h a une infinité de zéros dans B, ce qui serait contraire au principe des zéros isolés si l'un des a_n n'était pas nul. Donc tous les a_n sont nuls et $h = 0$ sur un voisinage de u. Ainsi u est dans A, ce qui fait que A est fermé.

En conclusion, A est ouvert, fermé et non vide. Comme U est connexe, on a $A = U$. □

Remarque 1.2.5. En particulier, si une fonction analytique est nulle sur un tout petit ouvert inclus dans U, elle est nulle sur U tout entier. Il est clair que ce résultat est faux pour des fonctions simplement supposées $\mathcal{C}^\infty$ (voir l'exercice 1.5.9).

Si U et V sont deux ouverts non vides avec $V \subset U$ et U connexe et si f est une fonction analytique sur V, on appelle *prolongement analytique* de f à U toute fonction analytique sur U qui coïncide avec f sur V. Il se pourrait très bien qu'il n'existe pas de tel prolongement, mais, s'il en existe un, il est unique.

Remarque 1.2.6. On applique souvent le théorème 1.2.4 au cas où Σ est un ouvert de U mais aussi dans le cas où Σ est une courbe dessinée dans U. On l'applique par exemple Σ est l'intersection de U avec l'axe réel.

Proposition 1.2.7 **(Principe des zéros isolés).** *Soit f une fonction analytique sur un ouvert connexe U. Si f n'est pas identiquement nulle, ses zéros sont isolés.*

Démonstration. Si ce n'était pas le cas, il existerait une suite infinie u_n de zéros de f qui convergerait vers un point $u \in U$. D'après la démonstration précédente, f serait nulle au voisinage de u et donc serait identiquement nulle sur U. □

1.3. Dérivation et analyticité des séries entières convergentes

Proposition 1.3.1. *Soit $f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence ρ et soit $f'(z) = \sum_{n\geq 1} n a_n z^{n-1}$. Son rayon de convergence est ρ et, pour tout z tel que $|z| < \rho$, on a*

$$f'(z) = \lim_{h\to 0} \frac{f(z+h)-f(z)}{h}.$$

Il semble naturel d'appeler f' la *dérivée* de f. On discutera des relations entre cette dérivée et les dérivées partielles ou la différentielle de f au chapitre suivant.

Corollaire 1.3.2. *Une fonction analytique sur U y admet des dérivées de tous ordres.* □

Démonstration de la proposition. Appelons ρ' le rayon de convergence de f'. En posant $\alpha_n = |a_n|$, on sait donc que, pour $r < \rho'$, la série $\sum n\alpha_n r^{n-1}$ converge et donc que

$$\sum_{n\geq 1} \alpha_n r^n \leq r \left(\sum_{n\geq 1} n\alpha_n r^{n-1} \right) < +\infty$$

donc $r \leq \rho$ (on a montré $r < \rho' \Rightarrow r \leq \rho$).

Inversement, soit $r < \rho$ et soit r' tel que $r < r' < \rho$. Alors

$$n\alpha_n r^{n-1} = \frac{n}{r'} \alpha_n r'^n \left(\frac{r}{r'}\right)^{n-1}.$$

À cause de l'inégalité $r' < \rho$, la suite $\alpha_n r'^n$ est majorée, disons par M, de sorte que

$$n\alpha_n r^{n-1} \leq \frac{1}{r'} M n \left(\frac{r}{r'}\right)^{n-1}.$$

La série de terme général $n(r/r')^{n-1}$ est convergente, donc $n\alpha_n r^{n-1}$ est le terme général d'une série convergente et donc $r \leq \rho'$ (on a montré $r < \rho \Rightarrow r \leq \rho'$).

Donc $\rho = \rho'$. Il reste à vérifier que f' est bien la dérivée, au sens exprimé dans la proposition, de f. On fixe z et on choisit r de façon que $|z| < r < \rho$.

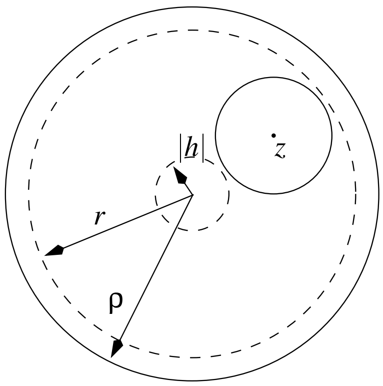

Figure 2

On suppose que h est un nombre complexe non nul tel que $|h| \leq r - |z|$ de sorte que

$$|z+h| \leq |z| + |h| \leq r$$

et que f est définie en $z+h$. On a alors

$$\frac{f(z+h)-f(z)}{h} - f'(z) = \sum_{n\geq 1} u_n(z,h)$$

avec
$$u_n(z,h) = a_n\left((z+h)^{n-1} + z(z+h)^{n-2} + \cdots + z^{n-1} - nz^{n-1}\right)$$
et donc
$$|u_n(z,h)| \leq \alpha_n\left(r^{n-1} + r(r)^{n-2} + \cdots + r^{n-1} + nr^{n-1}\right) = 2n\alpha_n r^{n-1}.$$
À cause de l'inégalité $r < \rho$, la série $\sum n\alpha_n r^{n-1}$ converge et on a donc
$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N, \quad \sum_{n>N} 2n\alpha_n r^{n-1} \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$
La somme finie $\sum_{n\leq N} u_n(z,h)$ est un polynôme en h, nul pour $h = 0$. Il existe donc un réel positif η tel qu'on ait, pour tout h tel que $|h| < \eta$,
$$\left|\sum_{n\leq N} u_n(z,h)\right| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$
Finalement, si $|h| < \inf(r - |z|, \eta)$,
$$\left|\frac{f(z+h) - f(z)}{h} - f'(z)\right| \leq \left|\sum_{n\leq N} u_n(z,h)\right| + \sum_{n>N} 2n\alpha_n r^{n-1} \leq \varepsilon. \qquad \square$$

Cette proposition permet de démontrer (enfin !) qu'il existe des fonctions analytiques (autres que les polynômes).

***Théorème 1.3.3* (Analyticité des séries entières).** *La somme d'une série entière est analytique à l'intérieur de son disque de convergence.*

Contrairement à ce qu'on pourrait croire, ce résultat n'a rien d'évident. On va montrer un résultat beaucoup plus précis : une série entière est somme de sa série de Taylor en tout point de l'intérieur de son disque de convergence.

Proposition 1.3.4. *Soit $f(z) = \sum a_n z^n$ une série entière dont le rayon de convergence ρ n'est pas nul. Soit z_0 un point de l'intérieur du disque de convergence. Alors la série entière*
$$\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0) w^n$$
a un rayon de convergence au moins égal à $\rho - |z_0|$ et on a
$$f(z) = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0)(z - z_0)^n$$
pour tout z tel que $|z - z_0| < \rho - |z_0|$.

Démonstration. Posons $r_0 = |z_0|$, $\alpha_n = |a_n|$. Calculons la dérivée p-ième de f :
$$f^{(p)}(z_0) = \sum_{q\geq 0} \frac{(p+q)!}{q!} a_{p+q} z_0^q$$
et
$$\left|f^{(p)}(z_0)\right| \leq \sum \frac{(p+q)!}{q!} \alpha_{p+q} r_0^q.$$

Pour $r_0 \leq r < \rho$, on a

$$\begin{aligned}
\sum_{p\geq 0} \frac{1}{p!}\left|f^{(p)}(z_0)\right|(r-r_0)^p &\leq \sum_{p,q} \frac{(p+q)!}{p!q!}\alpha_{p+q} r_0^q (r-r_0)^p \\
&\leq \sum_{n\geq 0} \alpha_n \underbrace{\left(\sum_{0\leq p\leq n} \frac{n!}{p!(n-p)!}(r-r_0)^p r_0^{n-p}\right)}_{(r-r_0+r_0)^n} \\
&\leq \sum_{n\geq 0} \alpha_n r^n < +\infty.
\end{aligned}$$

On a utilisé le fait que la série était à termes positifs pour regrouper les termes. Donc le rayon de convergence de la série $\sum \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0) z^n$ est plus grand que ou égal à $r - r_0$, mais on pouvait choisir r arbitrairement proche de ρ, donc le rayon de convergence est supérieur ou égal à $\rho - |z_0|$.

Calculons maintenant $\sum_{n\geq 0} f^{(n)}(z_0)(z-z_0)^n/n!$. L'inégalité ci-dessus montre que la série double

$$\sum_{p,q} \frac{(p+q)!}{p!q!} a_{p+q} z_0^q (z-z_0)^p$$

converge absolument. On peut donc calculer sa somme en regroupant les termes de façon arbitraire. Il y a deux façons intéressantes de le faire :

– ce qu'on a déjà fait (regrouper selon $p+q=n$) :

$$\sum_{n\geq 0} a_n \left(\sum_{0\leq p\leq n} \frac{n!}{p!(n-p)!}(z-z_0)^p z_0^{n-p}\right) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n = f(z),$$

– mais aussi

$$\sum_{p\geq 0} \frac{(z-z_0)^p}{p!} \underbrace{\left(\sum_{q\geq 0} \frac{(p+q)!}{q!} a_{p+q} z_0^q\right)}_{f^{(p)}(z_0)}.$$

□

1.4. Exponentielle et surtout logarithme

Exponentielle complexe. Elle est définie par la série entière

$$\exp(z) = e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

Il est clair que le rayon de convergence de cette série est infini (exercice 1.5.2 si nécessaire). La convergence absolue implique que l'on peut calculer

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{k!}\right)\left(\sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{b^\ell}{\ell!}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} a^k b^{n-k} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a+b)^n}{n!}$$

ce qui fait que la fonction exponentielle vérifie la formule d'addition (ou « équation fonctionnelle »)

$$\exp(a)\exp(b) = \exp(a+b) \qquad \forall\, a,b \in \mathbf{C}.$$

Cette relation implique que $e^0 = 1$ et que $e^z \cdot e^{-z} = 1$. Les coefficients de la série sont des nombres réels ce qui fait que e^x est réel pour x réel. On appelle e le nombre (réel) $e = e^1$ (ce qui justifie la notation !).

Le théorème suivant résume les propriétés les plus importantes de la fonction exponentielle.

Théorème 1.4.1

(1) *L'application* exp *est une surjection* $\mathbf{C} \to \mathbf{C} - \{0\}$.

(2) *Elle est égale à sa dérivée (*$\exp' = \exp$*).*

(3) *La restriction de* exp *à* $\mathbf{R}$ *est une fonction réelle strictement croissante et positive qui vérifie*

$$\lim_{x\to+\infty} \exp(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to-\infty} \exp(x) = 0.$$

(4) *Il existe un nombre réel positif, noté* π*, tel que* $\exp(i\pi/2) = i$ *et tel que* $e^z = 1$ *si et seulement si* $z/(2i\pi) \in \mathbf{Z}$.

(5) *La fonction* exp *est périodique de période* $2i\pi$.

(6) *L'application* $t \mapsto e^{it}$ *envoie l'axe réel sur le cercle unité.*

Démonstration. D'abord, l'équation fonctionnelle donne $e^z \cdot e^{-z} = 1$, donc $e^z \neq 0$, et exp est à valeurs dans $\mathbf{C} - \{0\}$ (mais il reste à prouver que tous les nombres complexes non nuls sont atteints).

Ensuite la série dérivée de celle définissant exp est évidemment la même et donc $\exp' = \exp$.

On a déjà dit que exp se restreignait à l'axe réel en une fonction réelle. En contemplant le développement en série, on voit immédiatement que exp est strictement croissante sur les réels positifs et aussi que sa limite en $+\infty$ est $+\infty$. Pour les réels négatifs et la limite en $-\infty$, on utilise $e^{-x} = 1/e^x$.

Le développement en série montre aussi que, si t est réel, on a $e^{-it} = \overline{e^{it}}$. Ainsi

$$\left|e^{it}\right|^2 = e^{it} \cdot \overline{e^{it}} = e^{it} \cdot e^{-it} = e^{it-it} = e^0 = 1$$

donc l'axe réel est bien envoyé dans le cercle unité (il restera à vérifier que tous les points en sont atteints).

Définissons[(1)] deux fonctions réelles de variable réelle

$$\cos t = \mathrm{Ré}(e^{it}), \qquad \sin t = \mathrm{Im}(e^{it})$$

et dérivons la relation $e^{it} = \cos t + i \sin t$:

$$\cos' t + i \sin' t = ie^{it} = -\sin t + i \cos t$$

de sorte que

$$\cos' = -\sin, \qquad \sin' = \cos .$$

Comme partie réelle de e^{it}, la fonction cos a un développement en série

$$\cos t = 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} + \cdots$$

convergeant pour tout t réel. Considérons la valeur de la fonction cos en 2. Les termes de la série vont décroître en valeur absolue, avec des signes alternés, de sorte que $\cos 2$ est majoré par la somme des trois premiers termes (avec $t = 2$). Tous calculs faits, on trouve $\cos 2 < -1/2$. Comme $\cos 0 = 1$ et que cos est continue sur $\mathbf{R}$, elle doit s'annuler entre 0 et 2. Soit t_0 le plus petit nombre réel positif tel que $\cos t_0 = 0$. On définit

$$\pi = 2t_0.$$

Comme $\cos t + i \sin t$ est de module 1, $\sin t_0 = \pm 1$, comme $\sin' t = \cos t > 0$ sur $]0, t_0[$, la fonction sin est croissante sur $]0, t_0[$ et comme $\sin 0 = 0$, on a $\sin t_0 > 0$, bref, $\sin t_0 = 1$. D'où l'on déduit que

$$e^{i\pi/2} = i.$$

(1) Voir aussi la discussion page 10 pour des remarques sur cette *définition*.

On en déduit aussi que $e^{i\pi} = i^2 = -1$, que $e^{2i\pi} = (-1)^2 = 1$, que $e^{2in\pi} = 1$ pour tout $n \in \mathbf{Z}$ et que

$$e^{z+2i\pi} = e^z e^{2i\pi} = e^z$$

... et donc que la fonction exponentielle est périodique de période $2i\pi$.

Supposons maintenant que z soit tel que $e^z = 1$ et montrons que z est un multiple entier de $2i\pi$. Si $z = x+iy$ (avec x et y réels), on a $e^z = e^x e^{iy}$, donc $|e^z| = e^x$. Comme $e^z = 1$, on a forcément $e^x = 1$ et donc $x = 0$ (exp est strictement croissante et en particulier injective sur $\mathbf{R}$). Reste à montrer que $y/2\pi$ est un entier, et pour ça, il suffit de montrer que $e^{iy} \neq 1$ pour $y \in]0, 2\pi[$.

Soit donc $y \in]0, 2\pi[$. Écrivons les parties réelle et imaginaire de $\exp iy/4$:

$$e^{iy/4} = u+iv, \quad u, v \in \mathbf{R}.$$

Comme $y/4 \in]0, \pi/2[$, les réels u et v sont strictement positifs. D'autre part, on a

$$e^{iy} = (u+iv)^4 = u^4 - 6u^2v^2 + v^4 + 4iuv(u^2 - v^2).$$

Le membre de droite ne peut être réel que si $u^2 - v^2 = 0$. Comme $u^2 + v^2 = 1$, ce n'est possible qu'avec $u^2 = v^2 = 1/2$. Mais alors la partie réelle est -1 et pas 1.

Il ne reste plus à montrer que les deux assertions de surjectivité que nous avons laissées de côté.

Commençons par le cercle. Fixons un nombre complexe w de module 1 et montrons qu'il s'écrit $w = e^{it}$ pour un certain $t \in \mathbf{R}$. Supposons d'abord que ses parties réelle u et imaginaire v sont toutes deux positives. Comme $u \leq 1$, le théorème des valeurs intermédiaires (encore) affirme qu'il existe un $t \in [0, \pi/2]$ tel que $u = \cos t$. Comme $\sin^2 t = 1 - u^2 = v^2$, et comme $v \geq 0$ et $t \in [0, \pi/2]$, on a $v = \sin t$ et donc $w = e^{it}$.

Si $u < 0$ et $v \geq 0$, on peut appliquer ce qui précède à $-iw$, on trouve $-iw = e^{it}$ et donc $w = e^{i(t+\pi/2)}$. Enfin, si $v < 0$, on sait que $-w = e^{it}$ et donc $w = e^{i(t+\pi)}$.

Pour finir, fixons un $w \neq 0$ et écrivons $w = \alpha|w|$ avec α de module 1. On vient de voir qu'alors, $\alpha = e^{iy}$ pour un certain $y \in \mathbf{R}$. Toujours en utilisant le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un réel x tel que $|w| = e^x$. Alors $w = e^{x+iy}$. On a bien démontré que exp est surjective de $\mathbf{C}$ dans $\mathbf{C} - \{0\}$. $\square$

La figure 3 montre quelques droites parallèles aux axes réel et imaginaire et leurs images par l'exponentielle. Voir aussi l'exercice 1.5.14.

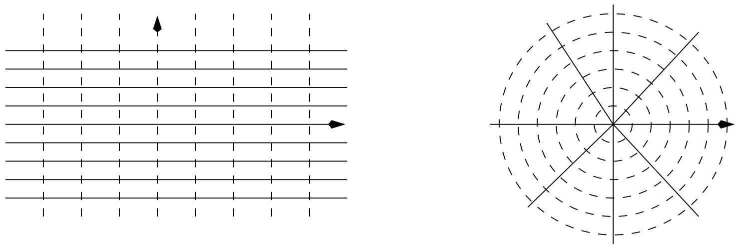

Figure 3

Logarithme népérien. La fonction exp est continue et strictement croissante sur $\mathbf{R}$. Elle admet une fonction réciproque continue et strictement croissante $]0, +\infty[\to \mathbf{R}$, appelée « logarithme népérien » et notée log. On remarquera que $\log(1) = 0$ et que, comme $\exp' = \exp$, $\log'(x) = 1/x$... c'est bien le même logarithme népérien que les années précédentes.

Mesure des angles et arguments d'un nombre complexe. Appelons S^1 le cercle unité :

$$S^1 = \{z \in \mathbf{C} \mid |z| = 1\}.$$

On a vu que l'application $y \mapsto e^{iy}$ est une application continue et un homomorphisme surjectif de groupes $\mathbf{R} \to S^1$. On a aussi déterminé son noyau, le groupe des multiples entiers de 2π. Ainsi l'exponentielle définit un *isomorphisme* de groupes

$$\varphi : \mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z} \longrightarrow S^1.$$

Si on munit $\mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}$ de la topologie quotient, φ devient un homéomorphisme (exercice 1.5.15). L'application réciproque associe, à tout nombre complexe de module 1, une classe modulo $2\pi\mathbf{Z}$ de réels, ses arguments. De même, si $z \neq 0$, on définit $\arg(z) = \arg(z/|z|)$, à l'addition d'un multiple entier de 2π près.

Immortel Archimède… Dans les classes du secondaire, on a défini sinus et cosinus d'un angle (géométrique)

$$\sin A = \frac{a}{c}, \qquad \cos A = \frac{b}{c}$$

(côté opposé sur hypothénuse, côté adjacent sur hypothénuse). On a aussi parlé des fonctions sinus et cosinus que l'on vient de définir ici — sans les définir rigoureusement. Ici il s'agit de sinus et cosinus d'un *nombre* réel. Le passage de l'un (angle) à l'autre (nombre) se fait *via* la *mesure* des angles : si une mesure de l'angle en A est t, on a bien

$$\cos A = \cos t, \qquad \sin A = \sin t.$$

De même, le nombre π défini ici comme le double du premier zéro positif de la fonction cosinus est bien le nombre π qui permet de calculer la longueur d'une circonférence depuis l'école élémentaire (ou depuis Archimède, selon la notion qu'on a du temps historique) : on calcule la longueur du cercle unité en le paramétrant par $(\cos t, \sin t)$ ou e^{it}, $t \in [0, 2\pi]$. La longueur est l'intégrale de la norme du vecteur dérivé $(-\sin t, \cos t)$ ou ie^{it} :

$$\ell = \int_0^{2\pi} \left|ie^{it}\right| dt = 2\pi.$$

La longueur de la circonférence est bien 2π. On peut *définir* π par cette égalité… à condition d'avoir défini la longueur des courbes avant.

Logarithme complexe. Il s'agit d'inverser la fonction exponentielle… dont nous savons fort bien qu'elle n'est *pas* inversible, n'étant pas injective. On peut donc s'attendre à des problèmes. Nous savons cependant pourquoi elle n'est pas injective (en d'autres termes nous connaissons le noyau de l'homomorphisme de groupes exp).

Donnons-nous un nombre complexe t et cherchons tous les nombres complexes z tels que $e^z = t$. Il est nécessaire que t ne soit pas nul. Écrivons, après avoir choisi un argument de t,

$$t = |t| \exp(i \arg t)$$

et cherchons z sous la forme $z = x + iy$, c'est-à-dire résolvons

$$e^x e^{iy} = |t| \exp(i \arg t).$$

On trouve

$$x = \log|t|, \qquad y = \arg t$$

cette deuxième relation étant à manier avec des pincettes. Donc on aimerait écrire

$$z = \log|t| + i \arg t$$

relation dans laquelle on voit bien, comme il fallait s'y attendre, que le logarithme complexe n'est pas bien défini, ou qu'il est défini à l'addition d'un multiple entier de $2i\pi$ près.

Définition 1.4.2. On dit qu'une fonction *continue* f de la variable complexe t, définie sur un ouvert connexe $U \subset \mathbf{C}$ ne contenant pas 0, est *une détermination du logarithme* sur U si

$$\forall t \in U, \quad \exp(f(t)) = t.$$

Remarque 1.4.3. Une telle détermination n'existe pas forcément. C'est le cas par exemple pour $U = \mathbf{C} - \{0\}$, comme on va le voir dans la proposition 1.4.5. Par contre, s'il en existe une, il y en a beaucoup d'autres, comme le précise la proposition suivante.

Proposition 1.4.4. *Si f est une détermination du logarithme sur U (ouvert connexe ne contenant pas 0), toute autre détermination du logarithme sur U est de la forme $f + 2ik\pi$ pour un certain entier k. Réciproquement, toute $f + 2ik\pi$ est une détermination du logarithme sur U.*

Démonstration. Supposons que f et g soient deux déterminations du logarithme sur U. Par définition, elles sont continues sur U. Donc la fonction

$$h(t) = \frac{f(t) - g(t)}{2i\pi}$$

est continue sur l'ouvert *connexe* U. Elle ne prend que des valeurs entières et donc est constante. La réciproque est claire. $\square$

Proposition 1.4.5. *Il n'existe pas de détermination (continue) du logarithme sur $\mathbf{C} - \{0\}$.*

Démonstration. Supposons qu'une telle détermination existe, appelons-la f. Posons $u(z) = \operatorname{Im} f(z)$. Alors u serait une détermination continue de l'argument sur $\mathbf{C} - \{0\}$.

Restreignons-nous au cercle S^1 et posons $v(\theta) = u(e^{i\theta})$, définissant ainsi une fonction $v : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ continue et périodique de période 2π. Pour tout θ, θ et $v(\theta)$ sont des arguments de $e^{i\theta}$, donc il existe un entier $n(\theta)$ tel que

$$v(\theta) - \theta = 2n(\theta)\pi.$$

Comme v est continue, n est une fonction continue de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{Z}$, donc elle est constante. Il existe donc un entier n tel que

$$v(\theta) = \theta + 2n\pi.$$

La contradiction vient maintenant du fait que v doit aussi être périodique :

$$\theta + 2n\pi = v(\theta) = v(\theta + 2\pi) = (\theta + 2\pi) + 2n\pi.$$

$\square$

Remarque 1.4.6. Compte-tenu de tout ce a été dit dans ce paragraphe, la plus grande prudence est de rigueur quand on utilise des déterminations du logarithme. Je réserverai la notation $\log t$ pour le logarithme népérien, c'est-à-dire pour les variables t réelles. Je préciserai : « soit f la détermination du logarithme sur l'ouvert U telle que *etc.* ». Je conseille une prudence analogue aux lecteurs.

Développement en série du logarithme

Proposition 1.4.7. *La série entière*

$$\sum_{n\geq 1}(-1)^{n-1}\frac{z^n}{n}$$

converge pour $|z|<1$. *La somme de la série*

$$f(t)=\sum_{n\geq 1}(-1)^{n-1}\frac{(t-1)^n}{n}$$

est une détermination du logarithme sur le disque ouvert de centre 1 *et de rayon* 1.

Démonstration. Il est clair que le rayon de convergence de la série entière est 1 et donc que la série définissant $f(t)$ converge pour $|t-1|<1$. La fonction f vérifie $f(1)=0$ et

$$f'(t)=\sum_{n\geq 0}(-1)^n(t-1)^n=\frac{1}{t}$$

donc sa restriction aux t réels (dans $]0,2[$) est $\log(t)$. La fonction $\exp\circ f$ est analytique comme composée de deux fonctions analytiques[(2)], coïncide avec t pour t réel, donc, en vertu du théorème du prolongement analytique (ici le théorème 1.2.4), elle coïncide avec t partout. □

On a ainsi montré l'existence de déterminations *analytiques* du logarithme sur le disque de centre 1 et de rayon 1. Il en existe sur tous les disques contenus dans $\mathbf{C}-\{0\}$:

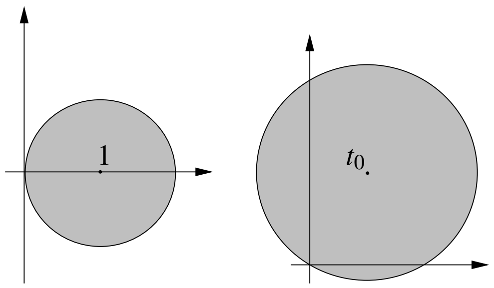

Figure 4

Corollaire 1.4.8. *Soit* t_0 *un nombre complexe non nul et soit* θ_0 *un argument de* t_0. *Sur le disque* $|t-t_0|<|t_0|$, *la série*

$$g(t)=\log|t_0|+i\theta_0+\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\left(\frac{t-t_0}{t_0}\right)^n$$

définit une détermination analytique du logarithme.

