Sur la théorie des idéaux des algèbres de fonctions holomorphes avec poids.

Introduction : Le but de ce travail est de comparer et de résumer les articles de L. Hörmander [3], de J.J. Kelleher – B.A. Taylor [4] et de H. Skoda [5] sur la théorie L^2 des idéaux d'algèbres de fonctions holomorphes.

Dans la première partie, nous exposons le procédé homologique d'Hörmander utilisant le complexe de Koszul. Nous nous sommes efforcés de décrire toutes les formes différentielles qui interviennent dans le calcul de façon intrinsèque.

Dans la deuxième partie, nous présentons la méthode directe de H. Skoda, qui reprend dans leurs fondements les techniques L^2 d'Hörmander, et qui permet d'obtenir des résultats optimaux ; mais au lieu d'utiliser comme dans Skoda [5] (§ 2, p. 551) les délicates inégalités L^2 pour l'opérateur ∂ sur un ouvert pseudo-convexe borné de classe C^∞ (voir Hörmander [1] p. 104, Th. 2.1.4 et p. 100 Prop. 2.1.1) nous nous contentons d'estimations plus faibles, faisant intervenir des poids multiples, et obtenons finalement les mêmes résultats au prix de passages à la limite supplémentaires.

A) Le procédé homologique d'Hörmander ([3] et [4])

1. Préliminaires d'algèbre extérieure

Soit $\Lambda_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^p)$ l'algèbre extérieure de $\mathbb{C}^p$ sur $\mathbb{C}$ (p entier ≥ 1).

On munit $\mathbb{C}^p$ et $\Lambda(\mathbb{C}^p)$ de leurs structures hermitiennes naturelles, que nous rappelons ci-dessous.

Si $a = (x_1, x_2, \dots x_p) \in \mathbb{C}^p$, $b = (y_1, y_2, \dots y_p) \in \mathbb{C}^p$,

nous posons $(a|b) = \sum_{i=1}^{p} x_i \overline{y_i}$.

$\mathbb{C}^p$ admet la base orthonormée $(\varepsilon_i)_{1\leq i\leq p}$ où $\varepsilon_i = (0, \dots, 1, 0, \dots 0)$ le 1 étant en i-ème position.

D'autre part le produit scalaire hermitien sur $\Lambda(\mathbb{C}^p)$ est défini sur les éléments décomposables par :

$$(a_1 \wedge a_2 \wedge \dots \wedge a_s \mid b_1 \wedge b_2 \wedge \dots \wedge b_t) \begin{array}{ll} = 0 & \text{si } 0 \leq s, t \leq p,\ s \neq t \\ = \det(a_i \mid b_j) & \text{si } 0 \leq s = t \leq p \end{array}$$

(avec a_i, $b_j \in \mathbb{C}^p$)

Posons $\varepsilon_I = \varepsilon_{i_1} \wedge \varepsilon_{i_2} \wedge \dots \wedge \varepsilon_{i_s}$

si I est un multi-indice $I = (i_1, i_2, \dots i_s)$ $\quad 1 \leq i_1, i_2, \dots i_s \leq p$.

$\Lambda^s(\mathbb{C}^p)$ admet la base orthonormée (ε_I) I décrivant l'ensemble des multi-indices croissants : $1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_s \leq p$;

de plus $\Lambda(\mathbb{C}^p)$ est somme directe orthogonale des $\Lambda^s(\mathbb{C}^p)$ $0 \leq s \leq p$.

Définissons sur $\Lambda(\mathbb{C}^p)$ un produit intérieur bilinéaire, noté $\lrcorner$, par :

$$(a \lrcorner b \mid c) = (b \mid \bar{a} \wedge c) \quad \text{pour tous } a, b, c \in \Lambda(\mathbb{C}^p)$$

(la conjugaison s'étendant par linéarité de $\mathbb{C}^p$ à $\Lambda(\mathbb{C}^p)$).

Lorsque a est de degré s, b de degré $t \geq s$ $a \lrcorner b$ est de degré $t-s$ (si $t < s$ $a \lrcorner b = 0$)

Calculons en particulier $a \wedge b$, $a \lrcorner b$ lorsque

$$a = \sum_{i=1}^{p} a_i \varepsilon_i \qquad b = \sum_{|I|=s}{}' b_I \varepsilon_I$$

(le Σ' indiquant que la sommation se fait sur les multi-indices croissants ; $|I| = s$ est le degré de I)

alors $$a \wedge b = \sum_{i=1}^{p} \sum_{|I|=s}{}' a_i b_I \varepsilon_{iI}$$

$$a \lrcorner b = \sum_{i=1}^{p} \sum_{|I|=s}{}' a_i b_I \varepsilon_i \lrcorner \varepsilon_I$$

or $(\varepsilon_i \lrcorner \varepsilon_I \mid \varepsilon_J) = (\varepsilon_I \mid \varepsilon_{iJ})$ pour tout multi-indice J

On voit que $$\begin{aligned} \varepsilon_i \lrcorner \varepsilon_I &= 0 \quad \text{si } i \notin I \\ \varepsilon_i \lrcorner \varepsilon_{iJ} &= \varepsilon_J \end{aligned}$$

Définissons b_I pour tout multi-indice I de sorte que b_I soit une fonction antisymétrique de I.

Il vient alors $$a \lrcorner b = \sum_{i=1}^{p} \sum_{|J|=s-1}{}' a_i b_{iJ} \varepsilon_J$$

<u>Lemme 1</u> : Pour tous $a, b_1, \ldots b_s \in \mathbb{C}^p$, $b \in \Lambda^s(\mathbb{C}^p)$, $c \in \Lambda^{s'}(\mathbb{C}^p)$, $d \in \Lambda^{s''}(\mathbb{C}^p)$ on a :

(i) $b \lrcorner (b \lrcorner c) = 0$ si s impair

(ii) $b \lrcorner (c \lrcorner d) = (-1)^{ss'} (b \wedge c) \lrcorner d$

(iii) $a \lrcorner (b_1 \wedge \ldots \wedge b_s) = \sum_{k=1}^{s} (-1)^{k-1} (a \mid \bar{b}_k)\, b_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{b_k} \wedge \ldots \wedge b_s$.

(iv) $a \lrcorner (b \wedge c) = (a \lrcorner b) \wedge c + (-1)^s\, b \wedge (a \lrcorner c)$

<u>Démonstration</u> : (i) résulte immédiatement de ce que $\bar{b} \wedge \bar{b} = 0$

(ii) qui généralise (i) est également très facile à vérifier.

(iii) Soit $c_2 \wedge \ldots \wedge c_s$ un élément décomposable de $\Lambda^{s-1}(\mathbb{C}^p)$; on a par définition :

$$(a \lrcorner (b_1 \wedge \dots \wedge b_s) \mid c_2 \wedge \dots \wedge c_s) = (b_1 \wedge \dots \wedge b_s \mid \bar{a} \wedge c_2 \wedge \dots \wedge c_s)$$
$$= \det (b_i \mid c_j)_{1 \leq i,j \leq s} \quad \text{avec} \quad c_1 = \bar{a}$$

En développant ce déterminant par rapport à la première colonne il vient :

$$\det (b_i \mid c_j) = \sum_{k=1}^{s} (-1)^{k-1} (b_k \mid \bar{a}) \det (b_i \mid c_j)_{\substack{i \neq k \\ 2 \leq j \leq s}}$$
$$= \Big(\sum_{k=1}^{s} (-1)^{k-1} (a \mid \overline{b_k})\, b_1 \wedge \dots \wedge \overline{b_k} \wedge \dots \wedge b_s \mid c_2 \wedge \dots \wedge c_s \Big)$$

enfin (iv) est une conséquence immédiate de (iii) .

Désignons par E' E'' F les espaces :

$E' = \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}} (\mathbb{C}^n, \mathbb{C}) =$ dual de $\mathbb{C}^n$

$E'' = \overline{\mathrm{Hom}}_{\mathbb{C}} (\mathbb{C}^n, \mathbb{C}) =$ anti-dual de $\mathbb{C}^n$

$F = \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}} (\mathbb{C}^n, \mathbb{C}) = E' \oplus E''$

E' E'' sont munis des structures hermitiennes duales de celle de $\mathbb{C}^n$, et F est considéré comme la somme orthogonale de E' et E''.

$\Lambda_{\mathbb{C}}(F)$ est doté d'une structure hermitienne comme $\Lambda(\mathbb{C}^p)$.

Notons $\Lambda^{r_1, r_2} F$ le sous-espace de $\Lambda^r F$ $(r = r_1 + r_2)$ engendré par les produits extérieurs d'éléments de $\Lambda^{r_1} E'$ et de $\Lambda^{r_2} E''$.

Posons enfin $\ell^s_r = \ell^s_r (p, n) = \Lambda^r_{\mathbb{C}} F \otimes_{\mathbb{C}} \Lambda^s_{\mathbb{C}} (\mathbb{C}^p)$

$$\ell^s_{r_1, r_2} = \ell^s_{r_1, r_2} (p, n) = \Lambda^{r_1, r_2}_{\mathbb{C}} F \otimes_{\mathbb{C}} \Lambda^s_{\mathbb{C}} (\mathbb{C}^p)$$

(resp. ℓ_r ℓ_{r_1, r_2} ℓ^s ℓ en supprimant les indices s ou r, r_1, r_2 aux seconds membres .)

ℓ^s_r peut être considéré comme l'espace des formes r-linéaires sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\Lambda^s(\mathbb{C}^p)$.

Si $u, v \in \Lambda F$ et $a, b \in \Lambda(\mathbb{C}^p)$ on pose

$$(u \otimes a \mid v \otimes b) = (u \mid v)(a \mid b) \quad ,$$

ce qui définit un produit scalaire hermitien sur ℓ .

ℓ est clairement la somme directe orthogonale des espaces ℓ^s_r ; ℓ^s_r est lui-même somme orthogonale des $\ell^s_{r_1, r_2}$ $r_1 + r_2 = r$.

Les lois $\wedge$ et $\lrcorner$ sur $\Lambda(\mathbb{C}^p)$ et $\wedge$ sur ΛF s'étendent en des produits bilinéaires $\ell \times \ell \longrightarrow \ell$.

