

## EXERCICE

On pose  $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : -1 < \operatorname{Re} z < 1\}$ .

a) Déterminer une représentation conforme  $\Phi$  de  $U = D(0, 1)$  sur  $\Omega$  et vérifiant  $\Phi(0) = 0$  et  $\Phi'(0) > 0$ . Calculer  $\Phi'(0)$ .

b) Montrer que  $\operatorname{Re} \Phi$  est une fonction harmonique bornée dans  $U$  dont la fonction harmonique conjuguée  $v$  qui vérifie  $v(0) = 0$  n'est pas bornée dans  $U$ .

c) Soit  $g \in H(U)$  l'ensemble des fonctions holomorphes dans  $U$  tel que  $g$  vérifie  $|\operatorname{Re} g| < 1$  dans  $U$  et  $g(0) = 0$ . Montrer que quel que soit  $re^{i\theta} \in U$  on a

$$|g(re^{i\theta})| \leq 1 + \frac{2}{\pi} \operatorname{Log} \frac{1+r}{1-r}$$