Démonstration. On applique la proposition 1.4.7 qui dit que la série

$$\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\left(\frac{t-t_0}{t_0}\right)^n$$

[(2)]Il n'est pas très facile de démontrer directement que la composée de deux fonctions analytiques est analytique. On pourra le faire en exercice (exercice 1.5.3) ou attendre les théorèmes du chapitre suivant qui le donneront sans fatigue.

converge, sur le disque défini par $\left|\frac{t}{t_0}-1\right|<1$, vers $f(t/t_0)$. Ainsi

$$\exp g(t) = |t_0|e^{i\theta_0}\exp f\left(\frac{t}{t_0}\right) = t_0\frac{t}{t_0} = t. \qquad \square$$

La détermination « principale » du logarithme. Traditionnellement, il y a une détermination du logarithme considérée (ce n'est pas mon avis) comme meilleure que les autres. Commençons par définir une fonction réelle de variable réelle, la fonction Arcsin (prononcer « arcsinus »).

La fonction sinus est continue et strictement croissante sur $]-\pi/2,\pi/2[$. Elle admet donc une fonction réciproque strictement croissante

$$\mathrm{Arcsin} :]-1,1[\longrightarrow]-\pi/2,\pi/2[.$$

Proposition 1.4.9. *Soit U_π le complémentaire dans $\mathbf{C}$ de l'ensemble des réels négatifs ou nuls. Les formules*

$$f(t) = \log|t| + i\begin{cases}\mathrm{Arcsin}(y/|t|) & si\ x \geq 0\\ \pi - \mathrm{Arcsin}(y/|t|) & si\ x\leq 0\ et\ y \geq 0\\ -\pi - \mathrm{Arcsin}(y/|t|) & si\ x \leq 0\ et\ y\leq 0\end{cases}$$

(avec $x = \mathrm{R\acute{e}}\,t$, $y = \mathrm{Im}\,t$) définissent une fonction f sur U_π qui est une détermination analytique du logarithme.

Démonstration. Montrons d'abord que ces formules définissent bien une fonction f continue sur U_π. Elle est continue sur le demi-plan $x \geq 0$ et sur chacun des deux quadrants du demi-plan $x < 0$. Il suffit de vérifier que les différentes formules donnent la même chose sur l'axe des y (privé de 0).

Si $x = 0$ et $y > 0$, la première formule donne $\log|t| + i\pi/2$ et la deuxième $\log|t| + i(\pi-\pi/2)$. De même, si $x = 0$ et $y < 0$, les première et troisième formule donnent respectivement $\log|t| - i\pi/2$ et $\log|t| - i(\pi-\pi/2)$. Donc f est bien continue sur U_π. De plus, il est clair que les formules en Arcsin définissent un argument et donc que f est une détermination du logarithme sur U_π.

Il reste à vérifier qu'elle est analytique. Montrons donc qu'elle a un développement en série entière au voisinage de chaque point de U_π. Soit donc $t_0 \in U_\pi$ et soit D un disque ouvert de centre t_0 contenu dans U_π. Le disque D est contenu dans le disque $|t-t_0| < |t_0|$ et donc, sur D, nous connaissons deux déterminations du logarithme, celle donnée par le corollaire 1.4.8 et celle que nous sommes en train de considérer. En vertu de la proposition 1.4.4, elles diffèrent d'un multiple de $2i\pi$. Comme l'une est analytique, l'autre l'est aussi. $\square$

Remarque 1.4.10. Les formules données dans l'énoncé servent à convaincre les lecteurs que la fonction f est continue. Il est assez rare qu'on ait effectivement besoin de calculer un arcsinus pour évaluer un argument.

C'est cette détermination qu'on appelle la détermination « principale » du logarithme. Mis à part le fait qu'elle coïncide avec le logarithme népérien sur les réels positifs, elle n'a vraiment rien de particulier.

Corollaire 1.4.11. *Si $\theta \in \mathbf{R}$, soit U_θ l'ensemble des nombres complexes dont θ n'est pas un argument. Il existe dans U_θ des déterminations analytiques du logarithme.*

Démonstration. On ramène simplement U_θ sur U_π par une rotation. Soit $\varphi = \theta - \pi$, de sorte que la rotation

$$z \longmapsto e^{-i\varphi}z$$

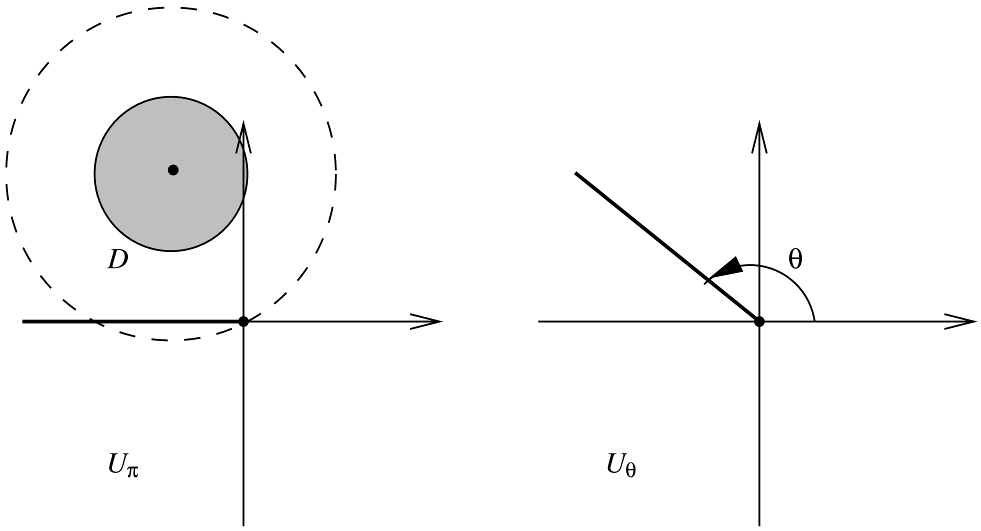

Figure 5

envoie la demi-droite d'argument θ sur celle d'argument π ($y = 0, x < 0$) et U_θ sur U_π. Posons

$$g(t) = f\left(e^{-i\varphi}t\right) + i\varphi$$

où f est la fonction définie par la proposition 1.4.9. Alors g est analytique sur U_θ et

$$\exp g(t) = \exp\left(f\left(e^{-i\varphi}t\right)\right)e^{i\varphi} = e^{-i\varphi}te^{i\varphi} = t. \qquad \square$$

1.5. Exercices

1.5.1. Rayon de convergence, formule d'Hadamard. Montrer que le rayon de convergence ρ de la série entière $\sum a_n z^n$ vérifie

$$\frac{1}{\rho} = \limsup |a_n|^{1/n}.$$

1.5.2. Trouver les rayons de convergence des séries entières

$$\sum n!z^n, \quad \sum \frac{z^n}{n!}, \quad \sum q^{n^2}z^n, \quad \sum z^n, \quad \sum \frac{1}{n}z^n, \quad \sum \frac{1}{n^2}z^n$$

et comparer ce qui se passe pour les trois dernières quand $|z| = 1$.

1.5.3. Soient $S(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$ et $T(z) = \sum_{n\geq 1} b_n z^n$ deux séries entières (on remarquera que $T(0) = 0$).

(1) Montrer que l'expression $U(z) = \sum_{n\geq 0} a_n (T(z))^n$ définit une série entière, que l'on note $U = S \circ T$.

(2) On suppose que les rayons de convergence $\rho(S)$ et $\rho(T)$ sont strictement positifs. Montrer qu'il en est alors de même de celui de U et que, à l'intérieur du disque de convergence de U, $U(z) = S(T(z))$.

(3) Que peut-on dire de la composée de deux fonctions analytiques ?

1.5.4. Soient (u_n) et (v_n) deux séries absolument convergentes. Soit
$$w_n = \sum_{0\leq p\leq n} u_p v_{n-p}.$$
Montrer que la série (w_n) est absolument convergente et que sa somme est égale au produit
$$\left(\sum_{p\geq 0} u_p\right)\left(\sum_{q\geq 0} v_q\right).$$

1.5.5. Soit
$$f(z) = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{p_n}[z(1-z)]^{4^n}$$
où p_n est le plus grand des coefficients apparaissant dans le développement de $[z(1+z)]^{4^n}$. On développe les termes apparaissant dans la définition de f, obtenant ainsi une série entière. Calculer son rayon de convergence. Montrer que f converge pour $|z| < 1$ et pour $|z-1| < 1$.

1.5.6. Soit f une fonction analytique sur un ouvert U de $\mathbf{C}$. Montrer que si f n'est pas constante au voisinage de $z_0 \in U$, il existe un voisinage V de z_0 sur lequel on a
$$z \in V \text{ et } f(z) = f(z_0) \Rightarrow z = z_0.$$

1.5.7. Avec les mêmes hypothèses, soit $u \in \mathbf{C}$. Montrer que
$$U_u = \{z \in U \mid f \text{ est constante égale à } u \text{ au voisinage de } z\}$$
est ouvert et fermé dans U.

1.5.8. Soit $f(z) = \sum a_n z^n$ une série entière dont on suppose que le rayon de convergence vaut 1 et qui vérifie
$$0 < \sum_{n\geq 2} n\,|a_n| \leq |a_1|.$$
Montrer que f est injective et que la série converge pour $|z| = 1$.

1.5.9. Montrer que la fonction $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ définie par
$$x \longmapsto \begin{cases} \exp\left(-\dfrac{1}{x^2}\right) & \text{pour } x \geq 0 \\ 0 & \text{pour } x \leq 0 \end{cases}$$
est une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$. En déduire que le principe du prolongement analytique ne s'applique pas aux fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$. En utilisant f, construire une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbf{C}$ qui ne satisfait pas le principe du prolongement analytique.

1.5.10. Montrer que l'anneau des séries formelles est un anneau intègre. Montrer que l'anneau des fonctions analytiques sur un ouvert U est un anneau intègre si et seulement si l'ouvert U est *connexe*.

1.5.11. Soit $f(z) = \sin\dfrac{\pi}{1-z}$. Montrer que f est analytique sur le disque ouvert $|z| < 1$. Quels sont les zéros de f sur ce disque ? Est-ce contradictoire avec le principe des zéros isolés ?

1.5.12. Montrer que si f est une fonction analytique sur un ouvert connexe U et s'il existe un point z_0 dans U où f et toutes ses dérivées de f s'annulent, f est identiquement nulle sur U.

1.5.13. Existe-t-il une fonction analytique f définie sur un ouvert connexe U contenant 0 et telle que

(1) Pour tout n tel que $1/n \in U$, $f\left(\frac{1}{n}\right) = f\left(\frac{1}{2n+1}\right) = \frac{1}{n}$.

(2) Pour tout n tel que $1/n \in U$, $f\left(\frac{1}{n}\right) = f\left(-\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n^3}$.

1.5.14. Dessiner les images par l'exponentielle des demi-droites issues de l'origine.

1.5.15. Montrer que $\mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}$, muni de la topologie quotient, est un espace topologique compact. Montrer que l'application $\varphi : \mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z} \to S^1$ définie par l'exponentielle (§ 1.4) est un homéomorphisme.

1.5.16. On suppose que f est une fonction analytique non nulle sur un ouvert connexe U contenant 0 de $\mathbf{C}$ et qu'elle vérifie, pour tous z, z' de U tels que $z+z' \in U$,

$$f(z+z') = f(z)f(z')$$

Montrer qu'il existe un nombre complexe b tel que $f(z) = e^{bz}$.

1.5.17. Montrer que $\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n = \exp z$ pour tout nombre complexe z (on pourra développer $(1+z/n)^n$ par la formule du binôme).

1.5.18. On considère les deux séries

$$f_1(z) = \sum_{n\geq 1} \frac{z^n}{n} \quad \text{et} \quad f_2(z) = i\pi + \sum_{n\geq 1} (-1)^n \frac{(z-2)^n}{n}.$$

Démontrer qu'il existe un ouvert connexe U contenant les deux disques ouverts

$$\{z \in \mathbf{C} \mid |z| < 1\} \text{ et } \{z \in \mathbf{C} \mid |z-2| < 1\}$$

et une fonction g analytique sur U telle que

$$g(z) = f_1(z) \text{ si } |z| < 1 \text{ et } g(z) = f_2(z) \text{ si } |z-2| < 1.$$

1.5.19. Soit U un ouvert connexe de $\mathbf{C}$ ne contenant pas 0. On suppose que f est une fonction analytique sur U et qu'elle vérifie

$$f'(t) = \frac{1}{t} \text{ et } \exists\, t_0 \text{ tel que } \exp f(t_0) = t_0.$$

Montrer que f est une détermination du logarithme.

1.5.20. Soit f une fonction analytique sur un ouvert U et z_0 un point de U tel que $f(z_0) \neq 0$. Montrer que pour tout entier $m \geq 1$ il existe un voisinage ouvert V de z_0 et une fonction analytique g sur V tels qu'on ait sur V, $f(z) = g(z)^m$. Combien existe-t-il de telles fonctions ?

1.5.21. Déterminer une fonction continue (analytique) définie sur

$$U = \mathbf{C} - \{(x,0) \mid x < -1 \text{ ou } x > 1\}$$

et telle que

$$f(0) = i \text{ et } (f(z))^2 = z^2 - 1 \quad \forall z \in U.$$

1.5.22. Montrer qu'il existe une détermination f du logarithme dans

$$\mathbf{C} - \{z \mid \text{Ré}(z) = 0, \text{Im}(z) < 0\}$$

telle que $f(1) = 0$. Calculer $f(i)$, $f(-1)$, $f(-2)$, $f(2-3i)$.

La suite d'égalités suivantes est une « démonstration » du fait que, si log est une détermination du logarithme, on a $\log(-z) = \log(z)$:

$$\begin{aligned} \log(-z)^2 &= \log(z^2) \\ \log(-z) + \log(-z) &= \log(z) + \log(z) \\ 2\log(-z) &= 2\log(z) \\ \log(-z) &= \log(z). \end{aligned}$$

Qu'en pensez-vous ?

1.5.23. Considérer les deux ouverts connexes U_1 et U_2 de la figure 6 et étudier s'il existe des déterminations continues sur U_1 et U_2 des fonctions

$$\log(z^2-1), \quad \sqrt{z^2-1}, \quad \sqrt[3]{z^2-1}, \quad \sqrt{z(z^2-1)}, \quad \sqrt[3]{z(z^2-1)}.$$

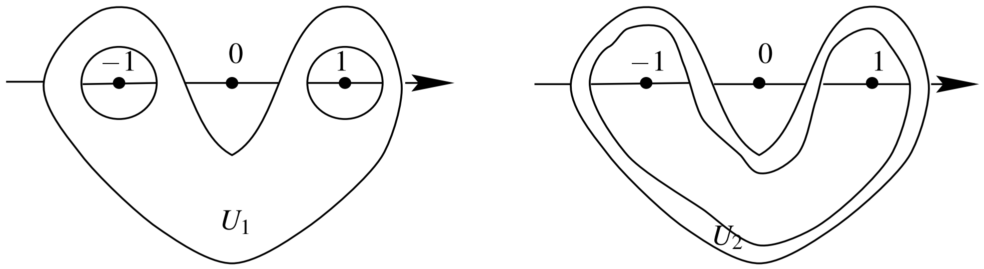

Figure 6

CHAPITRE 2

FONCTIONS HOLOMORPHES

Dans ce chapitre, on définit les fonctions *holomorphes*, qui sont les fonctions dérivables au sens complexe (la définition précise est 2.1.1). Nous avons déjà rencontré cette notion dans la proposition 1.3.1, que nous allons exprimer ici en disant que les fonctions analytiques sont holomorphes.

Le but principal de ce chapitre est de démontrer la réciproque de cette propriété : pour qu'une fonction soit analytique, c'est-à-dire somme de sa série de Taylor en tout point, il *suffit* qu'elle soit holomorphe (dérivable une fois) !

Ce résultat remarquable (et sans analogue en analyse réelle) a de nombreuses applications, nous étudierons les plus classiques : le principe du module maximum, le théorème de d'Alembert, le théorème de Liouville.

2.1. Définition des fonctions holomorphes

Applications linéaires de C dans lui-même. Une application linéaire de $\mathbf{R}^2$ dans lui-même peut être décrite, par exemple, par sa matrice dans la base canonique. C'est une matrice carrée d'ordre 2. Elle contient donc quatre coefficients réels.

Une application linéaire (sur $\mathbf{C}$) de $\mathbf{C}$ dans lui-même est, elle, de la forme $z \mapsto az$, elle est donc définie par un nombre complexe unique, ou, si l'on préfère, par deux nombres réels.

Identifions $\mathbf{R}^2$ à $\mathbf{C}$ en envoyant les vecteurs de la base canonique sur 1 et i. Il faut faire un peu attention en parlant d'applications linéaires : il y a des applications linéaires sur $\mathbf{R}$ (un espace vectoriel réel de dimension 4) et des applications linéaires sur $\mathbf{C}$ (un espace vectoriel complexe de dimension 1).

Les applications $\mathbf{C}$-linéaires sont, en particulier, des applications $\mathbf{R}$-linéaires. Si $a = u + iv$, l'application $z \mapsto az$ s'écrit, en termes réels

$$(x,y) \longmapsto (\text{Ré}(a(x+iy)), \text{Im}(a(x+iy))) = (ux - vy, vx + uy).$$

La matrice de cette application linéaire est donc $\begin{pmatrix} u & -v \\ v & u \end{pmatrix}$. Inversement, on peut caractériser les matrices des applications $\mathbf{C}$-linéaires parmi celles des applications $\mathbf{R}$-linéaires comme les matrices de cette forme.

Fonctions holomorphes et équations de Cauchy-Riemann

Définition 2.1.1. Soit U un ouvert de $\mathbf{C}$. Une fonction $f : U \to \mathbf{C}$ est *dérivable au sens complexe* en $z \in U$ si la limite

$$f'(z) = \lim_{h \to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}$$

existe. Si cette limite existe pour tout point z de U et si la fonction $f' : U \to \mathbf{C}$ qu'elle définit est *continue* sur U, on dit que f est holomorphe sur U.

La condition d'existence de la limite s'écrit aussi :

$$f(z+h)-f(z) = f'(z)\cdot h + \alpha(h)\,|h| \text{ où } \lim_{h\to 0}\alpha(h) = 0.$$

On remarquera que c'est exactement la définition d'une fonction différentiable : un terme linéaire plus des termes qui tendent vers 0 assez vite… à cela près que le terme linéaire est un terme **C**-linéaire.

Comme on l'a fait ci-dessus pour les applications linéaires, on peut caractériser les fonctions dérivables au sens complexe parmi les fonctions différentiables en un point de $\mathbf{R}^2$. Ecrivons donc $\mathbf{C} = \mathbf{R}^2$ et rappelons ce qu'est une fonction différentiable, au sens usuel, de U dans $\mathbf{C}$:

$$f(x+k,y+\ell)-f(x,y) = a\cdot k + b\cdot \ell + \beta(k,\ell)\sqrt{k^2+\ell^2} \text{ avec } \lim_{(k,\ell)\to 0}\beta(k,\ell) = 0.$$

Ici a et b sont des nombres complexes, $a = \partial f/\partial x(x,y)$, $b = \partial f/\partial y(x,y)$ parce que f est à valeurs dans **C**, mais l'application linéaire

$$(k,\ell) \longmapsto (a\cdot k, b\cdot \ell)$$

est **R**-linéaire. L'application f sera dérivable au sens complexe si elle est différentiable et si

$$\frac{\partial f}{\partial x}k + \frac{\partial f}{\partial y}\ell = f'(z)(k+i\ell).$$

Ceci peut s'écrire

$$f'(z) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y), \quad if'(z) = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$$

ou, de façon équivalente

$$\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$

On peut aussi considérer que l'espace d'arrivée de f est $\mathbf{R}^2$ plutôt que **C**, c'est-à-dire écrire $f(x,y) = P(x,y)+iQ(x,y)$ où P et Q sont des fonctions de $\mathbf{R}^2$ dans **R**. Alors

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial x} + i\frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial P}{\partial y} + i\frac{\partial Q}{\partial y}.$$

L'équation ci-dessus devient

$$\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial y} + i\left(\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial y}\right) = 0.$$

Cette équation est en fait composée de deux équations réelles, les célèbres équations de Cauchy-Riemann :

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y}, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{\partial P}{\partial y}.$$

En conclusion :

Proposition 2.1.2. *Pour que $f : U \to \mathbf{C}$ soit dérivable au sens complexe en un point, il faut et il suffit qu'elle y soit différentiable comme fonction de deux variables réelles et que ses dérivées partielles en ce point vérifient les équations de Cauchy-Riemann.* □

Propriétés des fonctions holomorphes. On démontre facilement :

Proposition 2.1.3. *Si U est un ouvert de $\mathbf{C}$, l'ensemble des fonctions holomorphes sur U est une algèbre sur $\mathbf{C}$. De plus, si $\lambda \in \mathbf{C}$ et si f et g sont holomorphes sur U,*

(1) $(\lambda f)' = \lambda f'$,

(2) $(f+g)' = f' + g'$,

(3) $(fg)' = f'g + fg'$.

(4) *Si de plus f ne s'annule pas sur U, $1/f$ est holomorphe sur U et*

$$\left(\frac{1}{f}\right)' = -\frac{f'}{f^2}.$$

Si f est holomorphe sur U et si g est holomorphe sur un ouvert U' et prend ses valeurs dans U, alors $f \circ g$ est holomorphe sur U' et

$$(f \circ g)' = (f' \circ g) \cdot g'. \qquad \square$$

Remarque 2.1.4. La composée de deux fonctions holomorphes est une fonction holomorphe, affirme l'énoncé précédent. On sait que la composée de deux applications de classe $\mathcal{C}^1$ est une application de classe $\mathcal{C}^1$. On utilisera en particulier le cas où f est holomorphe sur U et où g est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ d'un ouvert I de $\mathbf{R}$ dans U. Alors, $f \circ g$ est $\mathcal{C}^1$ sur I et sa dérivée (comme fonction de variable réelle) s'exprime par la formule

$$(f \circ g)' = (f' \circ g) \cdot g'.$$

Formulation géométrique. Tous les élèves de terminale savent qu'une application $\mathbf{C}$-linéaire de $\mathbf{C}$ dans lui-même ($z \mapsto az$) est une similitude (si elle n'est pas nulle). Ceci se traduit ici par « les fonctions holomorphes conservent les angles ». Précisons le sens de cette phrase. On suppose que γ_1 et γ_2 sont deux courbes de classe $\mathcal{C}^1$ dessinées dans un ouvert U de $\mathbf{C}$ qui se coupent en un point z_0 de U :

$$\begin{array}{ccc} [0,1] & \xrightarrow{\gamma_1} & U \\ t & \longmapsto & \gamma_1(t) \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} [0,1] & \xrightarrow{\gamma_2} & U \\ t & \longmapsto & \gamma_2(t) \end{array} \quad \text{avec } \gamma_1(t_0) = \gamma_2(t_0) = z_0.$$

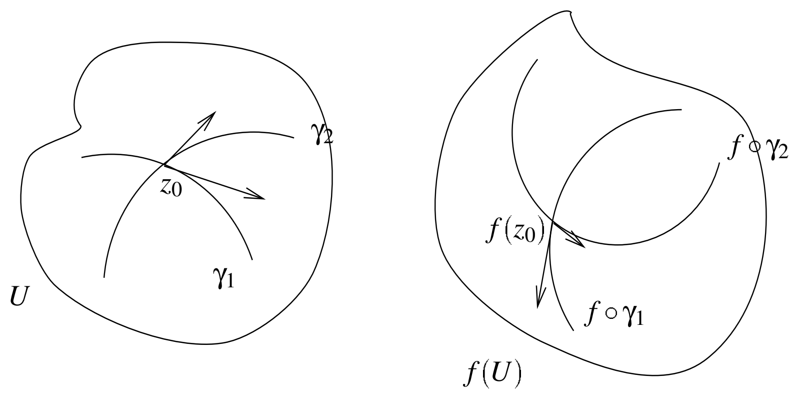

Figure 1

On suppose aussi qu'elles ont un vecteur tangent en z_0, c'est-à-dire qu'on a

$$\frac{d\gamma_1}{dt}(t_0) \neq 0 \text{ et } \frac{d\gamma_2}{dt}(t_0) \neq 0.$$

On regarde maintenant leurs images par une fonction holomorphe $f : U \to \mathbf{C}$, les deux courbes $f \circ \gamma_1$ et $f \circ \gamma_2$ dessinées dans $f(U)$. Elles se coupent en $f(z_0)$. Leurs vecteurs tangents en ce point vérifient l'égalité

$$\frac{d}{dt}(f \circ \gamma_1)(t_0) = (f' \circ \gamma_1)(t_0) \cdot \left(\frac{d\gamma_1}{dt}\right)(t_0).$$

On a bien sûr

$$(f' \circ \gamma_1)(t_0) = f'(z_0).$$

On voit ainsi que le vecteur tangent à la courbe $f \circ \gamma_1$ est l'image par l'application linéaire « multiplication par $f'(z_0)$ » du vecteur tangent à γ_1. De même pour le vecteur tangent à $f \circ \gamma_2$. Si on suppose que $f'(z_0)$ n'est pas nul, cette application linéaire est une similitude et donc l'angle des courbes images $f \circ \gamma_1$ et $f \circ \gamma_2$ est le même que celui des courbes originelles.

Exemple 2.1.5. Les droites parallèles à l'axe des x sont orthogonales aux droites parallèles à l'axe des y. L'exponentielle envoie l'une de ces familles de droites sur la famille des cercles centrés en 0 et l'autre sur la famille des demi-droites issues de l'origine (figure 3 du chapitre 1). Chacune des demi-droites est bien orthogonale à chacun des cercles. Voir aussi l'exercice 2.4.11… et revoir l'exercice 1.5.14.

Holomorphie des fonctions analytiques. La proposition 1.3.1 affirme que les séries entières sont dérivables au sens complexe. On en déduit que les fonctions analytiques sont holomorphes. La réciproque est plus étonnante. C'est elle qu'on démontre dans le paragraphe suivant.

2.2. Analyticité des fonctions holomorphes

Il est remarquable que la dérivabilité au sens complexe implique l'analyticité, c'est-à-dire une propriété encore plus forte que la dérivabilité de tous ordres.