De façon précise on considère :

$$\begin{array}{ccc} \ell \times \ell & \xrightarrow{\ \wedge\ } & \ell \\ (u\otimes a\,,\ v\otimes b) & \longmapsto & (u\otimes a)\wedge(v\otimes b) = (u\wedge v)\otimes(a\wedge b) \end{array}$$

et

$$\begin{array}{ccc} \ell \times \ell & \xrightarrow{\ \lrcorner\ } & \ell \\ (u\otimes a\,,\ v\otimes b) & \longmapsto & (u\otimes a)\lrcorner(v\otimes b) = (u\wedge v)\otimes(a\lrcorner b) \end{array}$$

(attention c'est bien $u\wedge v$ et non $u\lrcorner v$!)

Le lemme 1 donne alors, après des vérifications évidentes :

<u>Lemme 1'</u> : Pour tous $f\in\ell^1_p$, $g\in\ell^s_r$, $h\in\ell^{s'}_{r'}$, $k\in\ell^{s''}_{r''}$

(i) $g\lrcorner(g\lrcorner h) = 0$ si s impair

(ii) $g\lrcorner(h\lrcorner k) = (-1)^{ss'}(g\wedge h)\lrcorner k$

(iii) $f\lrcorner(g\wedge h) = (f\lrcorner g)\wedge h + (-1)^{s+rp}\, g\wedge(f\lrcorner h)$

2. <u>Le théorème principal</u>

Soient Ω un ouvert pseudo-convexe de $\mathbb{C}^n$ et Φ un ensemble de fonctions plurisousharmoniques sur Ω.

Nous supposerons que si $\varphi_1, \varphi_2\in\Phi$ alors $\varphi_1+\varphi_2\in\Phi$ et $\mathrm{Sup}(\varphi_1,\varphi_2)\in\Phi$.

Fixons d'abord nos notations :

<u>Définition 1</u> :

(i) $A_\Phi = A_\Phi(\Omega)$ désignera l'anneau des fonctions analytiques sur Ω telles qu'il existe une constante $C = C(f)$ et une fonction $\varphi\in\Phi$:

$$|f(z)| \leq C\exp(\varphi(z)) \text{ pour tout } z\in\Omega$$

(ii) $W_\Phi = W_\Phi(\Omega)$ est l'ensemble des fonctions mesurables sur Ω
(ou plus précisément l'ensemble des classes de fonctions mesurables égales presque partout)
telles qu'il existe une fonction $\varphi\in\Phi$:

$$\int_\Omega |f(z)|^2\exp(-\varphi(z))\,d\lambda(z) < +\infty$$

(λ désignant la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{C}^n$)

W_Φ est un module sur A_Φ.

Nous supposerons que les hypothèses suivantes sont satisfaites :

<u>Hypothèse 1</u> : (i) les polynômes appartiennent à A_Φ

(ii) $A_\Phi = \{f\in W_\Phi\ ;\ \bar\partial f = 0\} = W_\Phi\cap A(\Omega)$

(iii) Si $f\in A_\Phi$ alors $\partial f/\partial z_k \in A_\Phi$ $\quad 1\leq k\leq n$.

On vérifie aisément que les conditions suivantes sont suffisantes (voir [3] p. 944, lemmes 2 et 3) :

<u>Hypothèse 2</u> : (i) les polynômes appartiennent à A_Φ

(ii) Pour tout $\varphi \in \Phi$, il existe des constantes K_1, K_2 et $\psi \in \Phi$ telles que :

$$z \in \Omega \text{ et } |z-\zeta| \leq K_1 \exp(-\psi(z)) \Rightarrow \zeta \in \Omega \text{ et } \varphi(\zeta) \leq \psi(z) + K_2 .$$

(la condition (ii) entraîne d'ailleurs que Ω est pseudo-convexe)

Si f est une forme de bidegré (r_1, r_2) à valeurs dans $\Lambda^s(\mathbb{C}^p)$ et dont les coefficients sont des distributions (c'-à-d un élément de $\mathcal{D}'(\Omega) \otimes_{\mathbb{C}} \ell^s_{r_1,r_2}(p,n)$) on calcule ∂f $\bar\partial f$ composante à composante :

plus précisément si $f = u \otimes a$ où
u est une forme de bidegré (r_1, r_2)
a un vecteur constant de $\Lambda^s(\mathbb{C}^p)$

alors $\partial f = \partial u \otimes a$, $\bar\partial f = \bar\partial u \otimes a$.

<u>Lemme 2</u> : Soient $g : \Omega \longrightarrow \ell^s_r$ une forme C^∞ et $h : \Omega \longrightarrow \ell^{s'}_{r'}$ une forme dont les coefficients sont des distributions ;

alors (i) $\bar\partial(g \wedge h) = \bar\partial g \wedge h + (-1)^r g \wedge \bar\partial h$

(ii) $\bar\partial(g \perp h) = \bar\partial g \perp h + (-1)^r g \perp \bar\partial h$

<u>Démonstration</u> : il suffit de vérifier (i) et (ii) lorsque :

$g = u \otimes a$, $h = v \otimes b$
a et b étant des vecteurs constants de $\Lambda^s(\mathbb{C}^p)$, $\Lambda^{s'}(\mathbb{C}^p)$.

Dans ce cas (i) et (ii) proviennent de ce que

$$\bar\partial(u \wedge v) = \bar\partial u \wedge v + (-1)^r u \wedge \bar\partial v ,$$

et le lemme 2 reste inchangé si l'on remplace $\bar\partial$ par ∂ ou par d.

Soit $L^s_r = L^s_r(\Omega)$ l'espace des formes différentielles f de bidegré $(0,r)$ sur Ω à valeurs dans $\Lambda^s(\mathbb{C}^p)$ telles qu'il existe une fonction $\varphi \in \Phi$:

$$\int_\Omega |f(z)|^2 \exp(-\varphi(z))\, d\lambda(z) < +\infty$$

(autrement dit les éléments de L^s_r sont des applications mesurables $\Omega \longrightarrow \ell^s_{0,r}(p,n)$ dont toutes les coordonnées appartiennent à W_Φ.)

L'opérateur $\bar\partial : L^s_r \longrightarrow L^s_{r+1}$ est fermé et à domaine dense (par définition $f \in \operatorname{Dom} \bar\partial$ si $\bar\partial f \in L^s_{r+1}$.)

Soient maintenant $g_1, g_2, \dots g_p$ p fonctions <u>non toutes nulles</u> de A_ϕ ; on leur associe :

$$g = (g_1, g_2, \dots g_p) : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}^p \simeq \ell^1_{,0}(p,n)$$

Le théorème 1 ci-dessous que nous cherchons à obtenir fournit une condition suffisante pour qu'un élément $h \in A_\phi$ appartienne à l'idéal $J(g)$ de A_ϕ engendré par $g_1, \dots g_p$.

La démonstration utilise le complexe de Koszul de g, défini comme suit :

Si $h \in L^{s+1}_r$ on pose $P_g h = g \lrcorner h \in L^s_r$

Explicitement $P_g h = \sum_{i=1}^{p} \sum'_{|I|=s} g_i h_{iI} \otimes \varepsilon_I$

lorsque $h = \sum'_{|J|=s+1} h_J \otimes \varepsilon_J$ $\quad h_J \in \Lambda^{0,r} F$.

D'après le lemme 1' (i) on a $P_g^2 = 0$

et en vertu du lemme 2 (ii) $\bar\partial P_g = P_g \bar\partial$
(car les g_i sont holomorphes .)

On a donc le double complexe suivant :

$$\begin{tikzcd}
 & {} \arrow[d, "\bar\partial"] & {} \arrow[d, "\bar\partial"] & \\
{} \arrow[r, "P_g"] & L^{s+1}_r \arrow[r, "P_g"] \arrow[d, "\bar\partial"] & L^s_r \arrow[r, "P_g"] \arrow[d, "\bar\partial"] & {} \\
{} \arrow[r, "P_g"] & L^{s+1}_{r+1} \arrow[r, "P_g"] \arrow[d, "\bar\partial"] & L^s_{r+1} \arrow[r, "P_g"] \arrow[d, "\bar\partial"] & {} \\
 & {} & {} &
\end{tikzcd}$$

Dans le lemme 5 et dans la proposition 1, nous aurons besoin que $|g|$ ne s'annule pas dans Ω .
Comme ce n'est généralement pas le cas, choisissons une fonction g_i non identiquement nulle, et introduisons $\omega = \Omega \setminus g_i^{-1}(\{0\})$.

ω est pseudo-convexe et d'après Hörmander [2] p. 94, Th 4.4.2 :

<u>Lemme 3</u> : Soit f une forme de bidegré $(q, r+1)$ dans ω, à coefficients localement de carré intégrable, telle que $\bar\partial f = 0$ et ψ une fonction plurisousharmonique telle que :

$$\int_\omega |f|^2 e^{-\psi} \, d\lambda < +\infty \ .$$

Alors il existe une forme h de bidegré (q,r) telle que $\bar\partial h = f$ et

$$\int_\omega |h|^2 e^{-\psi} (1+|z|^2)^{-2} \, d\lambda \leq \frac{1}{2} \int_\Omega |f|^2 e^{-\psi} \, d\lambda \ .$$

D'après l'hypothèse 1 (i) le lemme 3 entraîne aussitôt :

<u>Lemme 4</u> : Pour toute forme $f \in L^s_{r+1}$ telle que $\bar\partial f = 0$ dans ω il existe une forme $h \in L^s_r$ solution de l'équation $\bar\partial h = f$ sur ω.
(Noter que $\Omega \setminus \omega$ est de mesure nulle)

<u>Lemme 5</u> : Soient $r, s \geq 0$ $k \geq 1$ des entiers,
et soit $f \in L^s_r$ telle que $P_g f = 0$ et $f|g|^{-k} \in L^s_r$;
(i) alors il existe $h \in L^{s+1}_r$ telle que $P_g h = f$ et $h|g|^{1-k} \in L^{s+1}_r$.
(ii) Si de plus $\bar\partial f = 0$ dans ω, on peut choisir h de sorte que $\bar\partial h_{|\omega} \cdot |g|^{2-k} \in L^{s+1}_{r+1}$
($\bar\partial h_{|\omega}$ est la restriction de la distribution $\bar\partial h$ à ω)

<u>Démonstration</u> : (i) On prend $h = \frac{\bar g}{|g|^2} \wedge f$

$|h| \leq |f|\,|g|^{-1}$ donc $h\,|g|^{1-k} \in L^{s+1}_r$ et $h \in L^{s+1}_r$

De plus
$$P_g h = g \lrcorner \left(\frac{\bar g}{|g|^2} \wedge f\right) = \frac{g \lrcorner \bar g}{|g|^2} \wedge f - \frac{\bar g}{|g|^2} \wedge (g \lrcorner f) \qquad (\text{lemme } 1'\ (\text{iii}))$$

soit $P_g h = f$ puisque $g \lrcorner \bar g = |g|^2$ (lemme 1 (iii))
et $g \lrcorner f = P_g f = 0$ par hypothèse

(ii) Si $\bar\partial f_{|\omega} = 0$ alors $\bar\partial h = \bar\partial\left(\frac{\bar g}{|g|^2}\right) \wedge f$ sur ω (lemme 2 (i))

$$\bar\partial |g|^2 = \bar\partial g \lrcorner \bar g = g \lrcorner \overline{\partial g}$$
$$\bar\partial\left(\frac{\bar g}{|g|^2}\right) = \frac{\overline{\partial g}}{|g|^2} - \bar g \wedge \frac{\bar\partial |g|^2}{|g|^4}$$
$$= |g|^{-4}\left((g \lrcorner \bar g) \wedge \overline{\partial g} - \bar g \wedge (g \lrcorner \overline{\partial g})\right)$$
$$= |g|^{-4} \quad g \lrcorner \overline{g \wedge \partial g} \qquad (\text{lemme } 1'\ (\text{iii}))$$

donc $\left|\bar\partial\left(\frac{\bar g}{|g|^2}\right)\right| \leq |g|^{-2}\,|\partial g|$

et $|\bar\partial h_{|\omega}| \leq |f|\,|g|^{-2}\,|\partial g|$

Grâce à l'hypothèse 1 (iii) on a $\bar\partial h_{|\omega} \cdot |g|^{2-k} \in L^{s+1}_{r+1}$.