Théorème 2.2.1 **(Cauchy).** *Soit f une fonction holomorphe sur le disque ouvert de centre z_0 et de rayon ρ. Alors*

– *le nombre*

$$a_n = \frac{1}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} f(re^{it} + z_0) e^{-int} dt$$

ne dépend pas *du choix de $r < \rho$,*

– *la série entière $\sum a_n z^n$ a un rayon de convergence au moins égal à ρ*

– *et on a l'égalité*

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n (z - z_0)^n \text{ pour } |z - z_0| < \rho.$$

Démonstration. On commence par faire un changement de variable pour se ramener au cas où $z_0 = 0$, ce qu'on suppose désormais.

Soit z un point du disque ouvert de rayon ρ et soit r tel que $|z| < r < \rho$. Considérons la fonction $g : [0, 1] \to \mathbf{C}$ définie par

$$g(\lambda) = \int_0^{2\pi} \frac{f[(1-\lambda)z + \lambda re^{it}] - f(z)}{re^{it} - z} re^{it} dt.$$

La fonction de (λ, t) figurant dans l'intégrale est continue et différentiable (z est fixé et le dénominateur ne s'annule pas) donc g est continue, dérivable et sa dérivée est donnée par

$$g'(\lambda) = \int_0^{2\pi} f'[(1-\lambda)z + \lambda re^{it}] re^{it} dt.$$

Mais l'expression figurant dans cette dernière intégrale est nulle : c'est la dérivée par rapport à t de

$$F(t) = \frac{1}{\lambda i} f[(1-\lambda)z + \lambda re^{it}],$$

qui est périodique de période 2π. Ainsi, pour $\lambda \neq 0$,

$$g'(\lambda) = F(2\pi) - F(0) = 0.$$

Comme sa dérivée est identiquement nulle sur $]0,1]$, g est constante sur $[0,1]$. Comme $g(0) = 0$, la constante est nulle. En particulier $g(1) = 0$, ce qui s'écrit

$$\int_0^{2\pi} \frac{f(re^{it}) - f(z)}{re^{it} - z} re^{it} dt = 0$$

ou encore

$$f(z) \int_0^{2\pi} \frac{re^{it}}{re^{it} - z} dt = \int_0^{2\pi} \frac{re^{it}}{re^{it} - z} f(re^{it}) dt.$$

Rappelons-nous maintenant que $r > |z|$ donc

$$\frac{re^{it}}{re^{it} - z} = 1 + \frac{z}{re^{it}} + \cdots + \left(\frac{z}{re^{it}}\right)^n + \cdots$$

et cette série converge normalement pour tout $t \in \mathbf{R}$. On peut l'intégrer terme à terme, ce qui donne

$$\int_0^{2\pi} \frac{re^{it}}{re^{it} - z} dt = 2\pi.$$

Enfin, la fonction de variable réelle $f(re^{it})$ est bornée, donc on peut aussi intégrer terme à terme son produit avec le développement en série ci-dessus. On obtient ainsi l'égalité

$$2\pi f(z) = \int_0^{2\pi} \frac{re^{it}}{re^{it} - z} f(re^{it}) dt = \sum_{n \geq 0} z^n \int_0^{2\pi} \frac{f(re^{it})}{r^n e^{int}} dt$$

soit, avec les notations de l'énoncé :

$$f(z) = \sum a_n z^n.$$

Ceci étant dit, la démonstration est terminée : le fait que a_n ne dépend pas de r est conséquence de l'unicité du développement en série entière. □

La démonstration précédente contient un résultat utile :

Corollaire 2.2.2 **(Formule de Cauchy)**

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{re^{it}}{re^{it} - z} f(re^{it}) dt.$$

Un autre résultat remarquable contenu dans le théorème de Cauchy (théorème 2.2.1) est le suivant :

Corollaire 2.2.3. *Soit f une fonction holomorphe sur un ouvert U de $\mathbf{C}$ et soit z_0 un point de U. La fonction f est somme de sa série de Taylor en z_0 sur tous les disques de centre z_0 contenus dans U.*

Les inégalités de Cauchy. Le théorème précédent, qui calculait les coefficients de la série de Taylor de la fonction holomorphe f, permet donc d'exprimer les dérivées successives de f en z_0 par les intégrales

$$\frac{1}{n!}f^{(n)}(z_0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{f(re^{it}+z_0)}{r^n e^{int}}dt.$$

On en déduit par une simple majoration :

Proposition 2.2.4 **(Inégalités de Cauchy).** *Soit f une fonction holomorphe sur un ouvert U de $\mathbf{C}$. Soit $z_0\in U$ et soit $r>0$ tel que le disque fermé de centre z_0 et de rayon r soit contenu dans U. Pour tout entier n, on a l'inégalité*

$$\left|\frac{1}{n!}f^{(n)}(z_0)\right|\leq r^{-n}\sup_{t\in[0,2\pi]}\left|f(z_0+re^{it})\right|.$$

Démonstration. Utilisons les notations du théorème précédent. Il faut majorer les $|a_n|$. Mais

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\left|\int_0^{2\pi}\frac{f(re^{it}+z_0)}{r^n e^{int}}dt\right| &\leq r^{-n}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\frac{f(re^{it}+z_0)}{e^{int}}\right|dt\\ &\leq r^{-n}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|f(re^{it}+z_0)\right|dt\\ &\leq r^{-n}\sup_{t\in[0,2\pi]}\left|f(re^{it}+z_0)\right|.\end{aligned}$$

□

On peut démontrer un résultat un peu plus précis :

Proposition 2.2.5. *Soit f une fonction holomorphe sur un ouvert U de $\mathbf{C}$. Soit z_0 un point de U et soit $r>0$ tel que le disque fermé de centre z_0 et de rayon r soit contenu dans U. Alors on a*

$$\sum_{n\geq 0}\left|\frac{1}{n!}f^{(n)}(z_0)\right|^2 r^{2n}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|f(z_0+re^{it})\right|^2 dt.$$

Remarque 2.2.6. Comme

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|f(z_0+re^{it})\right|^2 dt\leq\sup_{t\in[0,2\pi]}\left|f(z_0+re^{it})\right|^2,$$

cette égalité implique les inégalités de Cauchy.

Démonstration. Il s'agit d'une simple application de la formule de Parseval à la série

$$f(z_0+re^{it})=\sum_{n\geq 0}\frac{1}{n!}f^{(n)}(z_0)r^n e^{int}$$

(qui converge uniformément en t). Pour ceux qui ignoreraient cette formule, voici une démonstration (équivalente !).

Comme U est ouvert, on peut inclure le disque fermé dans un disque ouvert de rayon $\rho>r$ qui soit encore contenu dans U. D'après le théorème de Cauchy (théorème 2.2.1), la série de Taylor de f a un rayon de convergence au moins égal à ρ et converge uniformément sur le disque fermé de centre z_0 et de rayon r. On peut donc écrire

$$f(z_0+re^{it})=\sum_{n\geq 0}\frac{1}{n!}f^{(n)}(z_0)r^n e^{int}.$$

On calcule ensuite

$$\begin{aligned}\left|f(z_0+re^{it})\right|^2 &= \left(\sum_{n\geq 0}\frac{1}{n!}f^{(n)}(z_0)r^n e^{int}\right)\left(\sum_{m\geq 0}\frac{1}{m!}\overline{f^{(m)}(z_0)}r^m e^{-imt}\right)\\ &= \sum_{n,m\geq 0}\frac{1}{n!m!}f^{(n)}(z_0)\overline{f^{(m)}(z_0)}r^{n+m}e^{i(n-m)t}.\end{aligned}$$

Si on intègre les deux membres sur $[0,2\pi]$ en remarquant que

$$\int_0^{2\pi} e^{i(n-m)t}dt = \begin{cases} \int_0^{2\pi} dt = 2\pi & \text{si } n=m \\ \frac{1}{i(n-m)}\left[e^{i(n-m)t}\right]_0^{2\pi} = 0 & \text{par périodicité si } n\neq m\end{cases}$$

on obtient

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|f(z_0+re^{it})\right|^2 dt = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{n!}r^n\right)^2\left|f^{(n)}(z_0)\right|^2 = \sum_{n=0}^{+\infty}\left|\frac{1}{n!}f^{(n)}(z_0)\right|^2 r^{2n}. \qquad \square$$

2.3. Les grands théorèmes sur les fonctions holomorphes

Le théorème de Liouville. En plus d'être un résultat remarquable et intéressant en lui-même, le théorème de Cauchy (théorème 2.2.1) a de nombreuses conséquences spectaculaires.

On appelle les fonctions holomorphes sur **C** tout entier (comme les polynômes, l'exponentielle, *etc.*) des fonctions *entières*.

Théorème 2.3.1. *Toute fonction entière et bornée est constante.*

Démonstration. C'est une application simple des inégalités de Cauchy (proposition 2.2.4). Supposons que la fonction f soit entière et bornée. Soit M un majorant de $|f|$. D'après les inégalités de Cauchy (en $z_0=0$)

$$\left|\frac{1}{n!}f^{(n)}(0)\right| \leq Mr^{-n} \text{ pour } \textit{tout } r$$

donc $f^{(n)}(0)=0$ pour tout $n\geq 1$ et le développement de Taylor de f en 0 est réduit à son terme constant. Comme f est holomorphe, elle est somme de sa série de Taylor en 0 sur un voisinage de 0, donc constante au voisinage de 0. Le principe du prolongement analytique (théorème 1.2.4) dit alors que f est constante sur **C**. $\square$

Le corollaire le plus célèbre est le soi-disant « théorème fondamental de l'algèbre », qui dit que **C** est un corps algébriquement clos, c'est-à-dire que les polynômes irréductibles sur **C** sont les polynômes de degré 1 :

Corollaire 2.3.2* (Théorème de d'Alembert-Gauss).** *Soit $P\in \mathbf{C}[X]$ un polynôme. Si P n'a pas de racine dans* **C, alors il est constant.*

Démonstration. Supposons que P soit un polynôme sans racine. Alors $1/P$ est une fonction entière. Montrons qu'elle est bornée. Si n est le degré de P, on a

$$P(z) = z^n\left(a_n + \frac{a_{n-1}}{z}+\cdots+\frac{a_0}{z^n}\right)$$

avec $a_n\neq 0$, donc $\lim_{|z|\to+\infty}|P(z)|=+\infty$. On peut donc trouver un disque fermé D tel que

– en dehors de D, la fonction $1/|P|$ est bornée (parce que $|P|$ tend vers $+\infty$)
– dans D, elle est bornée aussi (parce qu'elle est continue et D compact).

Comme $1/P$ est entière et bornée, elle est constante, ainsi P est constant et donc de degré 0. $\square$

On trouvera une autre démonstration (peut-être moins mystérieuse) de ce théorème dans les exercices du chapitre 3.

Le principe du maximum. Il s'agit du résultat remarquable suivant :

***Théorème 2.3.3* (Principe du module maximum).** *Soit f une fonction holomorphe sur un ouvert connexe U de $\mathbf{C}$. Si $|f|$ admet un maximum local en $z_0 \in U$, alors f est constante.*

Démonstration. On applique l'inégalité de Cauchy correspondant à $n = 0$. On a donc :

$$|f(z)| \leq \sup_{t\in[0,2\pi]} \left|f(z+re^{it})\right|$$

pour tout z dans U et tout $r > 0$ tel que le disque fermé de centre z et de rayon r soit contenu dans U.

Supposons maintenant que $|f|$ admette un maximum local en z_0. On aura $|f(z_0)| \geq |f(z)|$ pour tout z dans un voisinage de z_0 et en particulier sur un disque fermé de centre z_0 et de rayon suffisamment petit. Sur un tel disque, l'inégalité de Cauchy ci-dessus est donc forcément une égalité.

Examinons le cas d'égalité :

$$|f(z_0)| = \sup_{t\in[0,2\pi]} \left|f(z_0+re^{it})\right|.$$

Le raffinement des inégalités de Cauchy exprimé par la proposition 2.2.5 implique que toutes les dérivées successives de f en z_0 sont nulles. Donc f, qui est somme de sa série de Taylor en z_0 au voisinage de z_0 est constante au voisiange de z_0 et donc (principe du prolongement analytique 1.2.4), elle est constante sur l'ouvert connexe U. □

Le principe du maximum oblige le module d'une fonction holomorphe non constante à ne pas avoir de maximum local sur un ouvert connexe. Mais une fonction holomorphe est continue, et, pour peu qu'elle soit définie un peu au-delà de l'ouvert considéré et que celui-ci soit borné, son module va avoir un maximum sur l'adhérence. Ce maximum va donc forcément être atteint sur le bord. Ce qu'affirme en termes plus précis le corollaire suivant.

***Corollaire 2.3.4* (Principe du module maximum, deuxième version)**
Soit U un ouvert connexe et borné dans $\mathbf{C}$. Soit f une fonction définie et continue sur l'adhérence $\overline{U}$ de U et holomorphe sur U. Soit M le maximum de $|f|$ sur la frontière de U. Alors on a
- *$|f(z)| \leq M$ pour tout $z \in U$*
- *si $|f(z_0)| = M$ pour un $z_0 \in U$, f est constante sur U.*

Démonstration. La frontière de U est une partie compacte de $\mathbf{C}$, ce qui fait que la fonction continue $|f|$ y a un maximum. D'où l'existence de M. Appelons M' le maximum de $|f|$ sur $\overline{U}$, qui existe pour la même raison.
- Si un des points z_0 où le maximum est atteint est dans l'ouvert U, f est constante sur U d'après la première version du principe du maximum (théorème 2.3.3), donc $f(z) = f(z_0)$ pour tout z de U. Comme f est continue sur $\overline{U}$, on a aussi $f(z) = f(z_0)$ pour tout z de $\overline{U}$ et en particulier les deux assertions de l'énoncé.
- Si aucun des points où le maximum est atteint n'est dans U, appelons z_0 un de ces points ($z_0 \in \overline{U} - U$). On a, pour tout z dans U,

$$|f(z)| < |f(z_0)|.$$

On a évidemment $M \leq M'$ en général, mais ici $|f(z_0)| = M' = M$. En particulier

$$|f(z)| \leq |f(z_0)| = M \text{ pour tout } z \in U,$$

ce qui est la première assertion à démontrer. De plus $|f(z)| \neq M$ pour tout z dans U donc la deuxième est automatique. □

2.4. Exercices

2.4.1. Soit f une fonction holomorphe sur un ouvert connexe U de $\mathbf{C}$.

(1) On suppose que f' est identiquement nulle sur $\mathbf{C}$. Que peut-on dire de f ?

(2) On suppose qu'en tout point z de U, on a $f(z) = 0$ ou $f'(z) = 0$. Que peut-on dire de f ?

2.4.2. On définit les « opérateurs différentiels » (s'appliquant à des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{C}$)

$$\partial = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right) \text{ et } \overline{\partial} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right).$$

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ définie sur un ouvert $U \subset \mathbf{C} = \mathbf{R}^2$ et à valeurs dans $\mathbf{C}$. Montrer que f est holomorphe en $z_0 \in U$ si et seulement si $\left(\overline{\partial} f\right)(z_0) = 0$. Que vaut $(\partial f)(z_0)$ dans ce cas ?

2.4.3. Parmi les fonctions suivantes de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{C}$, lesquelles sont dérivables au sens complexe ?

(1) $x^4y^5 + ixy^3$,

(2) $y^2 \sin x + iy$,

(3) $\sin^2(x+y) + i\cos^2(x+y)$,

(4) $-6(\cos x + i \sin y) + (2-2i)y^3 + 15(y^2 + 2y)$.

2.4.4. Quelles sont toutes les fonctions holomorphes sur $\mathbf{C}$ dont la partie réelle est la fonction

$$z = x + iy \longmapsto 2xy?$$

2.4.5. Construire une fonction $f : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$, polynomiale en x et y, telle que l'ensemble des z en lesquels f est dérivable au sens complexe soit la réunion

$$\{0\} \cup \{z \mid |z| = 1\}$$

et telle que $f'(0) = 0$.

2.4.6. Pour chacune des fonctions $u : \mathbf{C} \to \mathbf{R}$ suivantes, trouver une fonction $v : \mathbf{C} \to \mathbf{R}$ telle que $u + iv$ soit holomorphe.

(1) $u(x+iy) = 2x^3 - 6xy^2 + x^2 - y^2 - y$,

(2) $u(x+iy) = x^2 - y^2 + e^{-y}\sin x - e^{-y}\cos x$.

2.4.7. Soit f une fonction holomorphe sur un ouvert connexe U de $\mathbf{C}$. On suppose que la partie réelle de f est constante. Montrer que f est constante.

2.4.8. La fonction f définie sur $\mathbf{C} - \{0\}$ par $f(z) = \dfrac{1}{\overline{z}}$ est-elle holomorphe ? Quelle est sa différentielle ? Montrer que f conserve les angles non orientés.

2.4.9. Montrer que $z \mapsto |z|^2$ n'est pas holomorphe, de même que $\mathrm{Ré}\, z$, $\mathrm{Im}\, z$.

2.4.10. Est-ce qu'une fonction holomorphe sur un ouvert non vide U de $\mathbf{C}$ peut ne prendre que des valeurs réelles ? Est-ce que son image peut être contenue dans une droite (réelle, c'est-à-dire d'équation $y = ax + b$, $a, b \in \mathbf{R}$) ?

2.4.11. Dessiner les images des droites parallèles aux axes par la fonction $z \mapsto z^2$.

2.4.12. Dessiner les images des cercles centrés en 0 et des demi-droites (ouvertes) issues de l'origine par

$$z \longmapsto \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right).$$

2.4.13. Montrer que la fonction $f(z) = \dfrac{1}{1-z-z^2}$ est holomorphe au voisinage de 0. Soit $f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$ son développement en série entière en 0. Montrer que les coefficients a_n vérifient

$$a_0 = a_1 = 1 \text{ et } a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \text{ pour } n \geq 2.$$

Quel est le rayon de convergence de cette série entière ?

2.4.14. Soit f une fonction entière qui tend vers l'infini quand z tend vers l'infini. Montrer que f s'annule en un nombre fini de points $\alpha_1, \ldots, \alpha_N$. Considérer

$$g(z) = \frac{f(z)}{(z-\alpha_1)\cdots(z-\alpha_N)}$$

et montrer que f est un polynôme.

2.4.15. Soient f et g deux fonctions entières. On suppose que

$$|f(z)| \leq |g(z)| \text{ pour tout } z.$$

Quelle conclusion peut-on en tirer ?

2.4.16. On donne deux nombres positifs A et α. Déterminer toutes les fonctions entières qui vérifient

$$|f(z)| \leq A \exp(\alpha \text{Ré}(z))$$

pour tout z de module assez grand.

2.4.17. Soit f une fonction entière. On suppose qu'il existe des réels positifs A, B et a tels que

$$|f(z)| \leq A + B|z|^a$$

pour tout z de module assez grand. Montrer que f est un polynôme.

2.4.18. Trouver toutes les fonctions entières f vérifiant

$$|f(z)| = |z|^2.$$

2.4.19. Soit c un nombre réel strictement positif. Existe-t-il une fonction f holomorphe sur un ouvert U contenant 0 telle que

$$|f(z)| = |z|^2 + c?$$

2.4.20. Soit f une fonction entière *non* bornée. On veut montrer que son image est dense dans $\mathbf{C}$. On suppose au contraire qu'il existe un disque ouvert centré en w_0 qui ne rencontre pas $f(\mathbf{C})$. Que peut-on dire de la fonction $1/(f(z) - w_0)$? Conclure.

2.4.21. Le lemme de Schwarz. On appelle D le disque unité ouvert. Soit f une fonction holomorphe sur D. On suppose que $f(0) = 0$ et que $|f(z)| < 1$ pour tout z dans D (f envoie D dans lui-même et fixe 0).

Montrer que $z \mapsto f(z)/z$ définit une fonction holomorphe sur D. Soit $r \in]0,1[$. Montrer que

$$\left|\frac{f(z)}{z}\right| < \frac{1}{r} \text{ pour } |z| \leq r.$$

En déduire que

$$|f(z)| \leq |z| \text{ pour tout } z \text{ dans } D.$$

Supposons maintenant qu'il existe un z_0 non nul tel que $|f(z_0)| = |z_0|$. Montrer qu'il existe un nombre complexe λ de module 1 tel que $f(z) = \lambda z$ pour tout $z \in D$.

2.4.22. Soit f une fonction continue sur le disque fermé de centre 0 et de rayon 1, analytique sur le disque ouvert et nulle sur le demi-cercle

$$\{z \in \mathbf{C} \mid |z| = 1, \mathrm{Im}(z) \geq 0\}.$$

Montrer que f est nulle (on pourra considérer $z \mapsto f(z)f(-z)$).

2.4.23. Automorphismes du disque unité. On utilise les notations (et le résultat) de l'exercice 2.4.21. On appelle *automorphisme* de D une bijection holomorphe dant l'application réciproque est holomorphe. Le but de cet exercice est de déterminer tous les automorphismes du disque D.

(1) Déterminer les automorphismes de D qui fixent 0.

(2) Soient $a, b \in \mathbf{C}$ tels que $|a|^2 - |b|^2 = 1$. Montrer que $f_{a,b}$, définie par

$$f_{a,b}(z) = \frac{az+b}{\overline{b}z+\overline{a}},$$

est un automorphisme de D.

(3) Montrer que, pour tout $w \in D$, il existe des nombres complexes a et b tels que

$$|a|^2 - |b|^2 = 1 \text{ et } f_{a,b}(w) = 0.$$

(4) Déterminer tous les automorphismes de D.

2.4.24. Soit H le demi-plan des nombres complexes de partie imaginaire strictement positive et soit $f : \overline{H} \to \mathbf{C}$ une fonction continue, bornée, et dont la restriction à H est holomorphe. On suppose de plus que $|f(z)| \leq 1$ quand z est réel. On veut montrer que la même inégalité est vraie pour tous les éléments de H.

(1) Soit t un réel strictement positif. On considère la fonction g définie par

$$g(z) = \frac{f(z)}{i+tz}.$$

Montrer qu'elle est continue sur $\overline{H}$ et holomorphe sur H.

(2) Montrer que $|g(z)| \leq 1$ pour z réel et que $\lim_{|z|\to+\infty} |g(z)| = 0$.

(3) Montrer que $|g(z)| \leq 1$ pour tout z dans H. En déduire que $|f(z)| \leq 1$ pour tout z dans H.

(4) L'hypothèse que f est bornée est-elle vraiment nécessaire ?

2.4.25. Théorème de l'application ouverte.

(1) Montrer que si f est une fonction analytique sur un ouvert U de $\mathbf{C}$ alors f définit une application ouverte $U \to \mathbf{C}$ (*i.e.* l'image par f de tout ouvert de U est un ouvert de $\mathbf{C}$). En particulier, $f(U)$ est un ouvert de $\mathbf{C}$. Pour cela, montrer que pour tout $z_0 \in U$ il existe un disque ouvert de centre z_0 sur lequel on a
$$f(z) = f(z_0) + \varphi(z)^m$$
où m est un entier et φ une fonction holomorphe telle que $\varphi'(z_0) \neq 0$.

(2) On suppose de plus que f est injective, donc induit une bijection $U \to f(U)$. Montrer qu'alors sa dérivée f' ne s'annule en aucun point de U et que la bijection réciproque de f est holomorphe.

CHAPITRE 3

INTÉGRALES CURVILIGNES, PRIMITIVES

On s'intéresse maintenant au problème des *primitives* des fonctions holomorphes. Il devrait déjà être clair que ce n'est pas un problème facile : la fonction $z \mapsto 1/z$ est holomorphe sur $\mathbf{C} - \{0\}$ mais on a bien compris qu'elle ne possédait pas de primitive sur cet ouvert (voir la discussion page 10 et suivantes).

Dans le cas où f est une fonction réelle de variable réelle (disons, continue), pour trouver une primitive de f, on fixe un x_0 et on définit

$$F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)dt.$$

On peut essayer une tactique analogue dans le cas complexe : on fixe $z_0 \in U$, on choisit un chemin γ de z_0 à z et on calcule

$$F(z) = \int_{\gamma} f(w)dw$$

… tout irait bien si cette intégrale ne dépendait pas du choix du chemin γ utilisé. Il n'en est, hélas, rien. Mais la considération de ces intégrales « curvilignes » est riche de conséquences, on va le voir dans ce chapitre et le suivant.

3.1. Intégration le long des chemins

On appellera *chemin* une application continue $\gamma : [a,b] \to \mathbf{C}$ définie sur un intervalle fermé de $\mathbf{R}$, de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux et à dérivée bornée. Cette condition signifie qu'il existe des nombres $c_1, \dots, c_k$ tels que $a = c_0 < c_1 < \cdots < c_k < c_{k+1} = b$, que γ soit de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]c_i, c_{i+1}[$ et qu'il existe un réel M tel que $|\gamma'(t)|$ soit majoré par M. En particulier, l'intégrale

$$\int_a^b |\gamma'(t)|\, dt$$

existe. On l'appelle la longueur du chemin γ.

Si le chemin « se referme » (c'est-à-dire si $\gamma(a) = \gamma(b)$) on dit que c'est un *lacet*.

On notera que je désigne ici par « chemins » ou « lacets » des applications, c'est-à-dire des chemins et lacets *paramétrés*.

Exemples 3.1.1

(1) Le cercle de centre z_0 et de rayon r, paramétré par

$$\begin{array}{rcl} C(z_0,r) : [0,2\pi] & \longrightarrow & \mathbf{C} \\ t & \longmapsto & z_0 + re^{it} \end{array}$$

est un lacet. Dans la suite, on utilisera la notation $C(z_0,r)$ pour désigner *ce* paramétrage du cercle.

(2) Si α et β sont deux points fixés dans $\mathbf{C}$, le chemin

$$\begin{array}{rcl} [0,1] & \longrightarrow & \mathbf{C} \\ t & \longmapsto & \alpha + t(\beta - \alpha) \end{array}$$

est un paramétrage du segment $[\alpha, \beta]$.

Si $f : U \to \mathbf{C}$ est une fonction continue et si $\gamma : [a,b] \to U$ est un chemin, on peut intégrer f sur γ. *Par définition,*

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt.$$

J'insiste, je n'ai pas défini d'« intégrale complexe » dans aucun sens, mais simplement remarqué que la fonction

$$t \longmapsto f(\gamma(t))\gamma'(t)$$

étant continue par morceaux sur $[a,b]$, y était intégrable *comme fonction de variable réelle* et j'ai défini l'intégrale de $f(z)dz$ le long du chemin comme l'intégrale de cette fonction de variable réelle.

Exemples 3.1.2

(1) Intégrons par exemple la fonction $z \mapsto f(z)/(z-z_0)^{n+1}$ sur le cercle $C(z_0, r)$. Comme il est paramétré par $C(z_0,r)(t) = z_0 + re^{it}$, on a $C(z_0,r)'(t) = ire^{it}$ et

$$\int_{C(z_0,r)} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz = \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + re^{it})}{r^{n+1}e^{i(n+1)t}} ire^{it} dt = i \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + re^{it})}{r^n e^{int}} dt.$$

Ce nombre est, d'après le théorème de Cauchy (théorème 2.2.1), justement $2i\pi a_n$, où a_n est le n-ième coefficient de la série de Taylor de f en z_0.

L'essentiel de ce chapitre vise à généraliser le fait, affirmé par le théorème de Cauchy, que cette intégrale ne dépend pas du rayon r du cercle sur lequel elle est calculée.

(2) Considérons maintenant la fonction $z \mapsto 1/z$. Elle est holomorphe, donc continue sur $\mathbf{C} - \{0\}$. Intégrons-la sur le cercle unité :

$$\begin{aligned} \int_{C(0,1)} \frac{dz}{z} &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{e^{it}} ie^{it} dt \\ &= \int_0^{2\pi} idt \\ &= 2i\pi. \end{aligned}$$

Établissons maintenant une liste de propriétés de ces intégrales. Pour m'excuser d'avoir appelé « chemin » un chemin paramétré plutôt qu'un chemin géométrique, je commence par signaler que l'intégrale, elle, ne dépend que du « chemin géométrique » orienté.

Proposition 3.1.3. *Soit $\varphi : [a', b'] \to [a,b]$ une bijection* croissante *de classe $\mathcal{C}^1$. Alors*

$$\int_{\gamma\circ\varphi} f(z)dz = \int_\gamma f(z)dz.$$

Une bijection croissante et $\mathcal{C}^1$ n'est autre qu'un changement de paramétrage du chemin géométrique γ, la croissance impose que les deux chemins paramétrés soient parcourus dans le même sens. Il s'agit donc bien d'un chemin non paramétré mais orienté.

Démonstration. Le chemin $\delta = \gamma \circ \varphi$ est un chemin $[a', b'] \to U$ et

$$\begin{aligned}\int_{a'}^{b'} f(\delta(t))\delta'(t)dt &= \int_{a'}^{b'} f(\gamma(\varphi(t)))\gamma'(\varphi(t))\varphi'(t)dt \\ &= \int_a^b f(\gamma(u))\gamma'(u)du\end{aligned}$$

en faisant le changement de variable $u = \varphi(t)$. □

On décrit maintenant ce qui se passe pour le même chemin géométrique, mais parcouru dans l'autre sens. Si $\gamma : [a,b] \to U$ est un chemin, soit γ^* le chemin défini par $\gamma^*(t) = \gamma(a+b-t)$.

Proposition 3.1.4

$$\int_{\gamma^*} f(z)dz = -\int_\gamma f(z)dz.$$

Démonstration. Comme pour la proposition précédente, il suffit de faire le changement de variable indiqué (ici $u = a+b-t$) dans l'intégrale :

$$\begin{aligned}\int_{\gamma^*} f(z)dz &= \int_a^b f(\gamma^*(t))(\gamma^*)'(t)dt \\ &= -\int_a^b f(\gamma(a+b-t))\gamma'(a+b-t)dt \\ &= -\int_a^b f(\gamma(u))\gamma'(u)du.\end{aligned}$$

□

On peut aussi « composer » les chemins, comme sur la figure 1, c'est-à-dire suivre γ_1 puis γ_2 (si l'extrémité de γ_1 coïncide avec l'origine de γ_2).

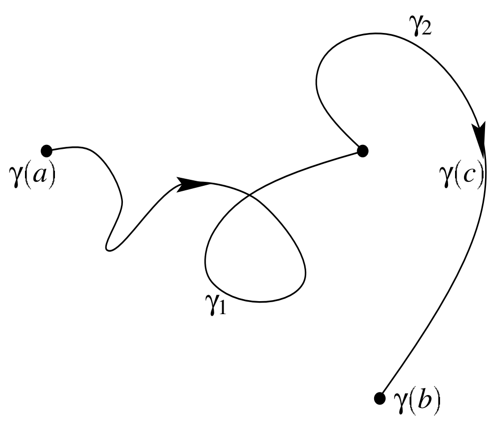

Figure 1

Proposition 3.1.5. *Soient $\gamma : [a,b] \to U$ un chemin, $c \in]a,b[$ et soient $\gamma_1 = \gamma|_{[a,c]}$, $\gamma_2 = \gamma|_{[c,b]}$. Alors*

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz + \int_{\gamma_2} f(z)dz.$$

C'est évident. □

Remarquons maintenant que

$$\begin{aligned}\left|\int_\gamma f(z)dz\right| &\leq \int_a^b |f\circ\gamma(t)|\,|\gamma'(t)|\,dt\\ &\leq \sup_{t\in[a,b]}|f\circ\gamma(t)|\int_a^b|\gamma'(t)|\,dt,\end{aligned}$$

la dermière intégrale n'étant autre que la longueur du chemin (géométrique) γ.

On en déduit :

Proposition 3.1.6. *Si $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite de fonctions continues $U\to\mathbf{C}$ convergeant uniformément vers une fonction f sur les compacts de U, alors*

$$\lim_{n\to+\infty}\int_\gamma f_n(z)dz = \int_\gamma f(z)dz.$$

Démonstration. On applique l'inégalité précédente à la fonction $f-f_n$. On en déduit le résultat (dont on remarquera qu'il s'applique aux séries). □

Les fonctions f intégrées jusqu'ici étaient seulement supposées *continues*. Revenons maintenant à nos fonctions favorites et supposons que f est *holomorphe*.

Proposition 3.1.7. *Si $F:U\to\mathbf{C}$ est une fonction holomorphe et si $f=F'$, alors*

$$\int_\gamma f(z)dz = F(\gamma(b))-F(\gamma(a)).$$

Démonstration. La fonction $F\circ\gamma$ est une primitive de la fonction à intégrer $(f\circ\gamma)\cdot\gamma'$. □

Un corollaire immédiat de cette proposition quasi-évidente est très important :

Corollaire 3.1.8. *Si γ est un* lacet *dans U et si f admet une primitive holomorphe sur U, alors l'intégrale de f sur γ est nulle.* □

Exemples 3.1.9

(1) Soit γ le cercle unité. Alors on a

$$\int_\gamma z^m dz = 0 \text{ pour } m\geq 0.$$

En effet $F(z)=z^{m+1}/(m+1)$ est une fonction holomorphe sur $\mathbf{C}$ dont z^m est la dérivée et γ est un lacet.

(2) Sur le même lacet, on a

$$\int_\gamma \frac{dz}{z} = \pm 2i\pi$$

comme on l'a vu en 3.1.2. Il n'existe donc aucun ouvert contenant le cercle unité et sur lequel la fonction $1/z$ possède des primitives. Ceci est cohérent avec ce que nous savons des logarithmes complexes. Voir les pages 10 et suivantes.

3.2. Homotopie des chemins et intégrales de fonctions holomorphes

On va montrer maintenant que l'intégrale d'une fonction holomorphe sur un chemin tracé dans U ne change pas quand on « déforme » ce chemin dans U. Ce sera plus précis dans l'énoncé 3.2.3 ci-dessous.

Avant de pouvoir l'énoncer, il faut définir ce que veut dire « déformer ». Un chemin est paramétré par un segment, deux chemins le sont par deux segments, dans la déformation on considère que ces deux segments sont deux côtés parallèles d'un carré et que la « déformation » est une application définie sur tout le carré (figure 2).

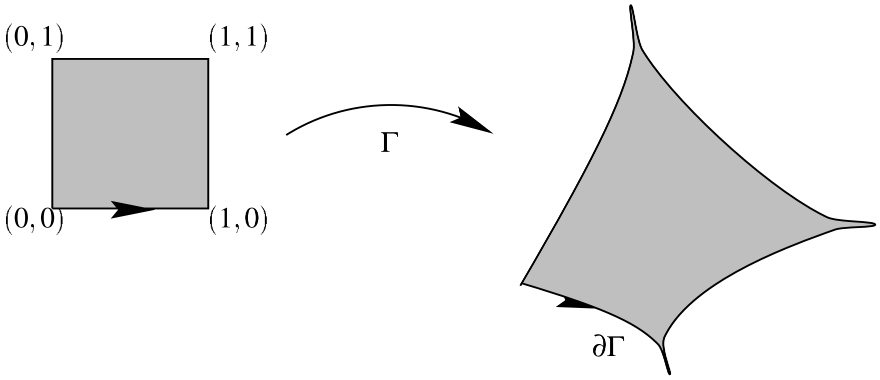

Figure 2

Soit $\Gamma : [0,1]^2 \to \mathbf{C}$ une application de classe $\mathcal{C}^1$ (un « carré »). On va intégrer les fonctions sur le « bord » de ce carré, c'est-à-dire sur un chemin paramétré image par Γ d'un paramétrage du bord de $[0,1]^2$. On peut par exemple paramétrer le bord par

$$\beta : [0,4] \longrightarrow \mathbf{R}^2$$

où β est affine sur chacun des intervalles $[k,k+1]$ ($k = 0,\ldots,3$) et que $\beta(0) = \beta(4) = 0$.

On en déduit par composition un lacet $\mathcal{C}^1$ par morceaux

$$\partial\Gamma = \Gamma \circ \beta : [0,4] \longrightarrow \mathbf{C}$$

qu'on appelle *bord* de Γ et qu'on note $\partial\Gamma$ (voir la figure 2).

Si maintenant f est une fonction définie au voisinage du bord $\Gamma\left([0,1]^2 -]0,1[^2\right)$,

$$\int_{\partial\Gamma} f(z)dz = \int_{\Gamma(\cdot,0)} f(z)dz + \int_{\Gamma(1,\cdot)} f(z)dz - \int_{\Gamma(\cdot,1)} f(z)dz - \int_{\Gamma(0,\cdot)} f(z)dz$$

où $\Gamma(\cdot,0)$ désigne le chemin $t \mapsto \Gamma(t,0)$, *etc.* En effet, $\partial\Gamma$ est obtenu en « composant » les chemins apparaissant dans ces intégrales, les signes sont dus au changement de sens. Cette décomposition est une application directe des propriétés 3.1.3, 3.1.4 et 3.1.5.

Théorème 3.2.1. *Pour toute fonction holomorphe et toute application*

$$\Gamma : [0,1]^2 \longrightarrow U$$

de classe $\mathcal{C}^2$, on a

$$\int_{\partial\Gamma} f(z)dz = 0.$$

Remarques 3.2.2

(1) L'hypothèse sur f est *locale*, c'est-à-dire qu'elle se vérifie en chaque point : on demande qu'elle soit holomorphe. Par contre, la conclusion est *globale*, il s'agit de l'intégrale sur un lacet.

(2) Il est indispensable que tout le carré soit envoyé par Γ dans l'ouvert U. Par exemple, sur le bord du carré
$$-1 \leq \mathrm{Ré}(z) \leq 1, \qquad -1 \leq \mathrm{Im}(z) \leq 1$$
l'intégrale de la fonction $1/z$ n'est pas nulle (exercice). Le carré n'est pas contenu dans $\mathbf{C} - \{0\}$, ouvert où $1/z$ est holomorphe.

(3) Pour pouvoir dire que Γ est de classe $\mathcal{C}^2$, il faut qu'elle soit définie sur un ouvert. On suppose donc ici qu'elle est définie sur un petit voisinage du carré dans $\mathbf{R}^2$. Cette hypothèse (classe $\mathcal{C}^2$) n'est pas indispensable pour obtenir le résultat, mais elle simplifie la démonstration (elle est indispensable dans la démonstration donnée ici) et elle suffit pour toutes les applications.

Démonstration. Si $s \in [0,1]$, on considère le segment $t \mapsto (s,t)$ dans $[0,1]^2$ et le chemin
$$\begin{array}{rcl} \gamma_s : [0,1] & \longrightarrow & U \\ t & \longmapsto & \Gamma(s,t) \end{array}$$
ainsi que
$$\begin{array}{rcl} \delta_s : [0,s] & \longrightarrow & U \\ u & \longmapsto & \Gamma(u,0) \end{array}$$
et
$$\begin{array}{rcl} \delta'_s : [0,s] & \longrightarrow & U \\ u & \longmapsto & \Gamma(u,1) \end{array}$$
(voir la figure 3).

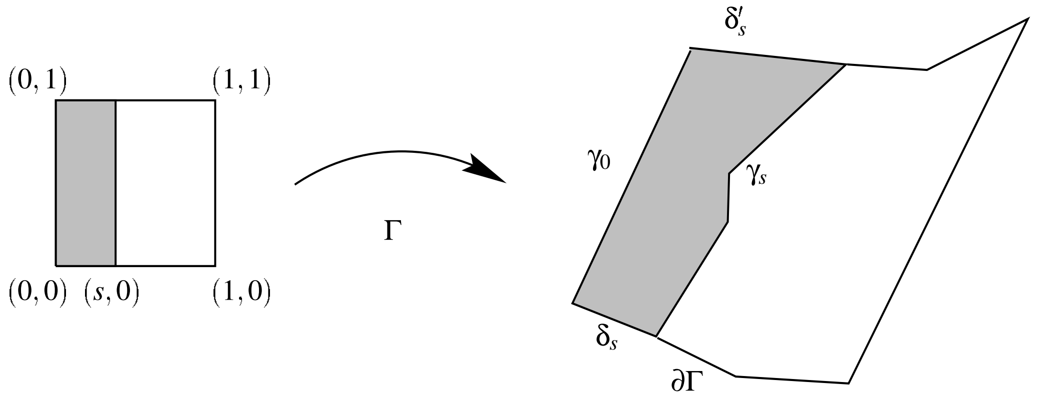

Figure 3

Pour démontrer le théorème (l'intégrale sur le bord de Γ est nulle), on va démontrer que, pour tout s dans $[0,1]$, l'intégrale sur le bord du petit rectangle défini par s (figure 3) est nulle, c'est-à-dire qu'on a
$$\forall s \in [0,1], \quad \underbrace{\int_{\gamma_s} f(z)dz - \int_{\gamma_0} f(z)dz}_{G(s)} = \underbrace{\int_{\delta'_s} f(z)dz - \int_{\delta_s} f(z)dz}_{D(s)}.$$
Le théorème est cette formule pour $s = 1$.

Calculons maintenant les expressions $G(s)$ et $D(s)$ constituant les deux membres de l'égalité espérée :

$$\begin{aligned}G(s) &= \int_{\gamma_s} f(z)dz - \int_{\gamma_0} f(z)dz \\ &= \int_0^1 f(\Gamma(s,t))\frac{\partial}{\partial t}(\Gamma(s,t))\,dt - \int_0^1 f(\Gamma(0,t))\frac{\partial}{\partial t}(\Gamma(0,t))\,dt\end{aligned}$$

et

$$D(s) = \int_0^s f(\Gamma(u,1))\frac{\partial}{\partial u}(\Gamma(u,1))\,du - \int_0^s f(\Gamma(u,0))\frac{\partial}{\partial u}(\Gamma(u,0))\,du.$$

La fonction f est holomorphe et en particulier de classe $\mathcal{C}^1$, l'application Γ est de classe $\mathcal{C}^2$, de sorte que l'application

$$(s,t) \longmapsto f(\Gamma(s,t))\frac{\partial \Gamma}{\partial t}(s,t)$$

est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]^2$. Donc G est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ de la variable $s \in [0,1]$. De plus, pour tout s dans cet intervalle,

$$G'(s) = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial s}\left\{f(\Gamma(s,t))\frac{\partial \Gamma}{\partial t}(s,t)\right\}dt.$$

Pour D, c'est encore plus simple : c'est l'intégrale d'une fonction continue sur $[0,s]$. Donc D est de classe $\mathcal{C}^1$ et, pour tout s dans $[0,1]$, on a

$$D'(s) = f(\Gamma(s,1))\frac{\partial \Gamma}{\partial s}(s,1) - f(\Gamma(s,0))\frac{\partial \Gamma}{\partial s}(s,0).$$

On va donc évaluer $G'(s)$ et montrer que c'est égal à $D'(s)$. La fonction de t à intégrer est

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial s}\left\{f(\Gamma(s,t))\frac{\partial \Gamma}{\partial t}(s,t)\right\} &= f'(\Gamma(s,t))\frac{\partial \Gamma}{\partial s}(s,t)\frac{\partial \Gamma}{\partial t}(s,t) + f(\Gamma(s,t))\frac{\partial^2 \Gamma}{\partial s \partial t}(s,t) \\ &= \frac{\partial}{\partial t}\left\{f(\Gamma(s,t))\frac{\partial \Gamma}{\partial s}(s,t)\right\}.\end{aligned}$$

On a donc

$$G'(s) = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t}\left\{f(\Gamma(s,t))\frac{\partial \Gamma}{\partial s}(s,t)\right\}dt = D'(s).$$

Les fonctions G et D ont la même dérivée, elles diffèrent donc d'une constante. Mais $G(0) = D(0) = 0$ donc $G(s) = D(s)$ pour tout s. □

Corollaire 3.2.3. *Soit f une fonction holomorphe sur un ouvert U de* $\mathbf{C}$ *et soit*

$$\Gamma : [0,1]^2 \longrightarrow \mathbf{C}$$

une application de classe $\mathcal{C}^2$. On suppose que les chemins

$$\gamma_s = \Gamma(s,\cdot) : [0,1] \longrightarrow U$$

vérifient l'une des conditions suivantes

(1) *Pour tout s, γ_s est un* lacet.

(2) *Les extrémités $\gamma_s(0)$ et $\gamma_s(1)$ ne dépendent pas de s.*

Alors

$$\int_{\gamma_1} f(z)dz = \int_{\gamma_0} f(z)dz.$$

Démonstration. Dans le premier cas, on déforme un lacet sur un autre (figure 4), on a $\Gamma(s,0) = \Gamma(s,1)$ pour tout s dans $[0,1]$. Dans le deuxième cas, on déforme un chemin de α à β en un autre chemin de α à β (figure 4) et les deux chemins $t \mapsto \Gamma(t,0)$ et $t \mapsto \Gamma(t,1)$ sont constants. Dans les deux cas,

$$\int_{\Gamma(\cdot,1)} f(z)dz = \int_{\Gamma(\cdot,0)} f(z)dz$$

donc le théorème donne

$$\begin{aligned} 0 = \int_{\partial\Gamma} f(z)dz &= \int_{\Gamma(1,\cdot)} f(z)dz - \int_{\Gamma(0,\cdot)} f(z)dz \\ &= \int_{\gamma_1} f(z)dz - \int_{\gamma_2} f(z)dz. \end{aligned}$$

□

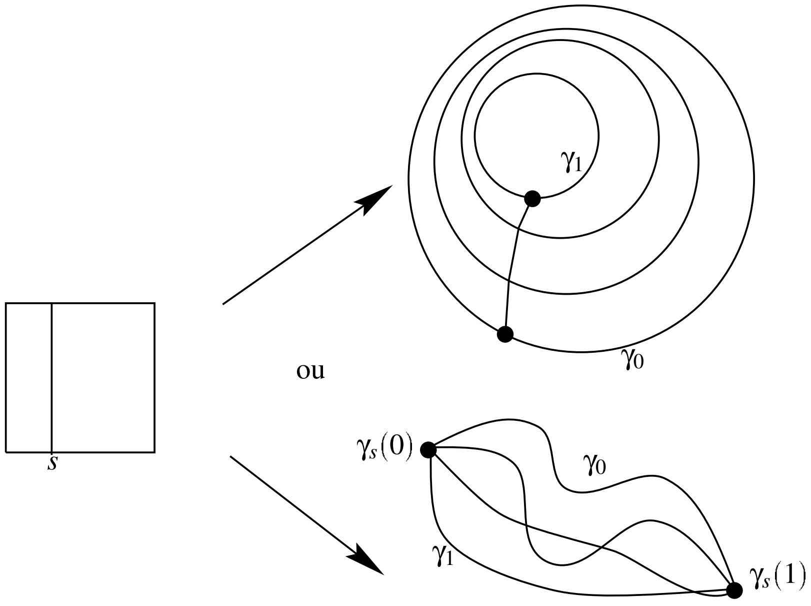

Figure 4 : Homotopies

Sous l'une ou l'autre des hypothèses du corollaire, on appelle *homotopie* de γ_0 à γ_1 une application Γ.

3.3. Problèmes de primitives

Revenons maintenant au problème des primitives. Une conséquence simple du corollaire 3.2.3 est l'illusoire proposition suivante :

Proposition 3.3.1. *S'il existe dans l'ouvert connexe U un point z_0 tel que deux chemins de z_0 à un point z de U soient toujours homotopes, alors toute fonction holomorphe sur U y admet une primitive holomorphe.*

Démonstration. On remarque d'abord (et c'est là qu'on utilise le corollaire 3.2.3) que, si γ est un chemin de z_0 à z,

$$F_\gamma(z) = \int_\gamma f(w)dw$$

ne dépend pas de γ. En effet, si γ_0 et γ_1 sont deux tels chemins, il y a une homotopie de l'un à l'autre par hypothèse et on applique la deuxième assertion de 3.2.3.

Ainsi la formule $F(z) = \int_\gamma f(w)dw$ définit bien une fonction sur U. Si h est un nombre complexe de très petit module, le segment (paramétré) δ joignant z à $z+h$ est contenu dans un petit disque de centre z contenu dans U. On peut calculer $F(z+h)$ en intégrant f le long d'un chemin de z_0 à z suivi de δ. D'après la propriété 3.1.5,

$$F(z+h) - F(z) = \int_\delta f(w)dw$$

ou encore

$$\frac{F(z+h) - F(z)}{h} - f(z) = \int_\delta \frac{f(w) - f(z)}{h} dw.$$

On majore le module de cette expression comme au § 3.1 pour trouver

$$\left| \frac{F(z+h) - F(z)}{h} - f(z) \right| = \left| \int_\delta \frac{f(w) - f(z)}{h} dw \right| \leq \sup_{0 \leq t \leq 1} |f(z+th) - f(z)|$$

puisque $\int_0^1 |\delta'(t)|\, dt = 1$. Ce dernier terme tend vers 0 quand h tend vers 0. Donc F est holomorphe. $\square$

Si j'ai qualifié cet énoncé d'« illusoire », c'est parce que dans la pratique, il est très difficile de démontrer qu'un ouvert vérifie cette hypothèse (il est par contre facile de montrer qu'un ouvert ne la vérifie pas).

Les ouverts étoilés la vérifient, mais je ne vais pas le démontrer. Par contre, l'argument donné dans la démonstration s'applique pour démontrer qu'ils vérifient la conclusion.

Proposition 3.3.2. *Si U est un ouvert de* $\mathbf{C}$ *étoilé par rapport à un de ses points, toute fonction holomorphe sur U y admet une primitive holomorphe.*

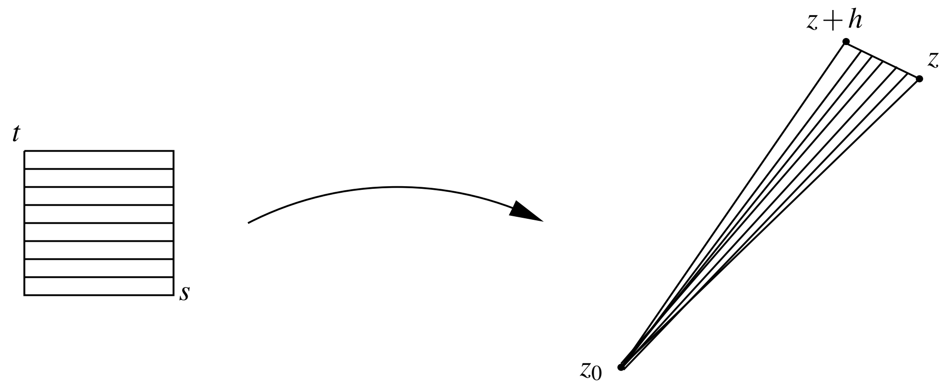

Figure 5

Rappelons qu'un ouvert U est *étoilé* par rapport à un point z_0 si, quand il contient un point z, il contient tous le segment joignant ce point à z_0. Par exemple, les ouverts convexes sont étoilés par rapport à tous leurs points. Il y a bien d'autres exemples (les étoiles notamment) parmi lesquels il faut noter les U_θ, étoilés par rapport aux points de la demi-droite d'argument $\theta + \pi$.

Démonstration de la proposition. On imite la démonstration de la proposition 3.3.1, mais on n'utilise que des segments : on définit $F(z)$ comme l'intégrale de f le long du segment joignant z_0 à z.

On montre que l'on peut aussi calculer $F(z+h)$ en intégrant sur la ligne brisée $z_0, z, z+h$. Si h est assez petit, le triangle est contenu dans U et on écrit explicitement une homotopie

$$\Gamma(s,t) = z_0 + s(z - z_0) + sth$$

(figure 5). La fin de l'argument est identique à celle de 3.3.1 où l'on intégrait, comme ici, sur le segment de z à $z+h$. $\square$

Définition 3.3.3. Un ouvert U de $\mathbf{C}$ est dit *élémentaire* si
- il n'est pas vide,
- il est connexe,
- toute fonction holomorphe $f : U \to \mathbf{C}$ admet une primitive $F : U \to \mathbf{C}$.

Par exemple, les ouverts étoilés sont élémentaires (c'est exactement ce qu'affirme la proposition 3.3.2) mais $\mathbf{C} - \{0\}$ n'est pas élémentaire. La proposition suivante permet de construire d'autres exemples (voir aussi l'exercice 3.5.9).