<u>Proposition 1</u> : soit $f \in L^s_r$ telle que $\bar\partial f = 0$ sur ω, $P_g f = 0$,
et supposons $f|g|^{-k} \in L^s_r$ pour $k \geq \operatorname{Inf}(2(n-r)+1, 2(p-s)-1)$.
Alors il existe $h \in L^{s+1}_r$ avec $\bar\partial h = 0$ sur ω et $P_g h = f$

<u>Démonstration</u> : le résultat est clair lorsque $r > n$ ou $s > p$

Lorsque $s = p$ la condition $P_g f = 0$ équivaut à $g_i f = 0$ pour tout $i = 1, \dots p$, ce qui entraîne $f = 0$ sur ω, et il suffit de prendre $h = 0$.

On peut alors supposer $r \leq n$, $s < p$, $k \geq 1$ et raisonner par récurrence descendante sur s.

Grâce au lemme 5, il existe $h' \in L_r^{s+1}$ tel que $P_g h' = f$, avec $\bar\partial h'_{|\omega} \cdot |g|^{2-k} \in L_{r+1}^{s+1}$.

Il vient $P_g \bar\partial h'_{|\omega} = \bar\partial f_{|\omega} = 0$ et $\bar\partial \bar\partial h'_{|\omega} = 0$

$$k-2 \geq \operatorname{Inf}(2(n-r-1)+1,\ 2(p-s-1)-1)$$

Par hypothèse de récurrence, on peut trouver $h'' \in L_{r+1}^{s+2}$ tel que $P_g h'' = \bar\partial h'$ et $\bar\partial h'' = 0$ sur ω.

Le lemme 4 nous fournit $h''' \in L_r^{s+2}$ avec $\bar\partial h''' = h''$ sur ω

Si $h = h' - P_g h'''$ nous en concluons que

$\bar\partial h = \bar\partial h' - P_g \bar\partial h''' = \bar\partial h' - P_g h'' = 0$ sur ω

et $P_g h = P_g h' = f$, ce qu'il fallait démontrer.

En particulier, pour $r = s = 0$ on obtient :

<u>Théorème 1</u> : si $g_1, \dots, g_p$ sont p fonctions holomorphes de A_ϕ et si f est une fonction holomorphe telle que :

$|f| \leq C\, |g|^k \exp(\varphi)$ où C est une constante > 0, $\varphi \in \Phi$

$k \geq \operatorname{Inf}(2n+1, 2p-1)$

$|g| = (|g_1|^2 + |g_2|^2 + \dots + |g_p|^2)^{\frac{1}{2}}$,

alors il existe des fonctions $h_1, \dots h_p$ de A_ϕ telles que

$$f = \sum_{i=1}^{p} g_i h_i$$

<u>Démonstration</u> : nous disposons en fait par la proposition 1 de fonctions $h_1, \dots h_p$ holomorphes sur ω, appartenant à W_ϕ et telles que

$$f = \sum_{i=1}^{p} g_i h_i$$

Mais $h_1, \dots h_p$ se prolongent en des fonctions holomorphes sur Ω tout entier grâce au lemme suivant :

<u>Lemme 6</u> : Soit X une hypersurface de Ω définie par une équation $u(z) = 0$ $u \in A(\Omega)$, $u \neq 0$,

et h une fonction $\in L^2_{loc}(\Omega)$ holomorphe sur $\Omega \smallsetminus X$. Alors h se prolonge en une fonction holomorphe sur Ω.

(voir Skoda [5] p. 560 lemme 2)

Dans le même esprit, on peut démontrer un critère local dont voici l'énoncé (nous renvoyons le lecteur à Kelleher et Taylor [4] p. 228, Th. 2.7)

Proposition 2 : Soit $f \in A_\Phi$ et D_1, D_2 deux parties compactes de Ω telles que :

(i) $D_1 \subset \overset{\circ}{D}_2$

(ii) $\int_{\Omega \setminus D_1} |f|^2 |g|^{-2k} e^{-\varphi} d\lambda < +\infty$ pour $\varphi \in \Phi$ convenable

(iii) Il existe $h_1, \dots h_p$ analytiques au voisinage de D_2 telles que :

$$f = \sum_{i=1}^{p} g_i h_i \text{ sur } D_2$$

et $\int_{D_2 \setminus D_1} |h|^2 |g|^{2(2-k)} d\lambda < +\infty \qquad k = \mathrm{Inf}(2n+1, 2p-1)$

Alors f appartient à l'idéal $\mathcal{I}(g)$ engendré par $g_1, g_2, \dots g_p$.

3. Application à la théorie des idéaux.

Définition 2 : si γ est une fonction ≥ 0 sur Ω, nous notons $\mathcal{J}(\gamma)$ l'idéal des $f \in A_\Phi$ telles qu'il existe une constante $C > 0$ et une fonction $\varphi \in \Phi$:

$$|f| \leq C \gamma \exp(\varphi)$$

Le théorème 1 entraîne immédiatement le résultat suivant :

Corollaire 1 : $\mathcal{J}(|g|)^k \subset \mathcal{I}(g)$ pour tout $k \geq \mathrm{Inf}(2n+1, 2p-1)$

En particulier, les idéaux $\mathcal{I}(g)$ et $\mathcal{J}(|g|)$ ont même racine dans A_Φ, et $\mathcal{I}(g) = A_\Phi$ si et seulement si

$$|g| \geq C \exp(-\varphi) \quad \text{avec } C > 0 \text{ et } \varphi \in \Phi .$$

Corollaire 2 : si $\mathcal{I}(g)$ ou $\mathcal{J}(|g|)$ est principal dans A_Φ alors $\mathcal{I}(g) = \mathcal{J}(|g|)$.

Démonstration : • si $\mathcal{I}(g)$ est engendré par $h \in A_\Phi$, avec $g_i = \gamma_i h$, alors $|g| \leq |\gamma| \, |h|$, de sorte que pour tout $f \in \mathcal{J}(|g|)$ on a $\left|\frac{f}{h}\right| \leq C |\gamma| \exp(\varphi) \leq C' \exp(\varphi')$ où C, C' sont des constantes > 0 $\quad \varphi, \varphi' \in \Phi$.

h divise donc f dans $\mathcal{J}(|g|)$, et $f \in \mathcal{I}(g)$.

• si h engendre $\mathcal{J}(|g|)$, on a $g_i = \gamma_i h \quad 1 \leq i \leq p$, $\gamma_i \in A_\Phi$

Mais $|h| \leq C |g| \exp(\varphi)$ puisque $h \in \mathcal{J}(|g|)$

donc $|\gamma| \geq \frac{|g|}{|h|} \geq C^{-1} \exp(-\varphi)$

$$\mathcal{I}(\gamma_1, \dots \gamma_p) = A_\Phi$$
et
$$\mathcal{I}(g_1, \dots g_p) = \mathcal{I}(h) = \mathcal{J}(|g|)$$

4. Cas des fonctions entières d'ordre fini .

Définition 3 : nous dirons que le système $g = (g_1, \dots g_p)$ de p fonctions de A_Φ est perfectible (ou que les g_i sont perfectibles) s'il existe une fonction $\varphi \in \Phi$ telle que :

$$\int_{\Omega \setminus X} \Delta \operatorname{Log} |g|^2 \exp(-\varphi)\, d\lambda < +\infty$$

où Δ est le laplacien sur $\mathbb{C}^n$
et X l'ensemble des zéros communs aux g_i .

Nous supposerons désormais que g est perfectible .

Pour calculer $\Delta \operatorname{Log} |g|^2$ utilisons $|g|^2 = g \lrcorner \bar{g}$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}_k} \operatorname{Log} |g|^2 = |g|^{-2}\, g \lrcorner \overline{\frac{\partial g}{\partial z_k}}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial z_k \partial \bar{z}_k} \operatorname{Log} |g|^2 &= |g|^{-2} \frac{\partial g}{\partial z_k} \lrcorner \overline{\frac{\partial g}{\partial z_k}} - |g|^{-4} \left(\frac{\partial g}{\partial z_k} \lrcorner \bar{g}\right) \wedge \left(g \lrcorner \overline{\frac{\partial g}{\partial z_k}}\right) \\
&= |g|^{-4} \frac{\partial g}{\partial z_k} \lrcorner \left((g \lrcorner \bar{g}) \wedge \overline{\frac{\partial g}{\partial z_k}} - \bar{g} \wedge \left(g \lrcorner \overline{\frac{\partial g}{\partial z_k}}\right)\right) \\
&= |g|^{-4} \frac{\partial g}{\partial z_k} \lrcorner \left(g \lrcorner \left(\bar{g} \wedge \overline{\frac{\partial g}{\partial z_k}}\right)\right) \\
&= |g|^{-4} \left(g \wedge \frac{\partial g}{\partial z_k}\right) \lrcorner \overline{\left(g \wedge \frac{\partial g}{\partial z_k}\right)} = |g|^{-4} \left| g \wedge \frac{\partial g}{\partial z_k} \right|^2
\end{aligned}$$

Les égalités qui ne sont pas directement évidentes résultent du lemme 1' (ii) ou (iii) .