Proposition 3.3.4. *Soient U et V deux ouverts élémentaires de $\mathbf{C}$. Si $U \cap V$ est non vide* et connexe*, alors $U \cup V$ est un ouvert élémentaire.*

Remarque 3.3.5. L'hypothèse de connexité de l'intersection est indispensable. On s'en convaincra en considérant les ouverts étoilés (et donc élémentaires)

$$U = \mathbf{C} - \{x \in \mathbf{R} \mid x \leq 0\}, \quad V = \mathbf{C} - \{x \in \mathbf{R} \mid x \geq 0\}$$

dont la réunion est $\mathbf{C} - \{0\}$.

Avant de démontrer la proposition, démontrons un lemme.

Lemme 3.3.6. *Soit U un ouvert non vide de $\mathbf{C}$ et soit z_0 un point de U. L'ouvert U est élémentaire si et seulement si toute fonction holomorphe sur U possède une unique primitive sur U qui s'annule en z_0.*

Démonstration. Si l'ouvert U satisfait cette propriété, il n'est pas vide, toute fonction holomorphe y admet une primitive et la connexité est donnée par l'unicité d'une primitive de la fonction nulle qui prend la valeur 0 en z_0.

Réciproquement, si U est élémentaire, soit f une fonction holomorphe sur U. Elle y admet une primitive F. Soit $F_1 = F - F(z_0)$. C'est une primitive de F qui est nulle en z_0. Si F_2 est une autre primitive, $F_2 - F_1$ est localement constante. Comme U est connexe, elle est constante et donc la seule primitive qui s'annule en z_0 est F_1. □

Démonstration de la proposition 3.3.4. Soit z_0 un point de $U \cap V$ et soit f une fonction holomorphe sur $U \cup V$. Elle est holomorphe sur U donc il existe une unique primitive F_1 de la restriction $f|_U$ vérifiant $F_1(z_0) = 0$. De même, il existe une unique primitive F_2 de f sur V telle qu'on ait $F_2(z_0) = 0$.

Maintenant, sur $U \cap V$, on a deux fonctions holomorphes F_1 et F_2 qui ont la même dérivée et qui prennent la même valeur en z_0. Comme $U \cap V$ est connexe, elles sont égales sur $U \cap V$. Alors la fonction définie par

$$F(z) = \begin{cases} F_1(z) & \text{si } z \in U \\ F_2(z) & \text{si } z \in V \end{cases}$$

est holomorphe sur $U \cup V$, est une primitive de f, s'annule en z_0. Bref, $U \cup V$ est élémentaire. □

Dans les énoncés précédents, il était question d'ouverts sur lesquels *toutes* les fonctions holomorphes ont des primitives. Avec le même type de démonstration, on peut aussi donner une condition pour qu'*une* fonction soit holomorphe.

***Théorème 3.3.7* (Morera).** *Soit U un ouvert de $\mathbf{C}$ et soit $f : U \to \mathbf{C}$ une fonction. Alors pour que f soit holomorphe, il faut et il suffit qu'elle soit continue et que, pour tout triplet de points A, B et C tels que le triangle ABC soit contenu dans U, on ait*

$$\int_{[A,B]} f(z)dz + \int_{[B,C]} f(z)dz + \int_{[C,A]} f(z)dz = 0.$$

Démonstration. Si f est holomorphe sur U, on applique le corollaire 3.2.3 et le carré reliant la ligne brisée ABC et le segment AC déjà utilisé dans la démonstration de 3.3.2 (et sur la figure 5)

$$\Gamma(s,t) = a + s(b-a) + st(c-b).$$

Réciproquement, supposons l'égalité de l'énoncé vérifiée et montrons que f est holomorphe en un point z_0 de U. Choisissons un disque D de centre z_0 et de rayon r contenu dans U. Définissons une fonction F sur D par

$$F(z) = \int_{[z_0,z]} f(w)dw.$$

Pour tout point z de U, en appliquant l'hypothèse au triangle de sommets z_0, z et $z+h$, on voit que

$$F(z+h) - F(z) = \int_{[z,z+h]} f(w)dw.$$

Les mêmes arguments que dans la démonstration de 3.3.1 montrent alors que F est holomorphe et que sa dérivée est f... qui ne peut donc pas s'empêcher d'être holomorphe. □

Le théorème de Morera a de nombreuses applications, on en trouvera dans l'exercice 3.5.10. En voici une spectaculaire.

Corollaire 3.3.8. *Soit U un ouvert de $\mathbf{C}$. Si une suite $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de fonctions holomorphes converge uniformément sur tous les compacts de U, la limite est holomorphe sur U.*

Démonstration. Comme la convergence est uniforme sur les compacts, la limite f est une fonction continue sur U. Pour montrer qu'elle est holomorphe, il suffit donc de montrer que son intégrale sur les bords des triangles est nulle. Maintenant chaque bord de triangle est un compact et donc la suite (f_n) y converge uniformément vers f. L'intégrale de f est donc la limite des intégrales des f_n, qui sont nulles puisque ce sont des fonctions holomorphes. □

3.4. Indice d'un point par rapport à un lacet

La fonction $1/z$ n'a pas de primitive sur $\mathbf{C} - \{0\}$ et son intégrale sur un cercle centré en 0 mesure la différence entre deux déterminations du logarithme (ou de l'argument), soit $2i\pi$. Si on fait n fois le tour de l'origine, en intégrant sur le cercle paramétré par e^{int} ($t \in [0,2\pi]$), l'intégrale est $2ni\pi$. Autrement dit, rien qu'en calculant l'intégrale, on sait combien de fois on a fait le tour de l'origine. Dans ce paragraphe, on va généraliser et prolonger cette remarque. Considérons un lacet $\gamma\colon [0,1] \to \mathbf{C}$. On va montrer que

Proposition 3.4.1. *Pour tout nombre complexe z qui n'est pas dans l'image de γ, le nombre*

$$\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{dw}{w-z}$$

est un entier.

Définition 3.4.2. Le nombre entier défini dans la proposition 3.4.1 est appelé l'indice de z par rapport à γ. On le note $\mathrm{Ind}_\gamma(z)$.

Démonstration. Considérons la fonction φ définie par

$$\varphi(t) = \exp\left(\int_0^t \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s)-z}ds\right).$$

On a

$$\frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)} = \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-z}$$

sur $[0,1]-S$, où S est l'ensemble (fini) des valeurs où la dérivée de γ n'est pas continue. On voit ainsi que la fonction $\varphi/(\gamma-z)$ est continue, $\mathcal{C}^1$ par morceaux et a une dérivée nulle sur $[0,1]-S$. Elle est donc constante. Cette constante vaut $\varphi(0)/(\gamma(0)-z) = 1/(\gamma(0)-z)$. Par suite on a

$$\varphi(t) = \frac{\gamma(t)-z}{\gamma(0)-z}.$$

Puisque γ est un chemin fermé, on a $\gamma(1) = \gamma(0)$ et donc $\varphi(1) = 1$. Ainsi le nombre

$$\int_0^1 \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-z} dt$$

est un multiple entier de $2i\pi$, ce que nous voulions démontrer. □

L'indice de z est bien défini pour tout z dans le complémentaire Ω de l'image $\gamma([0,1])$. Cet entier ne peut changer que si z traverse l'image de γ. En termes plus précis :

Proposition 3.4.3. *L'indice* $\mathrm{Ind}_\gamma(z)$ *est constant sur chaque composante connexe de* Ω*. L'ouvert* Ω *possède une unique composante connexe non bornée, sur laquelle l'indice est nul.*

Démonstration. La fonction

$$z \mapsto \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{dw}{w-z}$$

est une fonction continue de z sur l'ouvert Ω : la fonction $z \mapsto \gamma'(t)/(\gamma(t)-z)$ est continue (en fait holomorphe) pour tout t dans $[0,1]$, l'intégrale définit donc une fonction continue de z (on peut même montrer qu'elle est holomorphe). Elle prend ses valeurs dans l'espace discret $\mathbf{Z}$, donc elle est constante sur chaque composante de Ω.

Il est facile de se convaincre que Ω n'a qu'une composante non bornée. En effet, l'image de l'intervalle compact $[0,1]$ par la fonction continue γ est un compact de $\mathbf{C}$, elle est donc bornée et contenue dans un disque. Le complémentaire de ce disque est à la fois connexe par arcs et contenu dans la réunion des composantes non bornées de Ω. Il n'y a donc qu'une telle composante.

Soit z un point de cette composante. Son indice par rapport à γ est le même que celui de n'importe quel autre point de cette composante. Si $(z_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite de points dont le module tend vers l'infini, on a donc

$$\mathrm{Ind}_\gamma(z) = \lim_{n\to+\infty} \mathrm{Ind}_\gamma(z_n).$$

Et, bien entendu, cette limite est nulle. □

3.5. Exercices

3.5.1. On considère le rectangle

$$R = \{z \in \mathbf{C} \mid -r < \mathrm{Ré}(z) < r \text{ et } -s < \mathrm{Im}(z) < s\}$$

(r et s sont des réels positifs). Calculer les intégrales

$$\int_{\partial R} \frac{dz}{z} \text{ et } \int_{\partial R} \frac{dz}{z^2}.$$

3.5.2. On considère le carré $\Gamma : [0,1]^2 \to \mathbf{C}$ de sommets 0, 1, $1+i$ et i. Calculer

$$\int_{\partial\Gamma} \mathrm{Ré}(z) dz$$

et comparer le résultat au théorème 3.2.1.

3.5.3. Montrer que la fonction $f(z) = 1/(z^2 - z)$ n'a pas de primitive dans

$$U = \{z \in \mathbf{C} \mid 0 < |z-1| < 1\}.$$

3.5.4. Existe-t-il une homotopie de γ_0 à γ_1 dans l'ouvert U dans les cas suivants (si oui, en écrire une explicitement, sinon, donner un argument rigoureux) ?

(1) $\gamma_0(t) = e^{it}$, $\gamma_1(t) = -1 + 2e^{it}$ ($t \in [0, 2\pi]$), $U = \mathbf{C} - \{0\}$,

(2) $\gamma_0(t) = e^{2it}$, $\gamma_1(t) = -1 + 2e^{it}$ ($t \in [0, 2\pi]$), $U = \mathbf{C} - \{0\}$,

(3) $\gamma_0(t) = 2e^{it}$, $\gamma_1(t) = 2\cos t + i\sin t$ ($t \in [0, 2\pi]$), $U = \mathbf{C} - [0, 1]$

(4) $\gamma_0(t) = e^{it}$, $\gamma_1(t) = i$ ($t \in [0, 2\pi]$), $U = \mathbf{C} - \{2i\}$,

(5) $\gamma_0(t) = e^{it}$, $\gamma_1(t) = i$ ($t \in [0, 2\pi]$), $U = \mathbf{C} - \{-i/2\}$.

3.5.5. Dessiner rapidement les lacets $t \mapsto 2(\cos t + i\sin(2t))$ ($t \in [0, 2\pi]$) et $t \mapsto 2e^{it}$ ($t \in [0, 2\pi]$). Sont-ils homotopes dans $\mathbf{C} - \{-1, 1\}$?

3.5.6. Pour chacun des ouverts suivants, dire s'il est ou non étoilé par rapport à un de ses points : un disque, l'intérieur d'un carré, le complémentaire dans $\mathbf{C}$ d'un point, d'une demi-droite, d'un segment, d'une droite, de deux demi-droites de la même droite, d'un disque ?

3.5.7. Soit U un ouvert élémentaire contenant le cercle $C = \{z \in \mathbf{C} \mid |z - z_0| = r\}$. Montrer que U contient tout le disque fermé

$$D = \{z \in \mathbf{C} \mid |z - z_0| \leq r\}.$$

3.5.8. Pour chacun des ouverts de $\mathbf{C}$ suivants, dire s'il est élémentaire ou pas :

$$\mathbf{C} - \{1\}, \quad \{z \in \mathbf{C} \mid 2\,\text{Ré}(z) < \text{Im}(z) < 3\,\text{Ré}(z) \text{ et } \text{Ré}(z) > 0\}.$$

3.5.9. Soit f une fonction holomorphe sur un ouvert U et soit $\varphi : V \to U$ une transformation holomorphe. On suppose que V est élémentaire. Vérifier que $g = (f \circ \varphi) \cdot \varphi'$ a une primitive G. On suppose que φ est une bijection et que son inverse est holomorphe (on dit que φ est une application *biholomorphe*). Trouver une primitive de f.

En déduire que s'il existe une application biholomorphe d'un ouvert V de $\mathbf{C}$ sur un ouvert U de $\mathbf{C}$, alors U est élémentaire si et seulement si V est élémentaire.

3.5.10. Soit U un ouvert de $\mathbf{C}$. On suppose que f est holomorphe sur $U - U \cap \mathbf{R}$ et continue sur U. Montrer que f est holomorphe sur U.

Principe de réflexion de Schwarz. Soit U un ouvert de $\mathbf{C}$ invariant par conjugaison complexe. On appelle

$$U^+ = \{z \in U \mid \text{Im}(z) > 0\} \text{ et } U'^+ = \{z \in U \mid \text{Im}(z) \geq 0\}.$$

Soit $f : U'^+ \to \mathbf{C}$ une fonction continue, holomorphe sur l'ouvert U^+ et prenant des valeurs réelles sur $U \cap \mathbf{R}$. Montrer que

$$F(z) = \begin{cases} f(z) & \text{si } \text{Im}(z) \geq 0 \\ \overline{f(\overline{z})} & \text{si } \text{Im}(z) \leq 0 \end{cases}$$

définit un prolongement holomorphe de f à U.

3.5.11. Montrer qu'il existe
- une fonction holomorphe g_1, définie sur $\mathbf{C}-]-\infty,0]$ et telle que

$$g_1(1)=1 \text{ et } \forall z\in \mathbf{C}-]-\infty,0], \quad g_1(z)^2=z$$

- et une fonction holomorphe g_2, définie sur $\mathbf{C}-]-\infty,-1]$ et telle que

$$g_2(1)=\sqrt{2} \text{ et } \forall z\in \mathbf{C}-]-\infty,-1], \quad g_2(z)^2=z+1.$$

Montrer que la fonction $f:\mathbf{C}-]-\infty,0]\longrightarrow \mathbf{C}$ qui à z associe $g_1(z)g_2(z)$ se prolonge en une fonction continue sur $\mathbf{C}-[-1,0]$.

Montrer qu'il existe une fonction holomorphe h définie sur $\mathbf{C}-[-1,0]$ telle que

$$h(1)=\sqrt{2} \text{ et } \forall z\in \mathbf{C}-[-1,0], \quad h(z)^2=z(z+1).$$

3.5.12. On suppose que $\gamma([0,1])$ est un polygone convexe (parcouru une fois). Montrer que $\mathrm{Ind}_\gamma(z)=1$ pour tout z dans la composante connexe bornée du complémentaire Ω de l'image de γ.

3.5.13. Soient γ_0 et γ_1 deux tels chemins fermés paramétrés par $[0,1]$ et soit $z\in\mathbf{C}$ tel que

$$|\gamma_0(t)-\gamma_1(t)|<|z-\gamma_0(t)|$$

pour tout $t\in[0,1]$. Montrer que les nombres $\mathrm{Ind}_{\gamma_0}(z)$ et $\mathrm{Ind}_{\gamma_1}(z)$ sont bien définis et qu'ils sont égaux.

3.5.14. Théorème de d'Alembert-Gauss. Soit $P\in\mathbf{C}[X]$ un polynôme de degré $n\geq 1$.

(1) Pour $R>0$, on appelle γ_R l'image du cercle de centre 0 et de rayon R par P. Montrer que, pour R assez grand, le lacet γ_R ne passe pas par 0.

(2) Vérifier que, pour R assez grand,

$$|z|\geq R\Rightarrow |z^n|>\left|a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_0\right|.$$

Montrer que $\mathrm{Ind}_{\gamma_R}(0)$ est égal à l'indice par rapport à l'origine de l'image du cercle $|z|=R$ par l'application $z\mapsto z^n$.

(3) Que vaut $\mathrm{Ind}_{\gamma_R}(0)$? Montrer que P a une racine.

3.5.15. Montrer que, si 0 n'est pas dans l'image de γ,

$$\frac{1}{2\pi}\int_\gamma \frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}$$

est un entier.

3.5.16. Soit $f(z)=a(z-z_1)^{m_1}\cdots(z-z_r)^{m_r}$, où a est un nombre complexe non nul, $z_1,\dots,z_r$ sont des nombres complexes deux à deux distincts, et les m_i sont des entiers relatifs non nuls.

Montrer que s'il existe une détermination du logarithme de f sur un ouvert connexe D, alors

$$\sum_{i=1}^r m_i\mathrm{Ind}(\gamma,z_i)=0$$

pour tout lacet γ dans D.

Soit $g(z)=1-\dfrac{1}{z^2}$. Existe-t-il une détermination du logarithme de g dans $\mathbf{C}-A$ avec
- $A=[-1,0]\cup[1,+\infty[$
- $A=]-\infty,0]\cup[1,+\infty[$.

3.5.17. Logarithme, le retour. Existe-t-il une détermination de la « fonction » $\log(z+\sqrt{1-z})$ sur un domaine contenant le segment joignant l'origine au point $1+i$? Quelle est la valeur d'une telle détermination en $1+i$ sachant qu'elle est nulle en 0 ?

Montrer qu'il existe une détermination de la racine cubique de $z^2(2-z)$ sur un disque assez petit centré en 1. On choisit celle qui vaut 1 en 1. Montrer qu'on peut la prolonger par continuité le long du chemin $t \mapsto e^{it}$ $(t \in [0,\pi/2])$. Quelle est la valeur en i ? Même question avec le chemin $t \mapsto e^{-it}$ $(t \in [0,3\pi/2])$.

CHAPITRE 4

POINTS SINGULIERS, FONCTIONS MÉROMORPHES

4.1. Fonctions holomorphes dans une couronne et séries de Laurent

Une *couronne* est la partie du plan délimitée par deux cercles concentriques. Si R_1 et R_2 sont deux nombres réels positifs vérifiant $R_1 < R_2$, on notera

$$A(R_1, R_2) = \{z \in \mathbf{C} \mid R_1 < |z| < R_2\}$$

(le A est pour « anneau »). On autorise R_1 à être nul (la couronne est alors un *disque épointé*) et/ou R_2 à être infini.

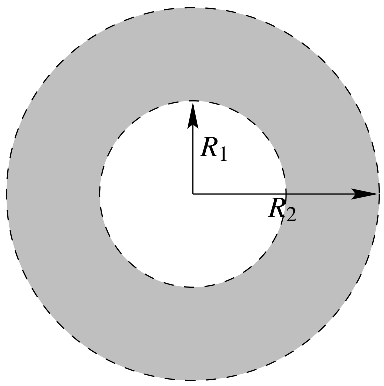

Figure 1 : Couronne

Soit $(a_n)_{n\in\mathbf{Z}}$ une suite de nombres complexes (indexée par $\mathbf{Z}$) telle que, si ρ (resp. σ) est le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ (resp. $\sum_{n\geq 0} a_{-n} w^n$), on ait

$$\rho \geq R_2 \text{ et } \sigma \geq \frac{1}{R_1}.$$

Alors :

- La série $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ converge normalement sur les compacts du disque de rayon R_2, et y définit une fonction holomorphe.
- La série $\sum_{n\geq 0} a_{-n} w^n$ converge normalement sur les compacts du disque de rayon $1/R_1$ et donc ($z = 1/w$), la série $\sum_{n\leq 0} a_n z^n$ converge normalement sur les compacts de

$$\{z \in \mathbf{C} \mid |z| > R_1\}$$

  et y définit une fonction holomorphe.

Donc leur somme $\sum_{n\in\mathbf{Z}} a_n z^n$ est une série normalement convergente sur les compacts de la couronne $A(R_1, R_2)$ et définit une fonction holomorphe sur cet ouvert. Le but de ce paragraphe est de montrer la réciproque, à savoir que toute fonction holomorphe sur la couronne est somme d'une série de ce type, dite *série de Laurent.*

***Théorème 4.1.1* (Laurent).** *Toute fonction holomorphe dans une couronne $A(R_1,R_2)$ est développable en série de Laurent dans cette couronne. Les coefficients du développement de f se calculent par la formule*

$$a_n = \frac{1}{2i\pi}\int_{C(0,r)} z^{-n-1}f(z)dz$$

pour $r \in]R_1,R_2[$ arbitraire.

Exemple 4.1.2. La fonction $1/z(1-z)$ est holomorphe sur $\mathbf{C}-\{0,1\}$. D'après le théorème, elle doit être développable en série de Laurent sur toute couronne contenue dans cet ouvert. Et en effet :

– pour $0<|z|<1$ (couronne centrée en 0 de rayons 0 et 1) :

$$\frac{1}{z(1-z)} = \frac{1}{z} + \sum_{n\geq 0} z^n,$$

– pour $0<|z-1|<1$ (couronne centrée en 1, rayons 0 et 1) :

$$\frac{1}{z(1-z)} = -\frac{1}{z-1} + \sum_{n\geq 0}(-1)^n(z-1)^n,$$

– pour $1<|z|$ (couronne centrée en 0, rayons 1 et ∞) :

$$\frac{1}{z(1-z)} = -\sum_{n\geq 0}\frac{1}{z^n}.$$

En préparation de la démonstration du théorème, énonçons une conséquence directe du théorème d'homotopie 3.2.3.

Lemme 4.1.3. *Soit g une fonction holomorphe sur la couronne $A(R_1,R_2)$. Alors l'intégrale*

$$\int_{C(0,r)} g(z)dz$$

ne dépend pas de $r \in]R_1,R_2[$.

Démonstration. Si $R_1<r_1\leq r_2<R_2$, on déforme le cercle de rayon r_1 sur le cercle de rayon r_2 dans la couronne à travers les cercles concentriques. Une formule pour cette homotopie est

$$\Gamma(s,t) = ((1-s)r_1+sr_2)e^{it}.$$

□

On démontre ensuite :

Proposition 4.1.4. *Soit f une fonction holomorphe sur la couronne $A(R_1,R_2)$. Soit $z\in A(R_1,R_2)$ et soient r_1, r_2 tels que $R_1<r_1<|z|<r_2<R_2$. Alors les intégrales*

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{C(0,r_1)}\frac{f(w)}{w-z}dw \text{ et } \frac{1}{2i\pi}\int_{C(0,r_2)}\frac{f(w)}{w-z}dw$$

ne dépendent pas de r_1 et r_2. De plus, on a

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi}\int_{C(0,r_2)}\frac{f(w)}{w-z}dw - \frac{1}{2i\pi}\int_{C(0,r_1)}\frac{f(w)}{w-z}dw.$$

Démonstration. On applique le lemme 4.1.3 à la fonction holomorphe

$$w \longmapsto \frac{f(w)}{w-z}$$

sur la couronne $A(R_1, |z|)$ pour obtenir que la première intégrale ne dépend pas de r_1. On l'applique à la même fonction sur $A(|z|, R_2)$ pour obtenir le résultat analogue sur la deuxième intégrale.

Il reste à démontrer la formule donnant $f(z)$. On considère la fonction $g : A(R_1, R_2) \to \mathbf{C}$ définie par

$$g(w) = \begin{cases} \dfrac{f(w)-f(z)}{w-z} & \text{si } w \neq z \\ f'(z) & \text{si } w = z. \end{cases}$$

Elle est évidemment holomorphe sauf peut-être en $w = z$. En fait, elle l'est aussi en ce point. Il suffit de développer la fonction holomorphe f en série entière au voisinage de z en

$$f(w) = \sum_{n\geq 0} b_n (w-z)^n$$

de sorte que $f'(z) = b_1$ et que

$$\frac{f(w)-f(z)}{w-z} = \frac{\sum b_n (w-z)^n - b_0}{w-z} = \sum_{n\geq 1} b_n (w-z)^{n-1}.$$

Donc sur ce voisinage,

$$g(w) = \sum_{n\geq 0} b_{n+1} (w-z)^n.$$

Donc g est holomorphe sur la couronne $A(R_1, R_2)$. On peut donc lui appliquer le lemme 4.1.3 pour obtenir :

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{C(0,r_1)} \frac{f(w)-f(z)}{w-z} dw = \frac{1}{2i\pi}\int_{C(0,r_2)} \frac{f(w)-f(z)}{w-z} dw.$$

Calculons le membre de gauche. Il vaut

$$\frac{1}{2i\pi}\left\{\int_{C(0,r_1)} \frac{f(w)}{w-z} dw - f(z)\int_{C(0,r_1)} \frac{dw}{w-z}\right\}.$$

Le membre de droite, lui, vaut

$$\frac{1}{2i\pi}\left\{\int_{C(0,r_2)} \frac{f(w)}{w-z} dw - f(z)\int_{C(0,r_2)} \frac{dw}{w-z}\right\}.$$

Pour montrer la formule annoncée, il suffit donc de vérifier que

$$\int_{C(0,r_1)} \frac{dw}{w-z} = 0 \text{ et } \int_{C(0,r_2)} \frac{dw}{w-z} = 1,$$

soit

$$\mathrm{Ind}_{C(0,r_1)}(z) = 0 \text{ et } \mathrm{Ind}_{C(0,r_1)} = 2i\pi.$$

Comme z est à l'extérieur du disque de rayon r_1, il est dans la composante non bornée du complémentaire du cercle et donc son indice par rapport à ce cercle est nul (proposition 3.4.3). On peut aussi dire que la fonction $w \mapsto 1/(w-z)$ est holomorphe sur le disque. On réalise une homotopie du cercle de rayon r_1 sur le lacet constant égal 0 en utilisant les cercles concentriques comme ci-dessus (démonstration du lemme 4.1.3), donc la première intégrale est nulle.