On a donc $\Delta \operatorname{Log} |g|^2 = 4 \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 \operatorname{Log} |g|^2}{\partial z_k \partial \bar{z}_k} = 4\, |g|^{-4}\, |g \wedge \partial g|^2$

Rappelons nous maintenant que la forme $\bar{\partial}\left(\frac{\bar{g}}{|g|^2}\right)$ intervenant dans le lemme 5 s'écrit :

$$\bar{\partial}\left(\frac{\bar{g}}{|g|^2}\right) = |g|^{-4}\, g \lrcorner \overline{g \wedge \partial g} \quad \text{d'où} \quad \left|\bar{\partial}\left(\frac{\bar{g}}{|g|^2}\right)\right|^2 \leq |g|^{-6}\, |g \wedge \partial g|^2$$

Si g est perfectible on a donc $|g|\, \bar{\partial}\left(\frac{\bar{g}}{|g|^2}\right) \in L^1_1$.

Il suffit alors de réexaminer la démonstration du lemme 5 pour obtenir , avec les mêmes notations :

Lemme 5' : Soient $r, s \geq 0$ $k \geq 1$ des entiers , et soit $f \in L^s_r$ telle que pour une certaine fonction $\varphi \in \Phi$

la forme $f\, |g|^{-k} \exp(-\varphi)$ soit bornée (en norme $\| \ \|_\infty$) .

Si $P_g f = 0$ et $\bar{\partial} f = 0$ sur ω , il existe $h \in L^{s+1}_r$ telle que :

$P_g h = f$, $h\, |g|^{1-k} \in L^{s+1}_r$ et $\bar{\partial} h_{|\omega}\, |g|^{1-k} \in L^{s+1}_{r+1}$.

Proposition 3 : Soit $f \in L^s_r$ telle que $P_g f = 0$ et $\bar{\partial} f = 0$ sur ω ,

et supposons $f\, |g|^{-k} \exp(-\varphi)$ essentiellement bornée avec $\varphi \in \Phi$ et $k \geq \operatorname{Sup}(1, \operatorname{Inf}(2(n-r), 2(p-s)-2))$

Alors il existe $h \in L^{s+1}_r$ avec $\bar{\partial} h = 0$ sur ω et $P_g h = f$.

Démonstration : il suffit de considérer le cas où $r \leq n$ et $s < p$.

Si $r = n$ ou $s = p-1$ alors $k = 1$, et la proposition 1 fournit la réponse (avec des hypothèses plus faibles encore)

Supposons donc $r < n$ et $s < p-1$, ce qui implique $k \geq 2$.

Grâce au lemme 5', il existe $h' \in L_r^{s+1}$ telle que

$P_g h' = f$ et $\bar\partial h'_{|\omega} \, |g|^{1-k} \in L_{r+1}^{s+1}$;

Il vient $P_g \bar\partial h' = \bar\partial f = 0$ et $\bar\partial \bar\partial h' = 0$ sur ω

et $k-1 \geq \operatorname{Inf}(2(n-r-1)+1, 2(p-s-1)-1)$

D'après la proposition 1, on peut trouver $h'' \in L_{r+1}^{s+2}$ telle que $P_g h'' = \bar\partial h'$ et $\bar\partial h'' = 0$ sur ω.

Le lemme 4 nous fournit $h''' \in L_r^{s+2}$ avec $\bar\partial h''' = h''$ sur ω,

et $h = h' - P_g h'''$ répond à la question.

En particulier pour $r = s = 0$, et après utilisation du lemme 6 :

Théorème 2 : si $g_1, \dots g_p$ sont p fonctions holomorphes perfectibles de A_ϕ et si f est une fonction holomorphe telle que :

$|f| \leq C |g|^k \exp(\varphi)$ où C est une constante > 0
φ une fonction de ϕ
et $k \geq \operatorname{Sup}(1, \operatorname{Inf}(2n, 2p-2))$

alors $f \in \mathcal{I}(g)$.

Corollaire 3 : si $g_1, \dots g_p$ sont perfectibles $(p \geq 2)$

on a $\mathcal{J}(|g|)^k \subset \mathcal{I}(g)$ pour $k \geq \operatorname{Inf}(2n, 2p-2)$.

On peut démontrer (Skoda [5] p. 573 Lemme 3) que tout système $g = (g_1, \dots g_p)$ de p fonctions entières d'ordre fini est perfectible (pour l'énoncé précis, cf aussi B) 4. lemme 5).

5. Le cas $n = 1$

Le corollaire 3 fournit alors :

Corollaire 3' : si $g_1, \dots g_p$ sont perfectibles alors $\mathcal{J}(|g|)^2 \subset \mathcal{I}(g)$.

Kelleher et Taylor [4] Chap III p 233 ont posé le problème de savoir quand l'égalité $\mathcal{J}(|g|)^2 = \mathcal{I}(g)$ pouvait survenir.

En fait il est facile de voir que $\mathcal{J}(|g|)^{k_1} = \mathcal{I}(g)^{k_2}$ $k_1 \neq k_2$ équivaut à $\mathcal{J}(|g|) = \mathcal{I}(g) = A_\phi$ (voir B) section 3.2 corollaire 2 (iv))

Le corollaire 3' ne peut être amélioré comme le montrent les résultats suivants de Kelleher et Taylor ([4] chap III) que nous énonçons sans démonstrations.

Nous prenons désormais $\Phi = \{\lambda\psi\ ;\ \lambda > 0\}$ avec $\psi(z) = |z|$

A_Φ est donc l'anneau des fonctions entières de type exponentiel.

Proposition 4 : pour tout entier $q \geq 1$ il existe des fonctions g_1, g_2, f de type exponentiel telles que

(i) f a une racine q-ème dans A_Φ
(ii) $f \in \mathcal{J}(|g|)$
(iii) $f^{2-\frac{1}{q}} \notin \mathcal{I}(g_1, g_2)$

Définition 4 : une suite $\{z_k\}_{k\geq 1}$ de nombres complexes tendant vers ∞ sera dite d'interpolation dans A_Φ si pour toute suite $\{b_k\}_{k\geq 1}$ de nombres complexes telle que :

$|b_k| \leq C\, e^{\varphi(z_k)}$ où $C > 0$ et $\varphi \in \Phi$,

il existe $f \in A_\Phi$ telle que $f(z_k) = b_k$ pour tout $k \geq 1$.

Proposition 5 : il existe $g_1 \in A_\Phi$ telle que $\mathcal{I}(g_1, \dots g_p) = \mathcal{J}(|g|)$ pour toutes fonctions $g_2, \dots g_p \in A_\Phi$.

C'est le cas chaque fois que g_1 a tous ses zéros simples, et que l'ensemble des zéros de g_1 est d'interpolation pour A_Φ (par exemple $g_1(z) = \sin z$.)

Proposition 6 : il existe $g_1, g_2 \in A_\Phi$ telles que $\mathcal{I}(g_1, g_2) = \mathcal{J}(|g|)$ $\mathcal{I}(g_1, g_2)$ n'étant pas principal dans A_Φ.

Proposition 7 : Soient $g_1, \dots g_p \in A_\Phi$ n'ayant pas de zéros communs et telles que $\mathcal{I}(g_1, \dots g_p) \neq A_\Phi$

Alors il existe $g_{p+1} \in A_\Phi$ telle que (i) $g_{p+1} \notin \mathcal{J}(|g_1|^2 + \dots + |g_p|^2)^{\frac{1}{2}}$

(ii) $\mathcal{I}(g_1, \dots g_{p+1}) \neq A_\Phi$

(en particulier A_Φ n'est pas noethérien.)

Corollaire 4 : si $g_1, \dots g_p \in A_\Phi$ n'ont pas de zéros communs, alors ni $\mathcal{I}$ ni $\mathcal{J}$ n'est maximal dans A_Φ.

Inversement si $\mathcal{I}$ ou $\mathcal{J}$ est maximal, il existe un unique point $a \in \mathbb{C}$ tel que :

$$\mathcal{I} = \mathcal{J} = \{ f \in A_\Phi\ ;\ f(a) = 0 \}$$

B) Méthode directe de H. Skoda (voir [5]).

1. Préliminaires d'analyse fonctionnelle.

Soient H_1, H_2 deux espaces de Hilbert,

et $T : H_1 \longrightarrow H_2$ un opérateur non borné, fermé et à domaine dense $\mathrm{Dom}\, T$.

On sait que l'adjoint T^* de T est dense et fermé et on a le résultat bien connu suivant (Cf Hörmander [2] p.78 lemme 4.1.1) :

Lemme 1 : si F est un sous-espace fermé de H_2 contenant l'image $\mathrm{Im}\, T$ de T,

alors $\mathrm{Im}\, T = F$ si et seulement si il existe une constante C telle que pour tout $x \in F \cap \mathrm{Dom}\, T^*$ on ait, avec des notations évidentes :

$$\|x\|_2 \leq C \, \|T^* x\|_1$$

De plus si cette condition est vérifiée, pour tout $v \in F$, il existe $u \in H_1$ tel que $Tu = v$, $u \in \mathrm{Im}\, T^*$, et $\|u\|_1 \leq C \|v\|_2$.

On considère maintenant la situation suivante :

$$\begin{tikzcd} H_1 \arrow[r, "L"] \arrow[d, "T"'] & H \\ H_2 & \end{tikzcd}$$

T, H_1, H_2 ont le même sens que précédemment ; H est un espace de Hilbert et L un opérateur linéaire continu $H_1 \longrightarrow H$.

Le lemme 1 se généralise facilement à ce cas :

Proposition 1 : si F est un sous-espace fermé de H contenant $L(\mathrm{Ker}\, T)$ on a $L(\mathrm{Ker}\, T) = F$ si et seulement s'il existe une constante C telle que :

$$\|x\| \leq C \, \| L^* x + T^* u \|_1 \quad \text{pour tout } x \in H \text{ et tout } u \in \mathrm{Dom}\, T^*$$

Pour tout $x \in F$, il existe alors $x_1 \in \mathrm{Ker}\, T$ tel que $L x_1 = x$ et $\|x_1\| \leq C' \|x\|$.