Pour la deuxième, on applique la formule de Cauchy (le corollaire 2.2.2)

$$h(z) = \frac{1}{2i\pi}\int_{C(0,r_2)} \frac{h(w)}{w-z} dw$$

à la fonction identiquement égale à 1, qui est bien holomorphe… où on veut, et ça donne l'égalité à 1 de la deuxième intégrale, et ce faisant, finit la démonstration de la proposition. □

Démonstration du théorème 4.1.1. Il n'y a plus grand chose à faire. Si z est tel que

$$R_1 < r_1 < |z| < r_2 < R_2,$$

la proposition donne

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi}\int_{C(0,r_2)} \frac{f(w)}{w-z}dw - \frac{1}{2i\pi}\int_{C(0,r_1)} \frac{f(w)}{w-z}dw.$$

On écrit les développements *normalement convergents*

$$\frac{1}{w-z} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{w^{n+1}} \text{ pour } |w| = r_2 \text{ et } \left|\frac{z}{w}\right| < 1$$

et

$$\frac{1}{w-z} = -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{w^n}{z^{n+1}} \text{ pour } |w| = r_1 \text{ et } \left|\frac{w}{z}\right| < 1$$

et on les reporte (puisqu'ils sont normalement convergents) dans les intégrales ci-dessus :

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2i\pi}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\int_{C(0,r_2)} \frac{f(w)}{w^{n+1}}dw\right)z^n + \frac{1}{2i\pi}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\int_{C(0,r_1)} w^n f(w)dw\right)z^{-n-1} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n z^n. \end{aligned}$$

□

Corollaire 4.1.5. *Soit f une fonction holomorphe dans une couronne $A(R_1,R_2)$. Il existe une fonction f_2, holomorphe pour $|z| < R_2$ et une fonction f_1 holomorphe pour $|z| > R_1$ et telles qu'on ait*

$$\forall z \in A(R_1,R_2), \quad f(z) = f_1(z) + f_2(z).$$

De plus cette décomposition est unique si on impose que f_1 tende vers 0 quand $|z|$ tend vers l'infini.

Démonstration. Le théorème 4.1.1 affirme l'existence d'un développement de f en série de Laurent

$$f(z) = \sum_{n\in\mathbf{Z}} a_n z^n$$

tel que les deux fonctions

$$f_1(z) = \sum_{n<0} a_n z^n \text{ et } f_2(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$$

aient les propriétés voulues.

Si $f = g_1 + g_2$ est une autre décomposition vérifiant ces propriétés, posons

$$h(z) = \begin{cases} f_2(z) - g_2(z) & \text{pour } |z| < R_2 \\ g_1(z) - f_1(z) & \text{pour } |z| > R_1. \end{cases}$$

(ces deux formules donnent le même résultat sur la couronne). La fonction h est entière, elle tend vers 0 quand $|z|$ tend vers l'infini, de sorte qu'elle est bornée. Elle est donc constante d'après le théorème de Liouville (théorème 2.3.1). La constante est nulle pusique h tend vers 0 à l'infini. □

4.2. Points singuliers, fonctions méromorphes

On considère maintenant une fonction holomorphe sur un disque épointé (une couronne $A(0,R)$). On remarque d'abord que le théorème de Laurent (théorème 4.1.1) affirme dans ce cas ($R_1 = 0$, $R_2 = R$) que la fonction se développe en

$$\sum_{n>0} a_{-n} z^{-n} + \sum_{n\geq 0} a_n z^n$$

où les séries entières $\sum a_{-n} w^n$ et $\sum a_n w^n$ ont des rayons de convergence respectivement *infini* et au moins égal à R. En particulier $\sum_{n>0} a_{-n} z^{-n}$ converge normalement sur les compacts de $\mathbf{C} - \{0\}$.

On se demande maintenant si on peut prolonger une fonction holomorphe sur le disque épointé en une fonction holomorphe sur le disque de rayon R tout entier.

Proposition 4.2.1. *Pour qu'une fonction f holomorphe sur un disque épointé se prolonge au disque, il faut et il suffit que $|f|$ soit bornée au voisinage du centre.*

Démonstration. La condition est évidemment nécessaire. Montrons qu'elle est suffisante. On suppose pour simplifier que le disque est centré en 0.

Sur $A(0,R)$, grâce aux résultats précédents (théorème 4.1.1), la fonction se développe en série de Laurent

$$f(z) = \sum_{n\in\mathbf{Z}} a_n z^n.$$

Écrivons l'hypothèse : il existe deux réels $r_0 > 0$ et M tels que

$$|z| \leq r_0 \Rightarrow |f(z)| \leq M.$$

Pour $|z| = r \leq r_0$, on a donc, d'après le théorème 4.1.1,

$$\begin{aligned} |a_n| &= \frac{1}{2\pi} \left| \int_{C(0,r)} z^{-n-1} f(z)\,dz \right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} M \left| \int_0^{2\pi} r^{-n} e^{it}\,dt \right| = \frac{M}{r^n} \end{aligned}$$

et ceci pour toutes les valeurs de n, positives ou négatives, et pour tout $r \leq r_0$.

Pour $n < 0$, cette majoration impose donc qu'on ait $a_n = 0$ et que la série de Laurent soit en fait une série entière, qui donne le prolongement voulu en 0. □

Si on ne peut pas prolonger f, on dit qu'elle a un *point singulier* (ou une *singularité*) au centre z_0 du disque. Il y a alors deux possibilités :

(1) Soit presque tous les a_n ($n < 0$) sont nuls. Alors il existe un entier $n > 0$ tel que $z \mapsto (z - z_0)^n f(z)$ se prolonge en une fonction holomorphe en z_0. On dit que f est *méromorphe* en z_0 et que z_0 est un *pôle* de f. Si f n'est pas holomorphe en z_0 mais que $z \mapsto (z - z_0) f(z)$ l'est, on dit que z_0 est un pôle *simple* de f. Par exemple, 0 est un pôle simple de $1/z$. On définit de même pôle double, pôle d'ordre k ($k \geq 1$).

(2) Soit il y a une infinité de coefficients a_n non nuls. On dit que z_0 est une *singularité essentielle*.

Définition 4.2.2. On appelle *fonction méromorphe* sur un ouvert U de $\mathbf{C}$ une fonction holomorphe sur le complémentaire dans U d'une partie discrète F qui est méromorphe en tout point de F.

Exemple 4.2.3. Le quotient de deux fonctions holomorphes sur U est une fonction méromorphe sur U. L'ensemble discret F est ici l'ensemble des zéros (isolés ! grâce à la proposition 1.2.7) du dénominateur.

Remarque 4.2.4. L'ensemble $\mathcal{M}(U)$ des fonctions méromorphes sur l'ouvert U est une algèbre. C'est même un corps quand U est connexe.

Séries de fonctions méromorphes. Si (f_n) est une suite des fonctions méromorphes sur U et si K est une partie de U, on dira que la série $\sum f_n$ *converge uniformément* (resp. *normalement*) sur K si

– l'ensemble des entiers n tels que f_n a un pôle dans K est fini et
– les autres f_n forment une série uniformément (resp. normalement) convergente sur K.

On démontre alors facilement que, si (f_n) est une série de fonctions méromorphes qui converge normalement sur les compacts de U, la somme est méromorphe sur U et qu'on peut calculer la dérivée de la somme comme somme des dérivées des f_n.

4.3. La sphère de Riemann

Une fonction méromorphe sur un ouvert U n'est pas vraiment une fonction sur U : c'est en réalité une fonction définie sur le complémentaire d'une partie discrète. On a envie ici de prolonger ces fonctions de façon à ce qu'elles soient définies sur U tout entier. La seule valeur qu'on puisse imaginer de donner à une expression telle que $1/z^n$ est « ∞ » quel que soit le sens que ça puisse avoir.

Dans cette partie, on fait une construction rigoureuse qui permet de réaliser ce désir (et même au-delà). L'idée est d'ajouter un point à l'espace localement compact $\mathbf{C}$ pour le rendre compact. Notons $\widehat{\mathbf{C}}$ l'ensemble

$$\widehat{\mathbf{C}} = \mathbf{C} \cup \{\infty\}$$

où ∞ est juste le nom que je donne au point ajouté. Pour justifier ce nom, on met une topologie sur ce qui n'est, pour le moment, qu'un ensemble.

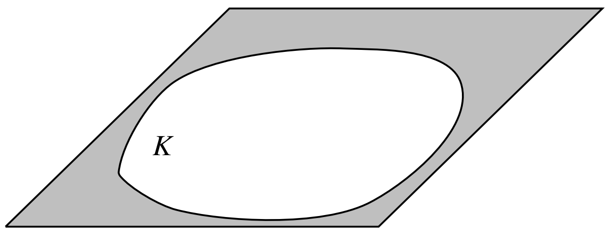

Figure 2 : Voisinage de ∞

Pour définir cette topologie, il suffit de donner une base de voisinages de chaque point. Considérons donc un point z de $\mathbf{C} \cup \{\infty\}$. De deux choses l'une :

– soit $z \in \mathbf{C}$, on alors prend pour base de voisinages de z les boules ouvertes centrées en z (c'est une base de voisinages de z pour la topologie usuelle de $\mathbf{C}$),
– soit $z = \infty$, cas où l'on prend pour base de voisinages de ∞ dans $\widehat{\mathbf{C}}$ les complémentaires des compacts de $\mathbf{C}$ auxquels on ajoute ∞, en d'autres termes les $(\mathbf{C} - K) \cup \{\infty\}$, où $K \subset \mathbf{C}$ est un compact.

Proposition 4.3.1. *Cette topologie fait de $\widehat{\mathbf{C}}$ un espace topologique compact, homéomorphe à la sphère unité de l'espace euclidien $\mathbf{R}^3$.*

Démonstration. Montrons d'abord directement que $\widehat{\mathbf{C}}$ est compact.

D'abord il est séparé parce que $\mathbf{C}$ est séparé et localement compact : si x et y sont deux points distincts de $\widehat{\mathbf{C}}$, soit ils sont tous les deux dans $\mathbf{C}$ et peuvent être séparés comme d'habitude par des disques, sinon, l'un des deux, disons y est ∞ et l'autre, x est dans $\mathbf{C}$, on sépare alors x et y en prenant

– pour voisinage de x le disque de centre x et rayon r
– et pour voisinage de ∞ le complémentaire du disque ouvert de centre x et de rayon $r+1$.

Soit maintenant $(U_i)_{i\in I}$ un recouvrement de $\widehat{\mathbf{C}}$ par des ouverts. Comme c'est un recouvrement, au moins un des U_i contient ∞. Fixons i_0 tel que $U_{i_0} \ni \infty$. Le complémentaire de U_{i_0} est un compact K de $\mathbf{C}$. Pour tout $i \neq i_0$, on définit $U_i' = U_i \cap \mathbf{C}$, qui est un ouvert de $\mathbf{C}$ (par définition, la topologie induite par celle de $\widehat{\mathbf{C}}$ sur $\mathbf{C}$ est la topologie de $\mathbf{C}$). Les U_i' recouvrent K qui est compact, on peut donc en extraire un recouvrement fini $U_{i_1}', \ldots, U_{i_n}'$. Bien entendu, les U_{i_k} avec $0 \leq k \leq n$ forment un recouvrement fini de $\widehat{\mathbf{C}}$ extrait du recouvrement donné au départ.

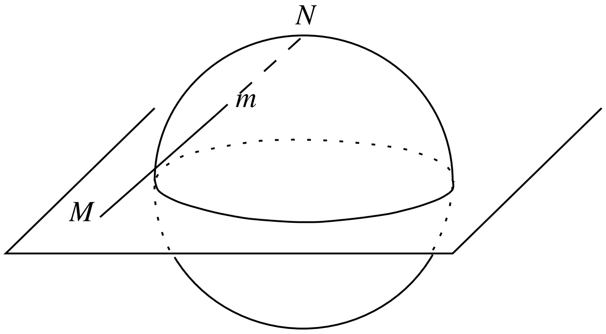

Figure 3 : Projection stéréographique

Montrons maintenant que $\widehat{\mathbf{C}}$ est homéomorphe à une sphère. On se place sur la sphère unité de $\mathbf{R}^3$:

$$S = \left\{(u,v,w) \in \mathbf{R}^3 \mid u^2+v^2+w^2 = 1\right\}.$$

On définit la *projection stéréographique* $\varphi : S \to \mathbf{C} \cup \{\infty\}$ par

$$(u,v,w) \xrightarrow{\ \varphi\ } \begin{cases} \dfrac{u+iv}{1-w} & \text{si } w \neq 1 \\ \\ \infty & \text{si } w = 1. \end{cases}$$

L'application φ est représentée sur la figure 3. Elle associe à un point m de la sphère le point d'intersection M de la droite joignant m au pôle nord N avec le plan équatorial de la sphère. Ce n'est bien défini que si m n'est pas le pôle nord, auquel cas on lui associe le point ∞.

Au vu de la description géométrique de φ, il est clair qu'elle est bijective ; au vu de sa description par une formule, il est clair que sa restriction à $S - \{N\}$ est continue.

En plus, φ est continue en N : montrons que l'image inverse d'un voisinage U de ∞ est un voisinage de N. On écrit

$$U = (\mathbf{C} - K) \cup \{\infty\}, \qquad \varphi^{-1}(U) = S - \varphi^{-1}(K).$$

Mais K est compact, donc fermé dans $\mathbf{C}$, la restriction de φ à $S - \{N\}$ est continue, donc $\varphi^{-1}(K)$ est fermé dans S, son complémentaire est un ouvert de S qui contient N, donc un voisinage de N.

On a donc une application bijective φ continue de l'espace compact S dans l'espace compact $\widehat{\mathbf{C}}$. Elle est bicontinue. C'est un homéomorphisme. $\square$

Définition 4.3.2. On appelle $\widehat{\mathbf{C}}$ la *sphère de Riemann*.

Remarque 4.3.3. Une remarque fondamentale est que la transformation $z \mapsto 1/z$ échange voisinages de 0 dans $\mathbf{C}$ et voisinages de ∞ dans $\widehat{\mathbf{C}}$.

Fonctions holomorphes, méromorphes. On dit qu'une fonction f définie sur le complémentaire d'un disque dans $\mathbf{C}$ (resp. le complémentaire d'un disque moins un ensemble discret) est *holomorphe en* ∞ (resp. *méromorphe en* ∞) si l'application

$$z \longmapsto f\left(\frac{1}{z}\right)$$

est holomorphe (resp. méromorphe) en 0.

Exemples 4.3.4

(1) Si P est un polynôme de degré n,

$$P(z) = z^n + \cdots + a_0, \qquad P\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{z^n} + \cdots + a_0$$

donc P est méromorphe en ∞ (et y a un pôle d'ordre n).

(2) La fonction exponentielle

$$f(z) = e^z, \qquad f\left(\frac{1}{z}\right) = \exp\left(\frac{1}{z}\right) = \sum_{n\geq 0} \frac{z^{-n}}{n!}$$

a une singularité *essentielle* en ∞. Elle ne définit pas une fonction méromorphe sur $\widehat{\mathbf{C}}$.

Dans ce nouveau contexte, le théorème de Liouville 2.3.1 affirme :

***Théorème 4.3.5* (Liouville, deuxième version).** *Toute fonction holomorphe sur* $\widehat{\mathbf{C}}$ *est constante.*

Démonstration. En effet, dire que f est holomorphe sur $\widehat{\mathbf{C}}$, c'est dire que f est holomorphe sur $\mathbf{C}$ (donc entière) et que

$$z \longmapsto f\left(\frac{1}{z}\right)$$

est bornée au voisinage de 0, soit que f est bornée sur $\mathbf{C}$. □

On peut faire plus précis :

Proposition 4.3.6. *Pour qu'une fonction entière se prolonge en une fonction méromorphe sur* $\widehat{\mathbf{C}}$*, il faut et il suffit que ce soit un polynôme.*

Démonstration. Dire qu'une fonction entière f se prolonge en une fonction méromorphe sur $\widehat{\mathbf{C}}$ est équivalent à dire qu'il existe un entier n tel que

$$z \longmapsto z^n f\left(\frac{1}{z}\right)$$

soit bornée au voisinage de 0 (proposition 4.2.1), soit

$$|z| \leq r \Rightarrow \left| z^n f\left(\frac{1}{z}\right) \right| \leq M.$$

En posant $u = 1/z$, ceci se réécrit

$$|u| \geq \frac{1}{r} \Rightarrow |f(u)| \leq M\,|u|^n.$$

Et ceci est équivalent à dire que f est un polynôme (voir au besoin l'exercice 2.4.17). □

Il y a bien sûr des fonctions méromorphes sur $\widehat{\mathbf{C}}$ qui ne sont pas des polynômes, mais alors elles ont des pôles dans $\mathbf{C}$. C'est le cas de toutes les fractions rationnelles

$$f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}, \quad P, Q \in \mathbf{C}[X].$$

Proposition 4.3.7. *Si f est méromorphe sur $\widehat{\mathbf{C}}$, elle a un nombre fini de pôles et un nombre fini de zéros dans $\widehat{\mathbf{C}}$.*

Démonstration. On écrit $\widehat{\mathbf{C}}$ comme réunion de deux compacts

$$K_0 = \{z \mid |z| \leq R+1\}$$

et

$$K_\infty = \{z \mid |z| \geq R\},$$

voisinages respectivement de 0 et ∞. Comme f est méromorphe sur $\mathbf{C}$, elle a un nombre fini de zéros et de pôles dans le compact K_0. La fonction $g(z) = f\left(\frac{1}{z}\right)$ est aussi méromorphe sur $\mathbf{C}$, elle a donc un nombre fini de zéros et de pôles dans le disque $|z| \leq 1/R$, de sorte que f a un nombre fini de zéros et de pôles dans K_∞. □

Proposition 4.3.8. *Les fractions rationnelles sont les seules fonctions méromorphes sur $\widehat{\mathbf{C}}$.*

Démonstration. Soit f une fonction méromorphe sur $\widehat{\mathbf{C}}$, soient $a_1, \dots, a_n$ ses pôles dans $\mathbf{C}$ et $k_1, \dots, k_n$ leurs multiplicités (on utilise la proposition 4.3.7). La fonction

$$(z-a_1)^{k_1} \cdots (z-a_n)^{k_n} f(z)$$

est entière sur $\mathbf{C}$, méromorphe sur $\widehat{\mathbf{C}}$, c'est donc un polynôme d'après la proposition 4.3.6. □

Avec une fonction f méromorphe sur $\widehat{\mathbf{C}}$, on peut fabriquer une application bien définie sur tout $\widehat{\mathbf{C}}$ et à valeurs dans $\widehat{\mathbf{C}}$:

$$\begin{array}{rcl} f : \widehat{\mathbf{C}} & \longrightarrow & \widehat{\mathbf{C}} \\ z & \longmapsto & \begin{cases} f(z) \in \mathbf{C} & \text{si } z \text{ n'est pas un pôle} \\ \infty & \text{si } z \text{ est un pôle.} \end{cases} \end{array}$$

4.4. Exercices

4.4.1. On suppose que a et b sont tels que $0 < |a| < |b|$. Trouver le développement en série de Laurent de la fonction $1/(z-a)(z-b)$ dans la couronne $A(|a|, |b|)$.

4.4.2. Trouver le développement en série de Laurent de la fonction $(z^2-2z+5)/(z-2)(z^2+1)$ dans la couronne $A(1,2)$.

4.4.3. Montrer que la série de Laurent

$$\cdots + \frac{1}{z^n} + \frac{1}{z^{n-1}} + \cdots + \frac{1}{z} + \frac{z}{2^2} + \cdots + \frac{z^n}{2^{n+1}} + \cdots$$

définit une fonction qui n'a pas de singularité essentielle en 0. Pourquoi n'est-ce pas contradictoire avec l'étude faite au § 4.2 ?

4.4.4. On considère la fonction

$$f(z) = \frac{1}{1-z^2} + \frac{1}{3-z}.$$

Combien a-t-elle de développements en série de Laurent ? Dans quelles régions sont-ils convergents ? Trouver les coefficients de ces développements.

4.4.5. Pour tout $R > 0$, on appelle $A(z_0, R)$ le disque épointé de centre z_0 et de rayon R. Soit f une fonction holomorphe sur $A(z_0, R)$. On suppose que f a une singularité essentielle en z_0. Montrer que, pour tout $a \in \mathbf{C}$, il existe une suite z_n avec $\lim_{n\to\infty} z_n = z_0$ et $\lim_{n\to\infty} f(z_n) = a$. Montrer que pour tout ε tel que $0 < \varepsilon < R$, $f(A(z_0, \varepsilon))$ est dense dans $\mathbf{C}$.

4.4.6. Soit f une fonction holomorphe sur un disque épointé de centre z_0 avec une singularité essentielle en z_0. Soit g une fonction entière non constante. Montrer que z_0 est une singularité essentielle de $g \circ f$ (on pourra utiliser l'exercice 2.4.20).

4.4.7. Soit f une fonction holomorphe sur un disque épointé de centre z_0 avec un pôle en z_0. Soit g une fonction entière. Montrer que, si g n'est pas un polynôme, $g \circ f$ a une singularité essentielle en z_0.

4.4.8. Soit f une fonction holomorphe sur le disque épointé $A(z_0, R)$. On suppose que f a une singularité essentielle en z_0. En utilisant le théorème de l'application ouverte, montrer que

$$\bigcap_{n\in\mathbf{N}} f\left(A\left(z_0, \frac{1}{n}\right)\right)$$

est dense dans $\mathbf{C}$. En déduire que l'ensemble des nombres complexes atteints une infinité de fois par f est dense dans $\mathbf{C}$.

Pensez-vous qu'une fonction avec une singularité essentielle puisse être injective ?

4.4.9. Construire un espace topologique compact $\widehat{\mathbf{R}}$ contenant $\mathbf{R}$ comme sous-espace topologique en ajoutant un point à $\mathbf{R}$. Montrer que l'espace obtenu est homéomorphe à un cercle.

4.4.10. Trouver toutes les injections holomorphes de $\mathbf{C}$ dans $\mathbf{C}$, puis toutes les injections holomorphes de $\mathbf{C}^\star$ dans $\mathbf{C}^\star$.

4.4.11. Soit f une fonction analytique dans $\mathbf{C}^\star$ vérifiant

$$\forall z \in \mathbf{C}^\star \qquad |f(z)| \leq \sqrt{|z|} + \frac{1}{\sqrt{|z|}}.$$

Montrer que f est constante.

4.4.12. Existe-t-il une fonction holomorphe sur le disque épointé de centre 0 et de rayon R telle que $|f(z)|$ soit équivalent à $\exp \dfrac{1}{|z|}$ au voisinage de 0 ?

4.4.13. Dire si les fonctions suivantes sont ou ne sont pas des fonctions méromorphes sur $\widehat{\mathbf{C}}$. Quand elles le sont, quels sont leurs zéros et leurs pôles ?

$$\frac{z^3+1}{z^4-1}, \quad \exp(z-1), \quad \exp\frac{1}{z}, \quad \frac{e^z}{z^6-5}, \quad \frac{z\sin z}{z^2+1}, \quad \frac{z^6-1}{z^3-1}.$$

4.4.14. On appelle *homographies* les fractions rationnelles de la forme

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d} \qquad \text{avec } ad - bc \neq 0.$$

Montrer que les homographies sont des bijections de $\widehat{\mathbf{C}}$, que l'application réciproque d'une homographie est une homographie et que la composée de deux homographies est une homographie.

4.4.15. Montrer qu'une homographie a, en général, deux points fixes. Que peut-on dire d'une homographie qui a trois points fixes ?

4.4.16. Montrer que toute homographie est composée de similitudes et de l'application $z \mapsto \dfrac{1}{z}$. En déduire que toute homographie transforme un cercle ou une droite de **C** en un cercle ou une droite.

4.4.17. Trouver les images des parties de **C** ci-dessous par les homographies indiquées :
– le quadrant $x > 0$, $y > 0$ par $(z-i)/(z+i)$,
– le demi-disque $|z| < 1$, $\mathrm{Im}(z) > 0$ par $(2z-i)/(2+iz)$,
– le secteur $0 < \theta < \pi/4$ par $z/(z-1)$,
– la bande $0 < x < 1$ par $(z-1)/z$, par $(z-1)/(z-2)$
(on pourra utiliser l'exercice précédent).

4.4.18. Trouver une homographie qui envoie le demi-plan supérieur ($\mathrm{Im}(z) > 0$) sur l'intérieur du disque unité.

CHAPITRE 5

EXEMPLES DE CONSTRUCTIONS DE FONCTIONS

5.1. Exemples de fonctions périodiques

On a déjà rencontré des fonctions holomorphes périodiques, l'exponentielle par exemple : il y a un sous-groupe G de $\mathbf{C}$ (le sous-groupe $2i\pi\mathbf{Z}$ dans le cas de l'exponentielle) et la fonction est invariante par l'action de ce groupe par translation :

$$f(z+g) = f(z)$$

pour tout g dans G. Les fonctions sin et cos sont aussi des fonctions entières périodiques. On va considérer ici des fonctions périodiques méromorphes.

Proposition 5.1.1. *La série de fonctions méromorphes*

$$\sum_{n\in\mathbf{Z}} \frac{1}{(z-n)^2}$$

converge uniformément sur les compacts de $\mathbf{C}$ *et sa somme est*

$$\sum_{n\in\mathbf{Z}} \frac{1}{(z-n)^2} = \left(\frac{\pi}{\sin\pi z}\right)^2.$$

Démonstration. On montre d'abord que la série converge uniformément dans toutes les bandes $x_0 \leq \text{Ré}(z) \leq x_1$. Fixons donc une telle bande. Elle ne contient qu'un nombre fini d'entiers. Pour ceux qui n'y sont pas :

– dans la série partielle $\sum_{n<x_0} \dfrac{1}{(z-n)^2}$, chaque terme est majoré par $\dfrac{1}{(x_0-n)^2}$, d'où la convergence normale dans la bande,
– de même, dans la série partielle $\sum_{n>x_1} \dfrac{1}{(z-n)^2}$, chaque terme est majoré par $\dfrac{1}{(x_1-n)^2}$.

Pour calculer la somme de la série et finir de démontrer la proposition, faisons une liste de propriétés de la somme f de la série :

(1) Elle est périodique de période 1 (c'est clair).

(2) Elle a un pôle en chaque entier n et s'écrit plus précisément

$$f(z) = \frac{1}{(z-n)^2} + h(z)$$

où h est holomorphe au voisinage de n.

(3) Elle tend vers 0 uniformément en x quand $|y|$ tend vers l'infini, plus précisément, on a :

$$\forall\,\varepsilon > 0, \quad \exists M, \quad |y| \geq M \Rightarrow |f(z)| \leq \varepsilon.$$

Remarquons ensuite que la fonction $g(z) = (\pi/\sin\pi z)^2$ possède exactement les mêmes propriétés :

(1) La première est claire.

(2) À cause de la périodicité, il suffit d'étudier g au voisinage de 0 :

$$\begin{aligned}\left(\frac{\pi}{\sin\pi z}\right)^2 &= \left(\frac{\pi}{\pi z - \frac{1}{6}\pi^3 z^3 + \cdots}\right)^2 \\ &= \frac{1}{z^2}\left(1 - \frac{1}{6}\pi^2 z^2 + \cdots\right)^{-2} \\ &= \frac{1}{z^2} + \frac{\pi^2}{3} + z^2(\cdots),\end{aligned}$$

d'où la deuxième propriété.

(3) La troisième résulte de la relation

$$|\sin\pi z|^2 = \sin^2\pi x + \mathrm{sh}^2\pi y.$$

On conclut en utilisant le théorème de Liouville : la fonction $f-g$ est entière (en appliquant la deuxième propriété) elle est bornée puisque périodique de période 1 (première propriété) et bornée sur les bandes verticales (troisième propriété). Elle est donc constante, mais cette constante est nulle puisqu'elle tend vers 0 quand y tend vers l'infini (encore la troisième propriété). $\square$

***Corollaire 5.1.2* (Euler).** *La somme de la série numérique* $\sum \frac{1}{n^2}$ *est* $\frac{\pi^2}{6}$.

Démonstration. On écrit

$$\left(\frac{\pi}{\sin\pi z}\right)^2 - \frac{1}{z^2} = \sum_{n\neq 0}\frac{1}{(z-n)^2}$$

et on fait tendre z vers 0. Le deuxième membre tend vers $2\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}$. Le calcul du développement de g en série de Laurent en 0 ci-dessus montre que le premier membre, lui, tend vers $\frac{\pi^2}{3}$. $\square$

Proposition 5.1.3. *La série de fonctions méromorphes*

$$\frac{1}{z} + \sum_{n\neq 0}\left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{n}\right)$$

converge uniformément sur les compacts de $\mathbf{C}$ *et sa somme est*

$$\frac{1}{z} + \sum_{n\neq 0}\left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{n}\right) = \frac{\pi}{\mathrm{tg}\pi z}.$$

Démonstration. On montre exactement comme ci-dessus l'assertion sur la convergence. Appelons f la somme, c'est donc une fonction méromorphe sur $\mathbf{C}$ qui a un pôle simple en chaque entier. On calcule sa dérivée comme somme de la série des dérivées :

$$f'(z) = -\frac{1}{z^2} - \sum_{n\neq 0}\frac{1}{(z-n)^2}.$$

Mais nous savons (proposition 5.1.1) que cette somme vaut $-(\pi/\sin\pi z)^2$, en d'autres termes, on a

$$f'(z) = \frac{d}{dz}\left(\frac{\pi}{\mathrm{tg}\pi z}\right).$$

Donc $f(z) - \pi/\mathrm{tg}\pi z$ est constante. Il est clair par définition de f que celle-ci est impaire, on en déduit que la constante est nulle. $\square$

Remarque 5.1.4. En regroupant les termes deux par deux, on en déduit aussi l'identité

$$\frac{1}{z}+\sum_{n\geq 1}\frac{2z}{z^2-n^2}=\frac{\pi}{\mathrm{tg}\pi z}.$$

5.2. Exemple de fonction bi-périodiques : la fonction ℘ de Weierstrass

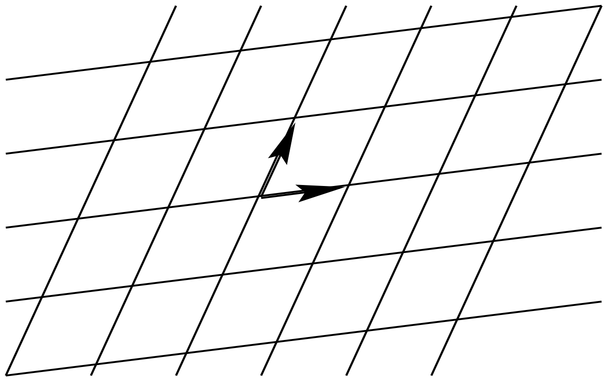

Figure 1

Dans l'exemple de l'exponentielle et dans les exemples considérés ci-dessus, le groupe de périodes G est un groupe de translations engendré par un élément, il est isomorphe à $\mathbf{Z}$. On peut se demander s'il existe des fonctions holomorphes qui ont un groupe de périodes plus gros, engendré par deux translations indépendantes. On se donne donc deux nombres complexes u et v, indépendants sur $\mathbf{R}$ (c'est dire que la partie imaginaire du rapport u/v n'est pas nulle) et on considère le *réseau*

$$\Lambda=\{nu+mv \mid n,m\in\mathbf{Z}\}.$$

La proposition suivante est une application du théorème de Liouville.

Proposition 5.2.1. *Les seules fonctions holomorphes sur* $\mathbf{C}$ *telles que*

$$f(z+\lambda)=f(z)\quad\forall z\in\mathbf{C},\forall\lambda\in\Lambda$$

sont les constantes.

Démonstration. Sur le parallélogramme engendré par u et v, c'est-à-dire sur le compact

$$\{xu+yv \mid x\in[0,1],y\in[0,1]\}$$

la fonction f est bornée. De la périodicité, on déduit qu'elle est bornée sur $\mathbf{C}$: tout point z de $\mathbf{C}$ se ramène à un point du parallélogramme en lui appliquant une translation du réseau. Donc f est entière et bornée, donc f est constante. □

Il n'y a donc pas de fonctions holomorphes « bi-périodiques » vraiment intéressantes. Par contre, il y a des fonctions méromorphes, comme celle que nous allons définir maintenant.

Proposition 5.2.2. *La série*

$$\frac{1}{z^2}+\sum_{\lambda\in\Lambda-\{0\}}\left(\frac{1}{(z-\lambda)^2}-\frac{1}{\lambda^2}\right)$$

converge uniformément sur les compacts de $\mathbf{C}-\Lambda$ *et définit une fonction méromorphe sur* $\mathbf{C}$.

La démonstration est basée sur le lemme suivant :

Lemme 5.2.3. *La série* $\sum_{\lambda\in\Lambda-\{0\}}\dfrac{1}{|\lambda|^3}$ *est convergente.*

Démonstration du lemme. Pour tout entier n, on considère

$$P_n = \{xu+yv \mid \sup\{|x|,|y|\} = n\}.$$

Sur le parallélogramme P_n, il y a $8n(= 4\times 2n)$ points de Λ. Si d est la plus petite distance des points de P_1 à 0, on a pour $\lambda \in P_n$, $|\lambda| \geq dn$. Ainsi

$$\sum_{\lambda\in P_n}\frac{1}{|\lambda|^3} \leq \frac{8n}{d^3n^3} = \frac{8}{d^3n^2}$$

d'où l'on déduit la convergence de la série. □

Démonstration de la proposition. On montre que la série converge uniformément sur tous les disques $|z| \leq R$. Le réseau est discret, son intersection avec tous les disques est finie, en particulier, on a $|\lambda| \geq 2R$ pour tous les λ sauf un nombre fini.

Pour tous ces λ et pour tout z dans le disque de rayon R,

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{(z-\lambda)^2}-\frac{1}{\lambda^2}\right| &= \left|\frac{\lambda^2-(z-\lambda)^2}{\lambda^2(z-\lambda)^2}\right| \\ &= \left|\frac{2\lambda z - z^2}{\lambda^2(z-\lambda)^2}\right| \\ &= \frac{\left|z\left(2-\dfrac{z}{\lambda}\right)\right|}{|\lambda|^3\left|1-\dfrac{z}{\lambda}\right|^2} \\ &\leq 10\frac{R}{|\lambda|^3}\end{aligned}$$

qui converge grâce au lemme.

On a utilisé les inégalités

$$\left|2-\frac{z}{\lambda}\right| \leq \frac{5}{2} \text{ et } \left|1-\frac{z}{\lambda}\right| \geq \frac{1}{2}$$

qui viennent des positions relatives de z et λ : comme $|z| \leq |\lambda|/2$,

– l'inégalité triangulaire donne

$$\left|\lambda-\frac{z}{2}\right| \leq \left|\frac{z}{2}\right| + |\lambda| \leq \frac{5}{4}|\lambda|$$

d'où la première inégalité

– et de même

$$|\lambda - z| \geq |\lambda| - |z| \geq \frac{|\lambda|}{2}$$

pour la deuxième.

On a maintenant une série de fonctions méromorphes qui converge uniformément sur les compacts. Sa somme est méromorphe sur **C** (en application du théorème de Morera, voir la démonstration du corollaire 3.3.8). De plus, la série des dérivées converge uniformément sur les compacts vers la dérivée de la somme, ce qu'on va utiliser tout de suite. □

On note $\wp$ (et on appelle « la fonction $\wp$ de Weierstrass ») la somme de cette série.

La fonction $\wp$ a un pôle (double) en chaque point du réseau Λ : on fixe un point λ et on écrit

$$\wp(z) = \frac{1}{(z-\lambda)^2} + g(z)$$

où g est holomorphe au voisinage de λ.

Elle est paire :

$$\wp(-z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{\lambda\neq 0}\left(\frac{1}{(z+\lambda)^2} - \frac{1}{z^2}\right)$$

expression dans laquelle il suffit de changer λ en $-\lambda$ pour voir qu'elle vaut aussi $\wp(z)$.

Sa dérivée est la somme de la série des dérivées, comme on l'a déjà mentionné, donc

$$\wp'(z) = -2\sum_{\lambda\in\Lambda}\frac{1}{(z-\lambda)^3}.$$

En particulier, il est clair que

$$\wp'(z+\lambda) = \wp'(z) \quad \forall z\in \mathbf{C}, \forall \lambda\in\Lambda.$$

Donc $\wp'$ est bi-périodique, de plus elle est impaire.

Proposition 5.2.4. *La fonction $\wp$ est bi-périodique.*

Démonstration. On montre que

$$\wp(z+u) = \wp(z) \text{ et } \wp(z+v) = \wp(z).$$

Comme $\wp'$ est bi-périodique, on a

$$\frac{d}{dz}\left(\wp(z+u) - \wp(z)\right) = 0$$

donc $\wp(z+u)-\wp(z)$ est constante. On calcule la constante en évaluant en $z=-u/2$ (qui n'est pas un pôle), on trouve

$$\wp\left(\frac{u}{2}\right) - \wp\left(-\frac{u}{2}\right)$$

qui est nul puisque $\wp$ est paire. On procède de même avec v. □

On résume les propriétés de $\wp$ dans une proposition :

Proposition 5.2.5. *La fonction $\wp$ est une fonction méromorphe sur $\mathbf{C}$, paire et bi-périodique. Ses pôles sont les points du réseau Λ. En plus, $\wp$ vérifie la relation*

$$\wp'(z)^2 = 4\wp(z)^3 + a_2\wp(z) + a_4$$

où a_2 et a_4 sont des constantes définies par le réseau Λ.

Démonstration. Seule la relation est à démontrer. On développe $\wp$ en série de Laurent sur un voisinage épointé de 0. Le développement a la forme

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + b_2z^2 + b_4z^4 + \cdots$$

parce que $\wp$ est paire et que

$$\wp(z) - \frac{1}{z^2} = \sum_{\lambda\neq 0}\left(\frac{1}{(z-\lambda)^2} - \frac{1}{\lambda^2}\right) = g(z),$$

avec $g(0)=0$. La fonction g permet de calculer les premiers coefficients du développement (en dérivant terme à terme) :

$$b_2 = 3\sum_{\lambda\neq 0}\frac{1}{\lambda^4}, \quad b_4 = 5\sum_{\lambda\neq 0}\frac{1}{\lambda^6}.$$

On dérive terme à terme le développement de $\wp$ pour obtenir

$$\wp'(z) = -2\frac{2}{z^3} + 2b_2z + 4b_4z^3 + \cdots,$$

relation qu'on élève au carré :

$$\left(\wp'(z)\right)^2 = \frac{4}{z^6} - 8\frac{b_2}{z^2} - 16b_4 + \cdots.$$

On a ainsi

$$\left(\wp'(z)\right)^2 - 4\wp(z)^3 = -20\frac{b_2}{z^2} - 28b_4 + \cdots,$$

ce qui fait que la fonction

$$\left(\wp'(z)\right)^2 - 4\wp(z)^3 + 20b_2\wp(z) + 28b_4$$

est holomorphe au voisinage de 0 et nulle en 0. Mais elle est bi-périodique, donc elle est holomorphe sur **C** et donc constante, et donc, enfin, nulle. □

Le fait que $\wp$ satisfasse une équation différentielle algébrique

$$(y')^2 = P(y)$$

pour un polynôme P de degré 3 fait qu'elle intervient dans la solution de nombreux problèmes de mécanique, comme par exemple la description du mouvement d'une toupie.

5.3. Produits infinis

Soit maintenant $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de fonctions continues sur un ouvert U de **C**. On veut considérer le « produit infini »

$$\prod_{n=0}^{+\infty} f_n(z),$$

c'est-à-dire la limite, si elle existe, de la suite des produits finis p_n, où

$$p_n(z) = \prod_{i=0}^{n} f_i(z).$$

On dit que *le produit infini* $\prod_n f_n$ *converge normalement* sur une partie K de U si

- on a $\lim_{n\to+\infty} f_n = 1$ uniformément sur K,
- si $a_n = f_n - 1$, la série $\sum a_n$ converge normalement sur K.

Remarque 5.3.1. De l'inégalité

$$1 + x \le e^x \quad \forall x > 0 \quad (x \in \mathbf{R}),$$

on déduit que, pour toute suite (u_n) de nombres complexes, on a

$$\prod_{i=0}^{n}(1 + |u_i|) \le \exp\left(\sum_{i=0}^{n} |u_i|\right).$$

Donc, si la série (a_n) converge normalement sur K, la suite (p_n) converge en norme sur K.

Proposition 5.3.2. *Si les fonctions f_n sont holomorphes sur U et si le produit infini $\prod_n f_n$ converge normalement sur tous les compacts de U, alors la limite $f = \prod_n f_n$ est holomorphe dans U. De plus, on a*

- $f = f_0 f_1 \cdots f_p \left(\prod_{n>p} f_n\right)$,
- *L'ensemble des zéros de f est la réunion de l'ensemble des zéros des f_n, l'ordre de multiplicité d'un zéro de f étant la somme des ordres de multiplicité de ce zéro pour chacune des fonctions f_n.*

Remarque 5.3.3. Le fait qu'un produit infini de termes ne s'annule que si l'un des termes s'annule n'a rien d'évident. C'est même faux en général (sans nos hypothèses). Par exemple le produit infini $\prod_{n\geq 1}\exp(-\frac{1}{n})$ est nul... alors qu'aucun des facteurs n'est nul. Je laisse la vérification de cette propriété en exercice, elle est bien sûr liée au fait que la série $\sum\frac{1}{n}$ diverge.

Démonstration. Les produits finis sont holomorphes, donc la fonction f est limite (uniformément sur tout compact) d'une suite de fonctions holomorphes. Elle est aussi holomorphe en application du théorème de Morera.

La formule d'associativité est claire.

Montrons maintenant l'assertion sur les zéros de f. Fixons un nombre réel $\varepsilon\in]0,\frac{1}{2}[$ et montrons qu'il existe un entier N tel que

$$m>n>N\Rightarrow |p_m-p_n|<2\,|p_n|\,\varepsilon.$$

On a en effet, pour $m>n$

$$p_m-p_n=p_n\left(\prod_{k=n+1}^{m} f_k-1\right)=p_n\left(\prod_{k=n+1}^{m}(a_k+1)-1\right),$$

ce qui permet de majorer

$$|p_m-p_n|=|p_n|\left|\prod_{k=n+1}^{m}(a_k+1)-1\right|\leq |p_n|\left(\prod_{k=n+1}^{m}(1+|a_k|)-1\right)$$

(la dernière inégalité grâce à une récurrence sur le nombre de termes du produit).

Maintenant, comme la série $\sum a_n$ converge normalement, il existe N tel que pour $n>N$, le reste $\sum_{k\geq n+1}|a_k|$ soit majoré par ε. On a alors, en utilisant les inégalités de la remarque 5.3.1,

$$\text{pour } n>N,\qquad \prod_{k=n+1}^{m}(1+|a_k|)\leq \exp\left(\sum_{k>n}|a_k|\right)<e^{\varepsilon}.$$

Enfin, en utilisant le fait que $e^{\varepsilon}<1+2\varepsilon$, on obtient l'inégalité désirée :

$$|p_m-p_n|\leq |p_n|\,(e^{\varepsilon}-1)<2\,|p_n|\,\varepsilon.$$

On en déduit sans mal que, pour $m>n>N$,

$$|p_m|\geq (1-2\varepsilon)\,|p_n|$$

et donc aussi que, pour $n>N$

$$|f(z)|\geq (1-2\varepsilon)\,|p_n(z)|\,.$$

Finalement, f ne peut s'annuler que si le produit fini p_n s'annule. □

On s'intéresse maintenant à la dérivée de f et plus exactement, comme f est un produit, à sa dérivée logarithmique.

Proposition 5.3.4. *Si les fonctions f_n sont holomorphes sur U et si le produit infini $f=\prod_n f_n$ converge normalement sur tous les compacts de U, alors la série de fonctions méromorphes $\sum f_n'/f_n$ converge normalement sur tous les compacts de U vers la dérivée logarithmique f'/f de f.*

Démonstration. Fixons un entier n et posons

$$g_m(z)=\prod_{k=n+1}^{m} f_k(z).$$

Ainsi,

$$\frac{g_m'(z)}{g_m(z)} = \sum_{k=n+1}^{m} \frac{f_k'(z)}{f_k(z)} \text{ ou } g_m'(z) = g_m(z) \sum_{k=n+1}^{m} \frac{f_k'(z)}{f_k(z)}.$$

Si on fait tendre m vers l'infini, la limite g des g_m est une fonvction holomorphe et sa dérivée g' est la limite des g_m' en application du théorème de Morera 3.3.7. On a

$$\frac{g'}{g} = \sum_{k\geq n+1} \frac{f_k'}{f_k}$$

et

$$\frac{f'}{f} = \sum_{k=0}^{n} \frac{f_k'}{f_k} + \frac{g'}{g} = \sum_{k\geq 0} \frac{f_k'}{f_k}.$$

On a donc bien, sur l'intérieur de K,

$$\frac{f'}{f} = \sum_{n} \frac{f_n'}{f_n}$$

avec convergence normale sur les compacts de l'intérieur de K et ceci pour tout K compact de U. □

Exemple, développement de la fonction sinus. L'exemple le plus simple qu'on puisse imaginer est celui du produit infini

$$f(z) = z \prod_{n\geq 1} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right).$$

Ene effet, ce produit converge normalement sur tous les compacts puisque la série numérique $\sum 1/n^2$ est convergente.

En application des résultats précédents (proposition 5.3.2), la fonction f est entière et elle a pour zéros (simples) toutes les valeurs entières de z.

On calcule sa dérivée logarithmique en utilisant la proposition 5.3.4 :

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{1}{z} + \sum_{n\geq 1} \frac{2z}{z^2 - n^2}.$$

Nous avons déjà remarqué (remarque 5.1.4) l'identité

$$\frac{\pi}{\mathrm{tg}\pi z} = \frac{1}{z} + \sum_{n\geq 1} \frac{2z}{z^2 - n^2}.$$

On a alors, en posant $g(z) = \sin(\pi z)$, les égalités

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{\pi}{\mathrm{tg}\pi z} = \frac{g'(z)}{g(z)}.$$

Donc $f(z) = C \sin \pi z$ et il ne reste plus qu'à déterminer la constante C. Par définition de f, on a

$$\lim_{z\to 0} \frac{f(z)}{z} = 1.$$

Comme $\sin \pi z/z$ tend vers π, on en déduit que $C = \dfrac{1}{\pi}$. En conclusion, on a obtenu la formule

$$\frac{\sin \pi z}{\pi z} = \prod_{n\geq 1} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right).$$

□

5.4. Exercices

5.4.1. Montrer que

$$\frac{\pi}{\cos \pi z} = \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}(2n-1)}{\left(n-\frac{1}{2}\right)^2 - z^2}$$

En déduire que l'on a

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{2n+1} + \cdots.$$

5.4.2. Soit τ un nombre complexe tel que $\mathrm{Im}(\tau) > 0$ et soit $q = e^{\pi i \tau}$. Montrer que la série

$$\sum_{-\infty \leq n \leq +\infty} (-1)^n q^{n^2} e^{2\pi n i z}$$

converge uniformément sur tout compact de $\mathbf{C}$.

On désigne par ϑ la somme de cette série. Montrer que

$$\begin{aligned} \vartheta(z+1) &= \vartheta(z), \\ \vartheta(z+\tau) &= -q^{-1} e^{-2i\pi z} \vartheta(z). \end{aligned}$$

Montrer que ϑ n'est pas identiquement nulle. On pourra montrer par exemple que

$$\int_0^1 |\vartheta(x)|^2\, dx = 1 + 2 \sum_{n\geq 1} |q|^{n^2}.$$

Montrer que les nombres $m + \left(n + \frac{1}{2}\right)\tau$ sont des zéros de ϑ. En évaluant l'intégrale de la fonction ϑ'/ϑ sur le contour d'un parallélogramme de périodes bien choisi, montrer que ϑ n'a pas d'autre zéro (on pourra utiliser le théorème de Rouché, ici l'exercice 6.3.4).

5.4.3. Montrer que si

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + a_2 z^2 + a_4 z^4 + \cdots + a_{2n} z^{2n} + \cdots$$

est le développement de Laurent de la fonction $\wp$ à l'origine, l'équation différentielle vérifiée par $\wp$ permet de déterminer par récurrence les coefficients a_{2n} avec $n \geq 3$ comme polynômes en a_2 et a_4. Déterminer effectivement a_6 et a_8.

5.4.4. Pour chaque entier n, on considère la fonction holomorphe g_n définie par

$$g_n(z) = z(1+z)\left(1+\frac{z}{2}\right)\cdots\left(1+\frac{z}{n}\right) n^{-z}.$$

On pose

$$f_n(z) = \frac{g_n(z)}{g_{n-1}(z)}.$$

Soit log la détermination principale du logarithme.

(1) Montrer que la série $\sum_{n\geq 1} \log f_n(z)$ converge normalement sur tout compact de $\mathbf{C}$.

(2) En déduire que la suite de fonctions g_n converge normalement sur tout compact de $\mathbf{C}$ vers une fonction holomorphe $g(z)$.

(3) La fonction Γ est définie par $\Gamma(z) = \dfrac{1}{g(z)}$. Montrer qu'elle est méromorphe sur $\mathbf{C}$. Déterminer ses pôles et leur ordre.

5.4.5. On rappelle que la suite $(1+\cdots+\frac{1}{n}-\log n)$ converge vers une limite finie, la *constante d'Euler*, notée γ. Montrer que

$$\Gamma(z)=\frac{e^{-\gamma z}}{z}\prod\left(1+\frac{z}{n}\right)^{-1}e^{\frac{z}{n}}.$$

En déduire que $\Gamma(z)\Gamma(1-z)=\pi/\sin\pi z$. Calculer $\Gamma(\frac{1}{2})$.

5.4.6. Montrer que, pour $\mathrm{Ré}\, z>0$,

$$\Gamma(z)=\int_0^{+\infty}e^{-t}t^{z-1}dt.$$

5.4.7. Montrer la relation fonctionnelle

$$\Gamma(z)\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}2^{1-2z}\Gamma(2z).$$

On pourra considérer la fonction

$$F(z)=\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}+\frac{\Gamma'\left(z+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right)}-2\frac{\Gamma'(2z)}{\Gamma(2z)}$$

et montrer qu'elle est constante.

5.4.8. On cherche à déterminer toutes les fonctions holomorphes g sur $\mathbf{C}$ ayant $-\mathbf{N}$ comme ensemble de zéros simples, vérifiant $g(1)=1$ et telles que

$$\sqrt{\pi}g(z)g\left(z+\frac{1}{2}\right)=2^{2z-1}g(2z).$$

Soient g_1 et g_2 deux telles fonctions. Montrer que le rapport $h=g_1/g_2$ est holomorphe sur $\mathbf{C}$ et vérifie

$$h(1)=1 \qquad \text{et} \qquad h(z)h\left(z+\frac{1}{2}\right)=h(2z).$$

Montrer que h ne s'annule pas. En défuire qu'il existe une fonction f holomorphe sur $\mathbf{C}$ telle que

$$h=e^f \qquad \text{et} \qquad f(1)=0.$$

En déduire les relations fonctionnelles vérifiées par f, puis par f'. Montrer que f' est constante, en déduire f, h et résoudre le problème.

5.4.9. On utilise les notations de l'exercice 5.4.2. Montrer que le produit infini

$$\prod_{n\geq 1}\left(\left(1-q^{2n-1}e^{2i\pi u}\right)\left(1-q^{2n-1}e^{-2i\pi u}\right)\right)$$

définit une fonction $f(u)$ holomorphe dans le plan de la variable complexe u. Quels sont les zéros de f ? Montrer que f/ϑ est doublement périodique et entière. En déduire que

$$f(u)=c\cdot\vartheta(u)$$

où c est une constante.

5.4.10. Un théorème de Weierstrass. Soit $(\lambda_k)_{k\in\mathbf{N}}$ une suite de nombres complexes. On se demande s'il existe une fonction holomorphe sur $\mathbf{C}$ dont les zéros sont les λ_k.

(1) On suppose la suite (λ_k) bornée. Le problème a-t-il une solution ?

(2) Pensez-vous que la formule $\prod(z-\lambda_k)$ donne une solution ?