2. Estimations L^2.

2.1. Estimations L^2 pour l'opérateur $\bar\partial$.

Etant donnés un ouvert pseudo-convexe $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ et des fonctions de classe C^2 φ_1 φ_2 φ_3 on considère les opérateurs

$$H_1 \xrightarrow{T} H_2 \xrightarrow{S} H_3$$

où $H_1 = L^2_{p,q-1}(\Omega, \varphi_1)$ $\quad 0 \leq p \leq n \quad 1 \leq q \leq n$

(resp. $H_2 = L^2_{p,q}(\Omega, \varphi_2)$ $\quad H_3 = L^2_{p,q+1}(\Omega, \varphi_3)$)

désigne l'espace des formes de bidegré $(p,q-1)$ (resp. (p,q) et $(p,q+1)$) de carré intégrable pour le poids :

$$e^{-\varphi_1} d\lambda \quad (\text{resp. } e^{-\varphi_2} d\lambda \ , e^{-\varphi_3} d\lambda \ )$$

λ étant la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{C}^n$.

On pose $\|f\|_{\varphi_1} = \int_\Omega |f|^2 e^{-\varphi_1} d\lambda$ pour $f \in L^2_{p,q-1}(\Omega, \varphi_1)$;

$\|f\|_{\varphi_2}$ et $\|f\|_{\varphi_3}$ sont définis de façon analogue.

Enfin $Tf = \bar\partial f$ si $\bar\partial f$ calculé au sens des distributions appartient à $L^2_{p,q}(\Omega, \varphi_2)$; de même pour Sf.

On rappelle que $\mathcal{D}_{p,q}(\Omega)$ (formes de bidegré (p,q), de classe C^∞ et à support compact dans Ω) est dense dans $\operatorname{Dom} T^* \cap \operatorname{Dom} S$ pour la norme :

$$\|f\|_{\varphi_2} + \|T^* f\|_{\varphi_1} + \|Sf\|_{\varphi_3}$$

si on a choisi une suite $\eta_\nu \in C^\infty_0(\Omega)$ $\quad 0 \leq \eta_\nu \leq 1$ telle que $\eta_\nu = 1$ sur tout compact de Ω pour ν assez grand,

$\rho \geq 0 \quad \rho \in C^2(\Omega)$ telle que $|\bar\partial \eta_\nu|^2 = \sum_{k=1}^n \left|\frac{\partial \eta_\nu}{\partial \bar z_k}\right|^2 \leq e^\rho$ pour tout ν

et enfin $\varphi_1 = \varphi_3 - 2\rho$, $\varphi_2 = \varphi_3 - \rho$.

(Pour plus de détails sur tout ceci, voir Hörmander [2] chapitre 4 .)

A la différence de Skoda [5] nous n'utilisons pas pour démontrer les principaux résultats les délicates estimations d'Hörmander [1] (p. 104, th. 2.1.4 et p. 100, prop. 2.1.1) relatives à $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3$ et à un domaine Ω borné à frontière C^∞, mais celles plus récentes de [2] p. 83-84.

Afin d'obtenir les mêmes constantes optimales que dans [5] nous reprenons en détail les calculs relatifs aux formes de type $(0,1)$; désormais $p = 0 \quad q = 1$.

Soit $f = \sum_{k=1}^n f_k \, d\bar z_k \in \operatorname{Dom} T^*$ et $u \in \mathcal{D}(\Omega) \subset \operatorname{Dom} T$

$$\bar\partial u = \sum_{k=1}^n \frac{\partial u}{\partial \bar z_k} d\bar z_k$$

$$\begin{aligned}
(Tu \mid f)_{\varphi_2} &= \int_\Omega (\bar\partial u \mid f) e^{-\varphi_2} d\lambda = \int_\Omega \sum_{k=1}^n \frac{\partial u}{\partial \bar z_k} \bar f_k e^{-\varphi_2} d\lambda \\
&= - \int_\Omega u \sum_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial z_k} \bar f_k e^{-\varphi_2} \, d\lambda \\
&= \Big(u , - e^{\varphi_1} \sum_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial z_k} (f_k e^{-\varphi_2})\Big)_{\varphi_1} \\
&= (u, T^* f)_{\varphi_1} \quad \text{et ce pour tout } u \in \mathcal{D}(\Omega)
\end{aligned}$$

d'où $T^* f = - e^{\varphi_1} \sum_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial z_k} (f_k e^{-\varphi_2})$

Le calcul montre de plus que $\mathcal{D}_{0,1}(\Omega) \subset \mathrm{Dom}\, T^*$.

Supposons pour l'instant $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = \varphi$ et $f \in \mathcal{D}_{0,1}(\Omega)$

alors $$T^* f = -\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f_k}{\partial z_k} + \sum_{k=1}^{n} f_k \frac{\partial \varphi}{\partial z_k}$$

et $T^* f$ est de classe C^1 à support compact ; d'où :

$$\int_\Omega |T^* f|^2 e^{-\varphi}\, d\lambda = \int_\Omega (TT^* f \,|\, f)\, e^{-\varphi}\, d\lambda$$

$$TT^* f = -\sum_{1\leq k,\ell\leq n} \frac{\partial^2 f_k}{\partial z_k \partial \bar z_\ell} d\bar z_\ell + \sum_{1\leq k,\ell\leq n} \left(\frac{\partial f_k}{\partial \bar z_\ell}\frac{\partial \varphi}{\partial z_k} + f_k \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_k \partial \bar z_\ell}\right) d\bar z_\ell$$

$$= -\sum_{1\leq k,\ell\leq n} e^{\varphi} \frac{\partial}{\partial z_k}\left[e^{-\varphi} \frac{\partial f_k}{\partial \bar z_\ell}\right] d\bar z_\ell + \sum_{1\leq k,\ell\leq n} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_k \partial \bar z_\ell} f_k\, d\bar z_\ell$$

et $$\int_\Omega |T^* f|^2 e^{-\varphi}\, d\lambda = -\int_\Omega \sum_{1\leq k,\ell\leq n} \frac{\partial}{\partial z_k}\left[e^{-\varphi} \frac{\partial f_k}{\partial \bar z_\ell}\right] \bar f_\ell\, d\lambda + \int_\Omega \sum_{1\leq k,\ell\leq n} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_k \partial \bar z_\ell} f_k \bar f_\ell\, e^{-\varphi}\, d\lambda$$

$$= \int_\Omega \sum_{1\leq k,\ell\leq n} \frac{\partial f_k}{\partial \bar z_\ell} \overline{\frac{\partial f_\ell}{\partial \bar z_k}}\, e^{-\varphi}\, d\lambda + \int_\Omega \sum_{1\leq k,\ell\leq n} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_k \partial \bar z_\ell} f_k \bar f_\ell\, e^{-\varphi}\, d\lambda$$

D'autre part $$S f = \sum_{1\leq k<\ell\leq n} \left(\frac{\partial f_\ell}{\partial \bar z_k} - \frac{\partial f_k}{\partial \bar z_\ell}\right) dz_k \wedge d\bar z_\ell$$

$$\int_\Omega |Sf|^2 e^{-\varphi}\, d\lambda = \int_\Omega \sum_{1\leq k,\ell\leq n} \left| \frac{\partial f_\ell}{\partial \bar z_k} - \frac{\partial f_k}{\partial \bar z_\ell}\right|^2 e^{-\varphi}\, d\lambda$$

et comme $$\sum_{1\leq k,\ell\leq n} \frac{\partial f_k}{\partial \bar z_\ell} \overline{\frac{\partial f_\ell}{\partial \bar z_k}} + \sum_{1\leq k,\ell\leq n} \left| \frac{\partial f_\ell}{\partial \bar z_k} - \frac{\partial f_k}{\partial \bar z_\ell}\right|^2 = \sum_{1\leq k,\ell\leq n} \left|\frac{\partial f_k}{\partial \bar z_\ell}\right|^2$$

<u>Lemme 2</u> : on a $\|T^* f\|_\varphi^2 + \|Sf\|_\varphi^2 =$

$$\int_\Omega \sum_{1\leq k,\ell\leq n} \left|\frac{\partial f_k}{\partial \bar z_\ell}\right|^2 e^{-\varphi}\, d\lambda + \int_\Omega \sum_{1\leq k,\ell\leq n} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_k \partial \bar z_\ell} f_k \bar f_\ell\, e^{-\varphi}\, d\lambda$$

$$\geq \int_\Omega \sum_{1\leq k,\ell\leq n} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_k \partial \bar z_\ell} f_k \bar f_\ell\, e^{-\varphi}\, d\lambda \quad \text{pour tout } f \in \mathcal{D}_{0,1}(\Omega)$$

Supposons maintenant $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ choisis comme au début, et soit δ l'opérateur T^* relatif à $\varphi = \varphi_3$ (avec trois poids égaux comme dans le lemme 2).

$$\delta f = -\sum_{k=1}^{n} e^{\varphi_1 + 2\rho} \frac{\partial}{\partial z_k}\left(f_k\, e^{-\varphi_2 - \rho}\right)$$
$$= -\sum_{k=1}^{n} e^{\varphi_1+\rho} \frac{\partial}{\partial z_k}(f_k\, e^{-\varphi_2}) + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \rho}{\partial z_k} f_k$$
$$= e^{\rho} T^* f + \partial\rho \lrcorner f$$

où $\lrcorner$ désigne le produit intérieur dans l'algèbre extérieure $\Lambda_{\mathbb{C}} \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C})$ munie de sa structure hermitienne usuelle.

donc $$\|\delta f\|_{\varphi_3}^2 \leq (1+\beta)\, \|e^{\rho} T^* f\|_{\varphi_3}^2 + \left(1+\frac{1}{\beta}\right) \|\partial\rho \lrcorner f\|_{\varphi_3}^2$$
$$\leq (1+\beta)\, \|T^* f\|_{\varphi_1}^2 + \left(1+\frac{1}{\beta}\right) \int_\Omega |\partial\rho|^2 |f|^2 e^{-\varphi_3}\, d\lambda$$

pour toute constante $\beta > 0$.

Le lemme 2 entraîne alors l'inégalité :

$$(1+\beta)\,\|T^* f\|^2_{\varphi_1} + \|S f\|^2_{\varphi_3} \geq \int_\Omega \Big[\sum_{1\leq k,\ell\leq n} \frac{\partial^2\varphi_3}{\partial z_k \partial \bar z_\ell} f_k \bar f_\ell - \big(1+\tfrac{1}{\beta}\big)|\partial\rho|^2 |f|^2\Big] e^{-\varphi_3}\, d\lambda$$

pour tout $f \in \mathcal{D}_{0,1}(\Omega)$
et toute constante $\beta > 0$.