(3) On suppose maintenant que
$$\lim_{k\to+\infty}|\lambda_k| = +\infty$$
et que tous les λ_k sont différents de 0. Pour tout $k \geq 1$, on considère la fonction E_k définie par
$$E_k(z) = \exp\left[\frac{z}{\lambda_k} + \frac{z^2}{2\lambda_k^2} + \cdots + \frac{z^k}{k\lambda_k^k}\right].$$
Supposons que z vérifie $|z| \leq R$. Montrer que, si k est assez grand, on a $|\lambda_k| > 2\,|z|$ et, en appelant log la détermination principale du logarithme, que la fonction
$$\log\left[\left(1-\frac{z}{\lambda_k}\right)E_k(z)\right]$$
est bien définie. Montrer la majoration
$$\left|\log\left[\left(1-\frac{z}{\lambda_k}\right)E_k(z)\right]\right| \leq \left|\frac{z}{\lambda_k}\right|^k.$$
En déduire que la série
$$\sum\log\left[\left(1-\frac{z}{\lambda_k}\right)E_k(z)\right]$$
converge uniformément sur les compacts de $\mathbf{C}$. Que peut-on dire du produit infini
$$\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{\lambda_k}\right)E_k(z)?$$

Résoudre le problème pour une suite générale (λ_k) tendant en module vers l'infini (et dont peut-être certains termes sont nuls).

(4) On a construit une fonction entière f avec un zéro en chaque λ_k. Pensez-vous que la fonction f se prolonge en une fonction holomorphe sur $\widehat{\mathbf{C}}$? méromorphe sur $\widehat{\mathbf{C}}$?

5.4.11. Existe-t-il une fonction analytique f définie sur un ouvert connexe U contenant 0 et telle que, pour tout n tel que $1/n \in U$,
$$f\left(\frac{1}{n}\right) = e^{-n}.$$

CHAPITRE 6

LE THÉORÈME DES RÉSIDUS

6.1. Le théorème des résidus

Commençons par définir les résidus. Soit U un ouvert de $\mathbf{C}$ et soit z_0 un point de U. Si f est holomorphe sur $U - \{z_0\}$, elle possède un développement de Laurent en z_0 :

$$f(z) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} a_n (z - z_0)^n.$$

Définition 6.1.1. Le coefficient a_{-1} de $(z - z_0)^{-1}$ dans le développement en série de Laurent de f en z_0 s'appelle le *résidu* de f en z_0. On le note $\text{Rés}(f, z_0)$.

Avant de donner une liste de propriétés (et de méthodes de calcul) des résidus, commençons par donner une notation unifiée décrivant les ordres des zéros et des pôles d'une fonction méromorphe.

Définition 6.1.2. Soit f une fonction méromorphe non identiquement nulle au voisinage de $z_0 \in \mathbf{C}$. On appelle *valuation* de f en z_0 et on note $v_{z_0}(f)$ le nombre entier

- 0 si f est holomorphe en z_0 et ne s'y annule pas,
- $n \in \mathbf{N}$ si f est holomorphe en z_0, $f(z_0) = 0$ et z_0 est un zéro d'ordre n de f,
- $-n$ ($n \in \mathbf{N}$) si f a un pôle d'ordre n en z_0.

Exemples 6.1.3

(1) Pour $f(z) = 1/(z-1)$, on a

$$v_1(f) = -1, \quad v_0(f) = 0, \quad \text{Rés}(f, 1) = 1, \quad \text{Rés}(f, 2) = 0.$$

(2) Pour $f = z^3/(z-2)^2$, on a

$$v_0(f) = 3, \quad v_2(f) = -2, \quad v_1(f) = 0, \quad \text{Rés}(f, 0) = 0, \quad \text{Rés}(f, 2) = 12$$

(cette dernière valeur s'obtient en appliquant la proposition suivante).

Proposition 6.1.4. *Soient f et g deux fonctions méromorphes sur un ouvert U de* $\mathbf{C}$ *et soit z_0 un point de U.*

(1) *Si f a un pôle simple en z_0,*

$$\text{Rés}(f, z_0) = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z).$$

Plus généralement, si z_0 est un pôle d'ordre k de f, alors

$$\text{Rés}(f, z_0) = \frac{h^{(k-1)}(z_0)}{(k-1)!} \text{ où } h(z) = (z - z_0)^k f(z).$$

(2) *Si f est holomorphe en z_0 et si g a un zéro simple en z_0, alors*
$$\text{Rés}\left(\frac{f}{g}, z_0\right) = \frac{f(z_0)}{g'(z_0)}.$$
(3) *La fonction f'/f est méromorphe sur U. Ses pôles sont les zéros et les pôles de f et*
$$\text{Rés}\left(\frac{f'}{f}, z_0\right) = v_{z_0}(f).$$

La démonstration consiste en une simple vérification, elle est laissée en exercice. □

Une application immédiate du théorème de Laurent (théorème 4.1.1) est l'écriture du coefficient a_{-1} de la série de Laurent comme une intégrale
$$2i\pi\text{Rés}(f, z_0) = \int_{C(z_0,r)} f(z)dz.$$

Le théorème des résidus est une généralisation de cette égalité : il exprime l'intégrale de fonctions le long de certains lacets à l'aide de ses résidus en ses différents points singuliers.

Théorème 6.1.5. *Soient U un ouvert élémentaire de $\mathbf{C}$, F un ensemble fini de points de U, f une fonction holomorphe sur $U - F$ et γ un lacet à valeurs dans $U - F$. Alors on a*
$$\int_\gamma f(z)dz = 2i\pi \sum_{z_0\in F} \text{Rés}(f, z_0)\text{Ind}_\gamma(z_0)$$

Démonstration. Soit $z_0 \in F$. La fonction f admet un développement de Laurent sur un disque épointé centré en z_0 et contenu dans U :
$$f(z) = \sum_{n\in\mathbf{Z}} b_{z_0,n}(z - z_0)^n.$$
On considère la « partie singulière » de f en z_0 :
$$h_{z_0}(z) = \sum_{n<0} b_{z_0,n}(z - z_0)^n.$$
On sait (voir le début du § 4.2) que cette série est normalement convergente sur les compacts de $\mathbf{C} - \{z_0\}$.

On définit maintenant
$$g(z) = f(z) - \sum_{z_0\in F} h_{z_0}(z).$$
C'est une fonction holomorphe sur $U - F$, qui, par construction, n'a pas de singularité en les points de F. Elle définit donc une fonction *holomorphe* sur U.

Mais U est un ouvert élémentaire, la fonction g y a donc une primitive holomorphe et, en particulier pour tout lacet γ, on a
$$\int_\gamma g(z)dz = 0,$$
soit
$$\int_\gamma f(z)dz = \sum_{z_0\in F} \int_\gamma h_{z_0}(z)dz.$$
Évaluons donc l'intégrale de h_{z_0}. La série définissant cette fonction est, on l'a dit, normalement convergente sur les compacts de $\mathbf{C} - \{z_0\}$ et donc
$$\begin{aligned}\int_\gamma h_{z_0}(z)dz &= \int_\gamma \sum_{n<0} b_{z_0,n}(z - z_0)^n dz\\ &= \sum_{n<0} b_{z_0,n} \int_\gamma (z - z_0)^n dz.\end{aligned}$$

Mais, si $n \neq -1$, $(z-z_0)^n$ a une primitive (à savoir $(z-z_0)^{n+1}/(n+1)$) sur $\mathbf{C}-\{z_0\}$. Donc, si $n \neq -1$,

$$\int_\gamma (z-z_0)^n dz = 0.$$

Il ne nous reste plus que

$$\int_\gamma \frac{dz}{z-z_0} = 2i\pi \mathrm{Ind}_\gamma(z_0) \text{ par définition.}$$

□

Corollaire 6.1.6. *Soit f une fonction holomorphe sur un ouvert élémentaire U de $\mathbf{C}$, soient z un point de U et γ un lacet dont l'image ne contient pas z. Alors*

$$\mathrm{Ind}_\gamma(z) f(z) = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{f(w)}{w-z}dw.$$

Démonstration. C'est le théorème des résidus (théorème 6.1.5) appliqué à la fonction

$$w \longmapsto \frac{f(w)}{w-z}$$

qui est holomorphe sur $U-\{z\}$ et dont le résidu en z est $f(z)$ (voir la proposition 6.1.4). □

C'est une généralisation de la formule de Cauchy, qui s'obtient pour les cercles centrés en z_0, cas où l'indice est 1.

Ce qui se passe à l'infini. Soit g une fonction méromorphe sur $\widehat{\mathbf{C}}$. Soit γ le cercle de centre 0 et de rayon R, où R est supposé assez grand pour que tous les pôles de g dans $\mathbf{C}$ soient à l'intérieur du disque bordé par γ. Soit h la fonction méromorphe définie par $h(u) = g\left(\frac{1}{u}\right)$. Alors on a l'égalité

$$\int_\gamma g(z)dz = -2i\pi \,\mathrm{Rés}\left(\frac{h(u)}{u^2}, 0\right).$$

Paramétrons en effet le cercle par $\gamma(t) = Re^{it}$ ($t \in [0, 2\pi]$). Par définition de l'intégrale, on a

$$\int_\gamma g(z)dz = \int_0^{2\pi} g\circ\gamma(t)\gamma'(t)dt,$$

ce qu'on peut aussi écrire

$$-\int_0^{2\pi} g\circ\gamma(t)\frac{-\gamma'(t)}{\gamma(t)^2}\gamma(t)^2 dt.$$

Si l'on pose $\delta(t) = Re^{-it}$ (c'est le cercle parcouru dans l'autre sens), soit $\delta(t) = R^2\frac{1}{\gamma(t)}$, la dernière intégrale est égale à

$$-\int_0^{2\pi} h\circ\delta(t)\frac{1}{\delta(t)^2}\delta'(t)dt = -\int_\delta \frac{h(z)}{z^2}dz.$$

On conclut en appliquant le théorème des résidus. □

Remarque 6.1.7. On peut *définir* le résidu de g en ∞ comme le résidu en 0 de $-h(u)/u^2$:

$$\mathrm{Rés}\,(g,\infty) = \mathrm{Rés}\left(-\frac{h(u)}{u^2}, 0\right).$$

Nombres de zéros et de pôles d'une fonction méromorphe. La théorème des résidus (théorème 6.1.5) et le calcul des résidus de f'/f dans la proposition 6.1.4 donnent immédiatement :

Proposition 6.1.8. *Soient U un ouvert élémentaire de $\mathbf{C}$ et f une fonction méromorphe sur U dont l'ensemble F des zéros et des pôles est* fini. *Soit γ un lacet dans $U - F$. Alors on a*

$$\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}dz = \sum_{z_0\in F} v_{z_0}(f)\mathrm{Ind}_\gamma(z_0).$$

Corollaire 6.1.9. *Soient U un ouvert élémentaire de $\mathbf{C}$ et f une fonction méromorphe sur U dont l'ensemble F des zéros et des pôles est* fini. *Soit γ un lacet dans $U - F$ dont l'indice par rapport à tous les points de F vaut* 1. *Alors*

$$\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}dz = \sum_{z_0\in F} v_{z_0}(f).$$

Le second membre de cette égalité s'interprète comme le nombre de zéros de f comptés avec multiplicités moins le nombre de pôles de f (toujours comptés avec multiplicités).

Remarque 6.1.10. Une fonction méromorphe sur $\widehat{\mathbf{C}}$ a autant de zéros que de pôles. En effte, on a démontré que toutes les fonctions méromorphes sur $\widehat{\mathbf{C}}$ sont des fractions rationnelles. On peut aussi vérifier que la valuation d'une fraction rationnelle en ∞ compense la différence des degrés du numérateur et du dénominateur.

Exemples 6.1.11

(1) La fraction rationnelle $(z^n - 1)/(z+i)$ s'annule n fois dans $\mathbf{C}$, a un pôle dans $\mathbf{C}$, elle a donc un pôle d'ordre $n-1$ en ∞ (ce qui se vérifie aisément !).

(2) De même $(z^2-1)/(z+3)^3$ a un pôle triple et deux zéros simples dans $\mathbf{C}$, elle a donc un zéro simple en ∞.

Homographies. Ce sont les « automorphismes » de la sphère de Riemann.

Corollaire 6.1.12. *Soit $f : \widehat{\mathbf{C}} \to \mathbf{C}$ une fonction méromorphe qui définit une bijection de $\widehat{\mathbf{C}}$ sur lui-même. Alors il existe des nombres complexes a, b, c et d avec $ad - bc \neq 0$ et tels que*

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d}.$$

La transformation réciproque a les mêmes propriétés.

Démonstration. Nous savons grâce à la proposition 4.3.8 que f est une fraction rationnelle. Si elle définit une bijection de $\widehat{\mathbf{C}}$ dans lui-même, elle a un seul zéro (un unique point est envoyé sur 0) et un seul pôle. Il reste à vérifier que ce zéro est simple. Soit z_0 le point où f s'annule. On écrit

$$f(z) = (z - z_0)^m g(z)$$

où g est holomorphe et ne s'annule pas au voisinage de z_0. On vérifie que, si $m \geq 2$, f n'est pas injective au voisinage de z_0. □

6.2. Applications du théorème des résidus au calcul d'intégrales

Le théorème des résidus a de nombreuses applications au calcul d'intégrales (même réelles). Le plus simple est de donner qulques familles d'exemples.

Fonctions trigonométriques. Il s'agit de calculer des intégrales de la forme

$$\int_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t)dt$$

où R est une fraction rationnelle

$$R(X,Y) = \frac{P(X,Y)}{Q(X,Y)}, \quad P, Q \in \mathbf{R}[X,Y]$$

sans pôle sur le cercle unité (c'est dire que Q ne s'annule pas sur $x^2 + y^2 = 1$, l'intégrale est une « intégrale définie »).

On pose $z = e^{it}$, de sorte que $\cos t = \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})$, *etc.* L'intégrale s'écrit

$$\int_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t)dt = \int_{C(0,1)} R\left(\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right), \frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right)\right)\frac{dz}{iz}$$

et le théorème des résidus affirme qu'elle vaut $2i\pi$ fois la somme des résidus des pôles de la fraction rationnelle

$$r(z) = \frac{1}{iz}R\left(\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right), \frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right)\right)$$

contenus à l'intérieur du disque unité.

Exemple 6.2.1. Calculons par cette méthode

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{dt}{a+\sin t} \text{ pour } a > 1.$$

Comme le dénominateur $a + \sin t$ ne s'annule pas, la méthode s'applique. Il s'agit de trouver les pôles et les résidus de la fraction rationnelle

$$r(z) = \frac{1}{iz}\frac{1}{a + \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)} = \frac{2}{z^2 + 2iaz - 1}.$$

Les deux pôles sont $z_0 = -ia + i\sqrt{a^2-1}$ et $-1/z_0$. Seul z_0 est à l'intérieur du disque unité. Le résidu de r en z_0 est

$$\frac{2z_0}{z_0^2+1} = \frac{-i}{\sqrt{a^2-1}}$$

et on trouve finalement

$$I = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2-1}}.$$

Fractions rationnelles. Dans les exemples précédents, on appliquait directement le théorème des résidus. Dans ceux étudiés maintenant, il va y avoir un passage à la limite. Il s'agit d'intégrales de la forme

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} R(t)dt$$

où $R \in \mathbf{R}(X)$ est une fraction rationnelle sans pôle réel. Il faut faire une hypothèse pour que cette intégrale existe. On peut demander que le degré du dénominateur soit au moins 2 de plus que celui du numérateur. Il est équivalent de dire que

$$\lim_{|t|\to+\infty} tR(t) = 0.$$

Pour calculer l'intégrale, on va intégrer la fonction $R(z)$ sur le bord d'un demi-disque de rayon r, centré à l'origine et contenu dans le demi-plan supérieur. Le rayon est supposé assez grand pour que tous les pôles de R soient strictement à l'intérieur du disque de rayon r.

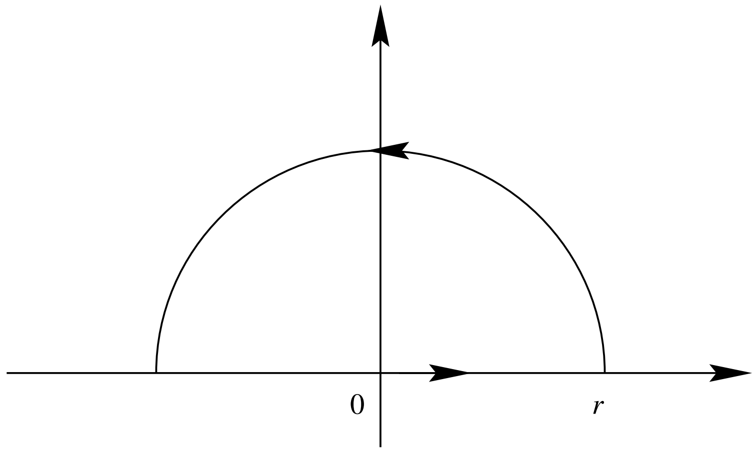

Figure 1

Le lacet « demi-cercle » est constitué du segment $[-r, r]$ de l'axe réel et du demi-cercle proprement dit. L'intégrale de R sur le segment tend vers I quand r tend vers l'infini, pour pouvoir calculer I en sommant les résidus de R en ses pôles à partie imaginaire positive, il suffirait donc que l'intégrale de R sur le demi-cercle tende vers 0 quand r tend vers l'infini. C'est ce qu'affirme le lemme facile (et un peu plus général) suivant.

***Lemme 6.2.2* (Jordan).** *Soit f une fonction continue définie dans un secteur $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$. Si*

$$\lim_{|z|\to+\infty} zf(z) = 0$$

alors

$$\lim_{r\to+\infty} \int_{\theta_1}^{\theta_2} f(re^{i\theta})ird\theta = 0.$$

Démonstration. La fonction f est continue, son module est donc borné sur l'arc de cercle de rayon r, soit $M(r)$ sa borne supérieure. On a

$$\left| \int_{\theta_1}^{\theta_2} f(re^{i\theta})ird\theta \right| \leq M(r)r(\theta_2 - \theta_1)$$

et l'hypothèse implique que $\lim_{r\to+\infty} rM(r) = 0$. □

On en déduit que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)dx = 2i\pi \sum_j \text{Rés}\left(R, z_j\right)$$

la somme étant étendue à tous les pôles z_j de R contenus dans le demi-plan supérieur.

Remarque 6.2.3. En considérant le demi-disque contenu dans le demi-plan inférieur, on obtiendrait une formule analogue avec les pôles du demi-plan inférieur

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)dx = -2i\pi \sum_j \text{Rés}\left(R, z'_j\right).$$

Le signe vient de l'indice du lacet par rapport aux pôles : on fait le tour dans l'autre sens. Il est compensé *in fine* par le fait que $z'_j = \overline{z_j}$ (R est réelle).

Exemple 6.2.4. Calculons l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^6}.$$

On remarque d'abord que l'intégrale est convergente, puis que la fonction à intégrer est paire et donc que l'intégrale considérée est la moitié de l'intégrale sur tout l'axe réel, enfin que les trois zéros de $1+z^6$ qui sont dans le demi-plan supérieur sont

$$\exp\left(i\frac{\pi}{6}\right),\quad \exp\left(i\frac{\pi}{2}\right),\quad \exp\left(i\frac{5\pi}{6}\right).$$

En appliquant la recette habituelle pour le calcul du résidu en z_0, on trouve ici $1/6z_0^5$, c'est-à-dire $-z_0/6$ (parce que $z_0^6=-1$). Finalement

$$\begin{aligned}
I &= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dt}{1+t^6}\\
&= -\frac{i\pi}{6}\left(\exp\left(i\frac{\pi}{6}\right)+\exp\left(i\frac{\pi}{2}\right)+\exp\left(i\frac{5\pi}{6}\right)\right)\\
&= \frac{\pi}{6}\left(2\sin\frac{\pi}{6}+1\right)\\
&= \frac{\pi}{3}.
\end{aligned}$$

On trouvera d'autres exemples de calculs et de méthodes de calcul dans les exercices.

6.3. Exercices

6.3.1. Calculer les résidus en $\pm i$ de $f(z)=e^{iz}/(z^2+1)$.

6.3.2. Calculer le résidu en i de $f(z)=e^{iz}/(z(z^2+1)^2)$.

6.3.3. Combien de fonctions holomorphes y a-t-il sur le disque ouvert de centre 1 et de rayon 1 qui vérifient $f(z)^2=z$?

Pour chacune d'elles, calculer le résidu en 1 de $\dfrac{f(z)}{z-1}$.

6.3.4. Théorème de Rouché.

(1) Soient γ_1 et γ_2 deux lacets ($\mathcal{C}^1$ par morceaux) dans $\mathbf{C}$. On suppose que 0 n'est pas dans l'image de γ_1 et que

$$|\gamma_2(t)|<|\gamma_1(t)| \text{ pour tout } t.$$

Montrer que $t\mapsto\delta(t)=1+\dfrac{\gamma_2(t)}{\gamma_1(t)}$ définit un lacet δ dans $\mathbf{C}$, ne passant pas par 0 et tel que $\mathrm{Ind}_\delta(0)=0$. En déduire que

$$\mathrm{Ind}_{\gamma_1+\gamma_2}(0)=\mathrm{Ind}_{\gamma_1}(0).$$

(2) Soient f et g deux fonctions holomorphes sur un ouvert U de $\mathbf{C}$. Soit K un compact contenu dans U et dont le bord Γ admet un paramétrage $\mathcal{C}^1$ par morceaux. On suppose que

$$|g(z)|<|f(z)| \text{ pour tout } z\in\Gamma.$$

Montrer que f et g ont le même nombre de zéros (comptés avec multiplicité) dans K.

(3) Combien le polynôme $z^8-4z^5+z^2-1$ a-t-il de racines dans le disque unité $|z|\le 1$?

6.3.5. Calculer les intégrales réelles suivantes :

(1) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x\sin^2(\pi x)dx}{(x^2+1)(x^2+2)}$

(2) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(a+\cos\theta)^n}$ pour $n = 1,2$ et $|a| > 1$

(3) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^{2k}dt}{1+t^{2n}}$ pour $0 \leq k < n$.

(4) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2+1}dt$.

6.3.6. Calculer

$$\int_E \frac{dz}{1+z^4}$$

pour E l'ellipse d'équation $x^2 - xy + y^2 + x + y = 0$.

6.3.7. Pour tout $R > 1$, on considère le triangle

$$T_R = \{z \in \mathbf{C} \mid \text{Ré}(z) \leq R, \text{Im}(z) \leq \text{Ré}(z), \text{Im}(z) \geq -\text{Ré}(z)\}$$

et on pose

$$I_R = \frac{1}{2i\pi}\int_{\partial T_R} \frac{e^{-z}}{(1-z^4)^2}dz.$$

Calculer $I = \lim_{R\to+\infty} I_R$. Déterminer une fonction $f : [0,+\infty[\to \mathbf{R}$ telle que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = I.$$

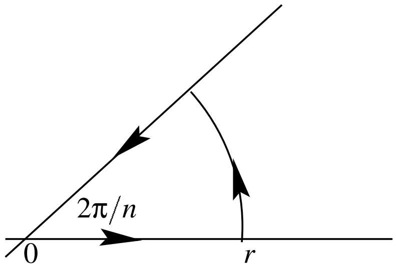

Figure 2

6.3.8. Pour $n > \alpha + 1$, calculer, à l'aide du contour représenté sur la figure 2, l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} x^\alpha \frac{dx}{1+x^n}.$$

6.3.9. En utilisant le contour indiqué sur la figure 3, calculer

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}dt.$$

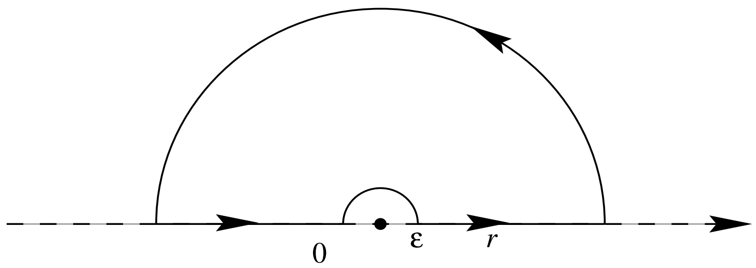

Figure 3

6.3.10. Le but de cet exercice est de calculer l'intégrale réelle

$$\int_0^{+\infty} \frac{\log x}{(1+x)^3} dx$$

(log désigne le logarithme népérien).

(1) Montrer qu'il existe des déterminations du logarithme sur l'ouvert

$$U = \left\{ z \in \mathbf{C} \mid z \notin \mathbf{R}^+ \right\}.$$

Que peut-on dire de la différence de deux telles déterminations ? Montrer qu'il en existe une unique, que l'on notera log dans cet exercice, vérifiant $\log(-1) = i\pi$.

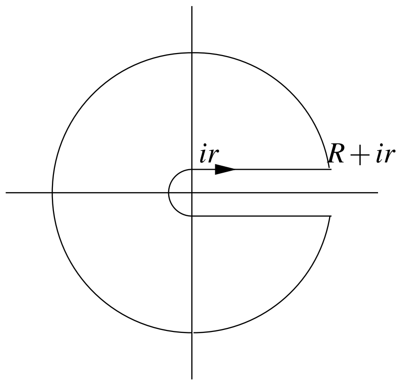

Figure 4

(2) On considère le contour Γ représenté sur la figure 4. Les nombres réels r et R vérifient $0 < r < 1 < R$. Quelle est la limite de l'intégrale

$$\int_\Gamma \frac{(\log z)^2}{(1+z)^3} dz$$

quand R tend vers $+\infty$ et r vers 0 ?

(3) En déduire la valeur de l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{\log x}{(1+x)^3} dx \quad \left(\text{et celle de } \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x)^3} \right).$$

6.3.11. Avec les mêmes notations (et la même méthode) que dans l'exercice précédent, évaluer

$$\int_\Gamma \frac{\log z}{z^3+z^2+z+1}dz$$

et en déduire la valeur de

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^3+x^2+x+1}.$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] J.-B. Bost. *Fonctions analytiques d'une variable complexe*. École polytechnique, 1997.

[2] H. Cartan. *Théorie élémentaire des fonctions analytiques d'une ou plusieurs variables complexes*. Hermann, Paris, 1961.

[3] W. Rudin. *Analyse réelle et complexe*. Masson, 1975.

[4] R. Silverman. *Introductory complex analysis*. Dover, 1972.

[5] J.-L. Verley. Fonctions analytiques. *Encyclopædia Universalis*, 1973.