Si de plus $\mathcal{H}(\varphi_3,\lambda) = \sum_{1\leq k,\ell\leq n} \frac{\partial^2\varphi_3}{\partial z_k\partial \bar z_\ell}\lambda_k\bar\lambda_\ell \geq \big(1+\frac{1}{\beta}\big)|\partial\rho|^2|\lambda|^2$
pour tout $\lambda \in \mathbb{C}^n$, l'inégalité s'étend à tout $f \in \mathrm{Dom}\,T^* \cap \mathrm{Dom}\,S$
(par densité de $\mathcal{D}_{0,1}(\Omega)$).

Nous utiliserons l'estimation sous la forme suivante :

<u>Lemme 3</u> : Si $\mathcal{H}(\varphi_3,\lambda) \geq \big(1+\frac{1}{\beta}\big)|\partial\rho|^2|\lambda|^2$ pour tout $\lambda \in \mathbb{C}^n$

alors $\|T^* f\|^2_{\varphi_1} \geq \int_\Omega \Big[\frac{\mathcal{H}(\varphi_3,f)}{1+\beta} - \frac{1}{\beta}|\partial\rho|^2|f|^2\Big] e^{-\varphi_3}\, d\lambda$

pour tout $f \in \mathrm{Dom}\,T^* \cap \mathrm{Ker}\,S$.

2.2. <u>Estimations L^2 pour l'opérateur L</u>.

On considère le diagramme

$$\begin{array}{ccc} H_1 & \xrightarrow{\ L\ } & H \\ {\scriptstyle \Theta = T^p}\downarrow & & \\ H_2 & & \end{array}$$

où
$H = L^2(\Omega,\varphi)$ $\quad\varphi \in C^2(\Omega)$
$H_1 = [L^2(\Omega,\varphi_1)]^p$ (muni de la structure de somme hilbertienne)
$H_2 = \mathrm{Ker}\,S^p$;

T^p, S^p sont les puissances p-ièmes des opérateurs T, S décrits à la section 2.1, avec les poids $\varphi_1 = \varphi_3 - 2\rho$, $\varphi_2 = \varphi_3 - \rho$.

$F_1 = \mathrm{Ker}\,T^p$ n'est autre que le sous-espace des fonctions holomorphes de $[L^2(\Omega,\varphi_1)]^p$, et nous notons de même $F = L^2(\Omega,\varphi) \cap A(\Omega)$.

Enfin $Lh = \sum_{i=1}^p g_i h_i$ pour $h = (h_1,\dots h_p) \in [L^2(\Omega,\varphi_1)]^p$

où $g_1, \dots g_p$ sont p fonctions holomorphes sur Ω.

$$\int_\Omega |Lh|^2 e^{-\varphi}\, d\lambda \leq \int_\Omega |g|^2 |h|^2 e^{-\varphi}\, d\lambda$$
$$\leq \sup_\Omega \big(|g|^2 e^{\varphi_1-\varphi}\big) \int_\Omega |h|^2 e^{-\varphi_1}\, d\lambda$$

L est donc bien défini et continu pourvu qu'il existe une constante C telle que :

$$|g|^2 = \sum_{i=1}^p |g_i|^2 \leq C e^{\mu} \qquad \text{avec } \mu = \varphi - \varphi_1 .$$

C'est ce que nous supposerons désormais ; remarquons de plus qu'alors $LF_1 \subset F$.

Calculons $L^* f$ pour $u \in L^2(\Omega, \varphi)$:

$$(Lh, f) = \int_\Omega \left(\sum_{i=1}^{p} g_i h_i\right) \bar{f}\, e^{-\varphi}\, d\lambda$$

$$= \int_\Omega \sum_{1 \leq i \leq p} h_i \; \overline{\bar{g}_i f e^{\varphi_1 - \varphi}} \; e^{-\varphi_1}\, d\lambda \quad \text{avec } h_i \in L^2(\Omega, \varphi_1)$$

c'-à-d $\quad (Lh, f) = (h, L^* f)_1$

où $\quad L^* f = (\bar{g}_1 f e^{-\mu}, \bar{g}_2 f e^{-\mu}, \dots, \bar{g}_p f e^{-\mu})$

Si $u \in \mathrm{Dom}\, \Theta^*$, on a $\Theta^* u = (T^* u_1, T^* u_2, \dots T^* u_p)$;

Cherchons maintenant à obtenir une inégalité du type :

(1) $\quad \| L^* f + \Theta^* u \|_1 \geq C \| f \|$ pour $f \in F$, et $u \in \mathrm{Dom}\, \Theta^*$.

Le premier membre s'écrit :

$$\| L^* f + \Theta^* u \|_1^2 = \sum_{i=1}^{p} \| \bar{g}_i f e^{-\mu} + T^* u_i \|_{\varphi_1}^2$$

(2) $$= \sum_{i=1}^{p} \left(\| \bar{g}_i f e^{-\mu} \|_{\varphi_1}^2 + 2\, \mathrm{Re}\, (\bar{g}_i f e^{-\mu} | T^* u_i)_{\varphi_1} + \| T^* u_i \|_{\varphi_1}^2 \right)$$

Evaluons séparément chacun des trois termes :

(3) $$\sum_{i=1}^{p} \| \bar{g}_i f e^{-\mu} \|_{\varphi_1}^2 = \int_\Omega |g|^2 |f|^2 e^{-2\mu - \varphi_1}\, d\lambda$$

Comme f est holomorphe $\bar\partial(\bar{g}_i f e^{-\mu}) = f\, \overline{\partial(g_i e^{-\mu})}$

$\bar{g}_i f e^{-\mu}$ appartiendra à $\mathrm{Dom}\, T$ si $e^{\mu - \rho} |\partial(g_i e^{-\mu})|^2$ est bornée et en particulier si $e^{\mu} |\partial(g_i e^{-\mu})|^2$ est bornée.

En définitive les conditions imposées au couple (g, μ) sont :

$$\begin{cases} (i) & |g_i|^2 e^{-\mu} \quad \text{bornée} \\ (ii) & e^{\mu} |\partial(g_i e^{-\mu})|^2 \quad \text{bornée} \end{cases} \quad \text{pour } 1 \leq i \leq p.$$

On a alors $(\bar{g}_i f e^{-\mu} | T^* u_i)_{\varphi_1} = (f\, \overline{\partial(g_i e^{-\mu})} \,|\, u_i)_{\varphi_2}$

d'où en posant $u_i = \sum_{k=1}^{n} u_{ik}\, d\bar{z}_k$

$$\sum_{i=1}^{p} 2\, \mathrm{Re}(\bar{g}_i f e^{-\mu} | T^* u_i)_{\varphi_1} = 2\, \mathrm{Re} \int_\Omega f\, \overline{\sum_{i=1}^{p} \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial z_k}(g_i e^{-\mu})\, u_{ik}}\; e^{-\varphi_2}\, d\lambda$$

Utilisons l'inégalité $\frac{1}{\alpha} |a|^2 + \alpha |b|^2 + 2\, \mathrm{Re}\, a\bar{b} \geq 0$ où α est un nombre ≥ 1 ; on obtient en supposant $|g| > 0$:

(4) $$\sum_{i=1}^{p} 2\, \mathrm{Re}(\bar{g}_i f e^{-\mu} | T^* u_i)_{\varphi_1} \geq -\frac{1}{\alpha} \int_\Omega |g|^2 |f|^2 e^{-2\mu - \varphi_1}\, d\lambda$$
$$- \alpha \int_\Omega |g|^{-2} \left| \sum_{i=1}^{p} \sum_{k=1}^{n} e^{\mu} \frac{\partial}{\partial z_k}(g_i e^{-\mu})\, u_{ik} \right|^2 e^{-\varphi_3}\, d\lambda$$

Utilisons maintenant l'inégalité du lemme 3 pour $u_i \in \mathrm{Dom}\, T^* \cap \mathrm{Ker}\, S$:

(5) $$\| T^* u_i \|_{\varphi_1}^2 \geq \int_\Omega \left[\frac{\mathcal{H}(\varphi_3, u_i)}{1 + \beta} - \frac{1}{\beta} |\partial\rho|^2 |u|^2 \right] e^{-\varphi_3}\, d\lambda$$

qui est valide si $\mathcal{H}(\varphi_3, \lambda) \geq (1 + \frac{1}{\beta}) |\partial\rho|^2 |\lambda|^2 \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}^n$.

Combinant (2) (3) (4) (5) il vient :

$$(6)\quad \| L^* f + \Theta^* u \|_1^2 \geq \left(1-\frac{1}{\alpha}\right) \int_\Omega |g|^2 |f|^2 e^{-2\mu-\varphi_1}\, d\lambda$$

$$+ \int_\Omega \Big[\frac{1}{1+\beta} \sum_{i,k,\ell} \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial z_k \partial \bar z_\ell} u_{ik} \bar u_{i\ell} - \frac{1}{\beta} |\partial\rho|^2 |u|^2 - \alpha |g|^{-2} \Big| \sum_{i=1}^{p} \sum_{k=1}^{n} e^\mu \frac{\partial}{\partial z_k}(g_i e^{-\mu}) u_{ik} \Big|^2 \Big] e^{-\varphi_3} d\lambda$$

Choisissons $\mu = \operatorname{Log} |g|^2$

$\varphi_3 = \psi + \gamma(1+\beta) \operatorname{Log} |g|^2$

$\varphi_2 = \varphi_3 - \rho$

$\varphi_1 = \varphi_3 - 2\rho$

où ψ est de classe C^2, plurisousharmonique, telle que

$$\mathcal{H}(\psi, \lambda) \geq \left(1 + \frac{1}{\beta}\right) |\partial\rho|^2 |\lambda|^2 \qquad \forall \lambda \in \mathbb{C}^n ,$$

et où γ est une constante > 0 à déterminer de sorte que

$$\gamma \sum_{i,k,\ell} \frac{\partial^2 (\operatorname{Log}|g|^2)}{\partial z_k \partial \bar z_\ell} u_{ik} \bar u_{i\ell} \geq \alpha |g|^{-2} \Big| \sum_{i=1}^{p} \sum_{k=1}^{n} e^\mu \frac{\partial}{\partial z_k}(g_i e^{-\mu}) u_{ik} \Big|^2$$

Dans tous les calculs qui suivent, seuls les indices k et ℓ varient de 1 à n, tous les autres varient de 1 à p.

On vérifie facilement que :

$$\sum_{k,\ell} \frac{\partial^2(\operatorname{Log}|g|^2)}{\partial z_k \partial \bar z_\ell} u_{ik} \bar u_{i\ell} = \frac{1}{|g|^2} \sum_j \Big| \sum_k \frac{\partial g_j}{\partial z_k} u_{ik} \Big|^2 - \frac{1}{|g|^4} \Big| \sum_{j,k} \bar g_j \frac{\partial g_j}{\partial z_k} u_{ik} \Big|^2$$

$$= |g|^{-4} \Big[\sum_{j,m} |g_m|^2 \Big| \sum_k \frac{\partial g_j}{\partial z_k} u_{ik} \Big|^2 - \Big| \sum_{j,k} \bar g_j \frac{\partial g_j}{\partial z_k} u_{ik} \Big|^2 \Big]$$

$$= |g|^{-4} \sum_{m<j} \Big| \sum_k \Big(g_m \frac{\partial g_j}{\partial z_k} - g_j \frac{\partial g_m}{\partial z_k} \Big) u_{ik} \Big|^2 \qquad (7)$$

grâce à l'identité de Lagrange :

$$\sum_{j,m} |a_m| |b_j|^2 - \Big| \sum_j \bar a_j b_j \Big|^2 = \sum_{m<j} |a_m b_j - a_j b_m|^2$$

D'autre part $e^\mu \frac{\partial}{\partial z_k}(g_i e^{-\mu}) = \frac{\partial g_i}{\partial z_k} - g_i \frac{\partial \mu}{\partial z_k}$

$$= \frac{\partial g_i}{\partial z_k} - g_i |g|^{-2} \sum_j \bar g_j \frac{\partial g_j}{\partial z_k}$$

$$= |g|^2 \sum_j \bar g_j \Big(g_j \frac{\partial g_i}{\partial z_k} - g_i \frac{\partial g_j}{\partial z_k} \Big)$$

$$(8)\quad \Big| \sum_{i,k} e^\mu \frac{\partial}{\partial z_k}(g_i e^{-\mu}) u_{ik} \Big|^2 = |g|^{-4} \Big| \sum_{i,j,k} \bar g_j \Big(g_j \frac{\partial g_i}{\partial z_k} - g_i \frac{\partial g_j}{\partial z_k} \Big) \Big|^2$$

<u>Lemme 4</u> : soit $q = \operatorname{Inf}(n, p-1)$; on a l'inégalité

$$\Big| \sum_{i,j,k} \bar a_j (a_j b_{ik} - a_i b_{jk}) c_{ik} \Big|^2 \leq q |a|^2 \sum_{i,m<j} \Big| \sum_k (a_m b_{jk} - a_j b_{mk}) c_{ik} \Big|^2$$

$a_j \quad b_{ik} \quad c_{ik} \in \mathbb{C} \qquad 1 \leq i,j \leq p \qquad 1 \leq k \leq n \qquad |a|^2 = \sum_j |a_j|^2$

(pour une démonstration voir Skoda [5] p. 552 lemme 1)

Appliquons le lemme à $a_j = g_j \quad b_{ik} = \frac{\partial g_i}{\partial z_k} \quad c_{ik} = u_{ik}$;

On voit d'après (7) et (8) qu'on peut prendre $\gamma = \alpha q$.

Compte tenu de ce que $|g|^2 = e^{\mu}$, $\varphi = \varphi_1 + \mu$, l'inégalité (6) entraîne :

$$\| L^* f + \Theta^* u \|_1^2 \geq \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) \int_\Omega |f|^2 e^{-\varphi} d\lambda$$

$$(9) \qquad + \int_\Omega \left[\frac{1}{1+\beta} \sum_{i,k,\ell} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z_k \partial \bar z_\ell} u_{ik} \overline{u_{i\ell}} - \frac{1}{\beta} |\partial \rho|^2 |u|^2 \right] e^{-\varphi_3} d\lambda$$

Remplaçons maintenant ψ par $\psi + 2\rho + \pi$ où π est une fonction plurisousharmonique de classe C^2 .

(9) est valide lorsque le [ ] figurant dans la deuxième intégrale du membre de droite est ≥ 0 .

En supposant ψ plurisousharmonique , cette condition sera vérifiée si :

$$\frac{1}{1+\beta} \left(\sum_{i,k,\ell} \frac{\partial^2 \pi}{\partial z_k \partial \bar z_\ell} + 2 \frac{\partial^2 \rho}{\partial z_k \partial \bar z_\ell} \right) u_{ik} \overline{u_{i\ell}} \geq \frac{1}{\beta} |\partial \rho|^2 |u|^2$$

Comme $\mathcal{H}(\rho, \lambda) \geq - |\partial \bar\partial \rho| |\lambda|^2$ il suffit de prendre :

$$(10) \quad \sum_{k,\ell} \frac{\partial^2 \pi}{\partial z_k \partial \bar z_\ell} \lambda_k \overline{\lambda_\ell} \geq \left(2 |\partial \bar\partial \rho| + \left(1 + \frac{1}{\beta}\right) |\partial \rho|^2 \right) |\lambda|^2 \quad \text{pour tout } \lambda \in \mathbb{C}^n .$$

Proposition 2 : on a

$$\| L^* f + \Theta^* u \|_1^2 \geq \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) \int_\Omega |f|^2 e^{-\varphi} d\lambda$$

$$+ \int_\Omega \frac{1}{1+\beta} \sum_{i,k,\ell} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z_k \partial \bar z_\ell} u_{ik} \overline{u_{i\ell}} e^{-\varphi_3} d\lambda$$

avec $\alpha \geq 1 \quad \beta > 0 \quad q = \mathrm{Inf}(n, p-1) \quad f \in F \quad u \in \mathrm{Dom}\, \Theta^*$

$$\begin{aligned} \varphi_3 &= \psi + 2\rho + \pi + \alpha(1+\beta) q \operatorname{Log} |g|^2 \qquad \psi \text{ p.s.h. de classe } C^2 . \\ \varphi_2 &= \psi + \rho + \pi + \alpha(1+\beta) q \operatorname{Log} |g|^2 \\ \varphi_1 &= \psi + \pi + \alpha(1+\beta) q \operatorname{Log} |g|^2 \\ \varphi &= \psi + \pi + (\alpha(1+\beta)q + 1) \operatorname{Log} |g|^2 \end{aligned}$$

et sous réserve que $|g| > 0$, que les p fonctions $|g|^2 |\partial(g_i |g|^{-2})|^2$ soient bornées , et que :

$$(10) \quad \mathcal{H}(\pi, \lambda) \geq \left(2 |\partial \bar\partial \rho| + \left(1 + \frac{1}{\beta}\right) |\partial \rho|^2 \right) |\lambda|^2 \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}^n .$$

Grâce à des passages à la limite standards , la proposition 3 va nous donner des théorèmes d'existence .

3. Le premier théorème d'existence

3.1. Théorème 1 : Soient Ω un ouvert pseudo-convexe de $\mathbb{C}^n$, ψ une fonction plurisousharmonique dans Ω .

Soient $g_1, \dots g_p$ des fonctions holomorphes dans Ω , q l'entier

$\operatorname{Inf}(n, p-1)$ et α une constante > 1 .

Alors pour toute fonction f holomorphe dans Ω telle que

$\int_\Omega |f|^2 |g|^{-2\alpha q-2} e^{-\psi} d\lambda < +\infty$,

il existe des fonctions holomorphes $h_1, \dots h_p$ telles que

$f = \sum_{i=1}^{p} g_i h_i$,

et $\int_\Omega |h|^2 |g|^{-2\alpha q} e^{-\psi} d\lambda \leq \frac{\alpha}{\alpha-1} \int_\Omega |f|^2 |g|^{-2\alpha q-2} e^{-\psi} d\lambda$

Démonstration : on commence par supposer que les restrictions de la proposition 2 sont satisfaites :

ψ de classe C^2 , $|g| > 0$ et $|g|^2 |\partial(g_i |g|^{-2})|^2$ bornée $1 \leq i \leq p$,

et $\mathcal{H}(\pi, \lambda)$ vérifie la condition (10) du 2.2 .

On a alors $\|v\|^2_\varphi = \int_\Omega |v|^2 e^{-\varphi} d\lambda \leq \frac{\alpha}{\alpha-1} \| L^* v + \Theta^* u \|_1^2$

pour tout $v \in F = L^2(\Omega, \varphi) \cap A(\Omega)$
et $u \in \operatorname{Dom} \Theta^*$.

Si $\int_\Omega |f|^2 e^{-\varphi} d\lambda < +\infty$, la proposition 1 implique l'existence de fonctions h_i holomorphes , $1 \leq i \leq p$, telles que :

$f = Lh = \sum_{i=1}^{p} g_i h_i$ et

(1) $\int_\Omega |h|^2 e^{-\varphi_1} d\lambda \leq \frac{\alpha}{\alpha-1} \int_\Omega |f|^2 e^{-\varphi} d\lambda$

Supposons maintenant que π est une fonction d'exhaustion C^2 strictement plurisousharmonique et propre sur Ω.

Soit $K_\nu = \{ z \in \Omega \ ; \ \pi(z) \leq \nu \}$ $\nu \in \mathbb{N}$

Par hypothèse de propreté K_ν est compact , et tout compact de Ω est contenu dans l'un des K_ν .

Prenons aussi $0 < \beta_\nu < \alpha - 1$ avec $\beta_\nu \to 0$,
et substituons $\frac{\alpha}{1+\beta_\nu}$ à α

On choisit $\eta_\nu \in C_0^\infty(\Omega)$ $0 \leq \eta_\nu \leq 1$ $\eta_\nu = 1$ au voisinage de K_ν pour tout $\nu \in \mathbb{N}$.

En particulier $\eta_r = 1$ sur un certain voisinage ouvert ω_ν de K_ν pour $r \geq \nu$ (ω_ν indépendant de r bien sûr) .

On peut donc choisir $\rho_\nu \in C^\infty(\Omega)$ $\rho_\nu \geq 0$, $\rho_\nu = 0$ sur un ouvert ω'_ν contenant K_ν et relativement compact dans ω_ν , telle que :

$|\bar\partial \eta_r| \leq e^{\rho_\nu}$ pour $r \geq \nu$

Reste à déterminer une fonction χ_ν croissante convexe de classe

C^2 sur $\mathbb{R}$ de sorte que la condition 2.2 (10) soit satisfaite lorsque $\chi_\nu \circ \pi$, β_ν, $\frac{\alpha}{1+\beta_\nu}$, et ρ_ν remplacent respectivement π, β, α, ρ. (2)

Or $\mathcal{H}(\chi_\nu \circ \pi, \lambda) \geqslant \chi'_\nu \circ \pi \; \mathcal{H}(\pi, \lambda) \geqslant \chi'_\nu \circ \pi \; c\, |\lambda|^2$ $\quad c > 0$, $c \in C^0(\Omega)$

2.2 (10) sera donc satisfait si

$$\chi'_\nu(t) \geqslant \sup_{\pi(z) \leqslant t} \frac{1}{c}\left(2\, |\partial\bar\partial \rho_\nu| + \left(1 + \frac{1}{\beta_\nu}\right) |\partial \rho_\nu|^2 \right)$$

Le second membre est une fonction croissante partout finie nulle sur un ouvert contenant $]-\infty, \nu]$.

On prendra donc $\chi_\nu = 0$ sur $]-\infty, \nu]$.

Avec les changements de notation précisés en (2) on a :

$$\varphi_1 = \psi + \chi_\nu \circ \pi + \alpha q \operatorname{Log} |g|^2$$
$$\varphi = \psi + \chi_\nu \circ \pi + (\alpha q + 1) \operatorname{Log} |g|^2$$

donc $\int_\Omega |f|^2 e^{-\varphi} d\lambda \leqslant \int_\Omega |f|^2 |g|^{-2\alpha q - 2} e^{-\psi} d\lambda < +\infty$ par hypothèse.

D'après (1) il existe des fonctions $h_\nu = (h_{1\nu}, \dots h_{p\nu})$ telles que :

$$f = \sum_{i=1}^{p} g_i h_{i\nu}$$

et $$\int_\Omega |h_\nu|^2 |g|^{-2\alpha q} e^{-\psi - \chi_\nu \circ \pi} d\lambda \leqslant \frac{\frac{\alpha}{1+\beta_\nu}}{\frac{\alpha}{1+\beta_\nu} - 1} \int_\Omega |f|^2 |g|^{-2\alpha q - 2} e^{-\psi} d\lambda$$

d'où $$\int_{K_\nu} |h_\nu|^2 |g|^{-2\alpha q} e^{-\psi} d\lambda \leqslant \frac{\alpha}{\alpha - 1 - \beta_\nu} \int_\Omega |f|^2 |g|^{-2\alpha q - 2} e^{-\psi} d\lambda$$

Comme $|g|^{-2\alpha q} e^{-\psi}$ est minorée sur tout compact, les familles $(h_{i\nu})_{\nu \in \mathbb{N}}$ forment des parties bornées de $A(\Omega)$ pour $i = 1, \dots p$.

Grâce à p extractions successives de sous-suites, on obtient une suite encore notée h_ν telle que $h_{i\nu}$ converge uniformément sur tout compact $K \subset \Omega$ vers une fonction holomorphe h_i.

Alors $$\int_K |h|^2 |g|^{-2\alpha q} e^{-\psi} d\lambda = \lim_{\nu \to +\infty} \int_K |h_\nu|^2 |g|^{-2\alpha q} e^{-\psi} d\lambda$$
$$\leqslant \frac{\alpha}{\alpha - 1} \int_\Omega |f|^2 |g|^{-2\alpha q - 2} e^{-\psi} d\lambda$$

et comme cette relation est vraie pour tout compact $K \subset \Omega$ les conclusions du théorème sont acquises.

Eliminons maintenant les deux hypothèses suivantes :

(i) $|g|^2 \, |\partial(g_i |g|^{-2})|^2$ bornée $\quad 1 \leqslant i \leqslant p$
(ii) ψ de classe C^2.

Considérons une suite croissante d'ouverts pseudo-convexes Ω_ν

relativement compacts dans Ω, et tels que $\Omega = \bigcup_{\nu=0}^{\infty} \Omega_\nu$

(i) est évidemment vérifiée dans chaque Ω_ν puisqu'on suppose $|g| > 0$.

D'après Hörmander [2] p.45, th 2.6.3 on peut trouver une suite de fonctions ψ_ν plurisousharmoniques et de classe C^∞ sur Ω_ν telles que :

$$\psi_{\nu+1} \leq \psi_\nu \quad \text{sur } \Omega_\nu \qquad \text{et} \qquad \psi = \lim_{\nu \to +\infty} \psi_\nu$$

Il existe alors des $h_\nu = (h_{1\nu}, \dots h_{p\nu})$ holomorphes sur Ω_ν telles que :

$$f = \sum_{i=1}^{p} g_i h_{i,\nu} \quad \text{et}$$

$$\int_{\Omega_\nu} |h_\nu|^2 |g|^{-2\alpha q} e^{-\psi_\nu} d\lambda \leq \frac{\alpha}{\alpha-1} \int_{\Omega_\nu} |f|^2 |g|^{-2\alpha q-2} e^{-\psi_\nu} d\lambda$$

Un passage à la limite analogue au précédent montre qu'il existe des fonctions holomorphes $h_1, \dots h_p$ sur Ω vérifiant les conditions du théorème.

Eliminons enfin l'hypothèse $|g| > 0$; choisissons parmi les g_i une fonction non identiquement nulle, par exemple g_1, et appliquons le théorème sur l'ouvert pseudo-convexe :

$$\Omega_1 = \Omega \setminus X_1 \quad \text{où } X_1 \text{ est l'hypersurface } g_1(z) = 0 .$$

D'après [5] p.560 lemme 2, toute fonction $h \in L^2_{loc}(\Omega) \cap A(\Omega_1)$ se prolonge en une fonction holomorphe sur Ω.
(comme X_1 est de mesure nulle on peut supposer que h est seulement définie sur Ω_1)

Une solution h de $f = \sum_{i=1}^{p} g_i h_i$ sur Ω_1 se prolonge donc en une solution sur Ω tout entier.

3.2 Conséquences.

On considère un ensemble Φ de fonctions plurisousharmoniques sur un ouvert pseudo-convexe Ω ayant la propriété suivante :

$$\text{si } \varphi_1, \varphi_2 \in \Phi \qquad \operatorname{Sup}(\varphi_1, \varphi_2) \text{ et } \varphi_1 + \varphi_2 \in \Phi .$$

Notons A_Φ l'ensemble des fonctions holomorphes f telles qu'il existe $\varphi \in \Phi$ et une constante $C \geq 0$:

$$\text{pour tout } z \in \Omega \qquad |f(z)| \leq C \exp(\varphi(z))$$

On supposera que A_Φ contient les polynômes et que $f \in A_\Phi$ si et seulement si : $\int_\Omega |f|^2 e^{-\varphi} d\lambda < +\infty$ pour au moins une fonction $\varphi \in \Phi$.

Pour des fonctions $(g_i)_{1 \leq i \leq p}$ dans A_Φ, et une fonction positive γ sur Ω, notons :

- $\mathcal{I}(g)$ l'idéal engendré par les g_i
- $\mathcal{J}(\gamma)$ l'idéal des $f \in A_\phi$ telles que $|f| \leq C\gamma \exp(\varphi)$ pour une constante $C \geq 0$ et une fonction $\varphi \in \phi$.

Le résultat suivant est une conséquence immédiate du théorème 1 :

<u>Corollaire 1</u> (Hörmander) : il y a équivalence entre

(i) $\mathcal{I}(g) = A_\phi$

(ii) Il existe une constante A et une fonction $\varphi \in \phi$ telles que $|g| \geq A \exp(-\varphi)$.

(iii) Il existe $\alpha > 1$ et $\varphi \in \phi$ tels que $\int_\Omega |g|^{-2\alpha q-2} \exp(-\varphi)\, d\lambda < +\infty$
$q = \operatorname{Inf}(n, p-1)$

Le corollaire suivant généralise et améliore les résultats de Kelleher et Taylor [4] chap. II :

<u>Corollaire 2</u> :

(i) $\mathcal{I}(g) \subset \widehat{\mathcal{I}(g)} \subset \mathcal{J}(|g|) = \widehat{\mathcal{J}(|g|)}$

où $\widehat{\mathcal{I}(g)}$ (resp. $\widehat{\mathcal{J}(|g|)}$) est la clôture intégrale de $\mathcal{I}(g)$ (resp. $\mathcal{J}(|g|)$)

(ii) $\mathcal{J}(|g|)^{q+\ell+1} \subset \mathcal{I}(g)^\ell$ pour tout entier $\ell \geq 1$
et $q = \operatorname{Inf}(n, p-1)$

En particulier $\mathcal{I}(g)$ et $\mathcal{J}(|g|)$ ont même racine.

(iii) S'il existe $\varphi \in \phi$ et $\varepsilon > 0$ tels que $\int_\Omega |g|^{-\varepsilon} \exp(-\varphi)\, d\lambda < +\infty$ alors $\mathcal{J}(|g|)^{q+\ell} \subset \mathcal{I}(g)^\ell$ pour tout entier $\ell \geq 1$.

(iv) Si $\mathcal{J}(|g|)^k = \mathcal{I}(g)^\ell$ pour $k \neq \ell$ alors $\mathcal{I}(g) = \mathcal{J}(|g|) = A_\phi$.

<u>Démonstration</u> : (i) Il est clair que $\mathcal{I}(g) \subset \mathcal{J}(|g|)$

Il suffit donc de vérifier que $\mathcal{J}(|g|) = \widehat{\mathcal{J}(|g|)}$.

$f \in \widehat{\mathcal{J}(|g|)}$ par définition s'il existe un entier ≥ 1 et des éléments a_j, $1 \leq j \leq k$, $a_j \in \mathcal{J}(|g|)^j$ tels que

$$f^k + a_1 f^{k-1} + \dots + a_k = 0 .$$

Il existe $\varphi \in \phi$ et des constantes C_j telles que :

$$|a_j| \leq C_j |g|^j \exp(j\varphi)$$

Si $|g| = 0$ alors $|a_j| = 0$ et $|f| = 0$

Si $|g| \neq 0$ on a $$\left[\frac{|f|}{|g| \exp(\varphi)}\right]^k \leq C_1 \left[\frac{|f|}{|g| \exp(\varphi)}\right]^{k-1} + \dots + C_k \qquad (1)$$

donc $$\frac{|f|}{|g| \exp(\varphi)} \leq C = \sup(C_1 + \dots + C_k, 1)$$

(car c'est vrai si $\frac{|f|}{|g|\exp(\varphi)} \leq 1$, et sinon cela résulte de (1)
en divisant par $\left(\frac{|f|}{|g|\exp(\varphi)}\right)^{k-1}$)

d'où $|f| \leq C\,|g| \exp(\varphi)$ et $f \in \mathcal{J}(|g|)$.

(ii) Si γ est une fonction mesurable ≥ 0 sur Ω, on note
$\mathcal{K}(\gamma)$ l'idéal des $f \in A_\Phi$ telles qu'il existe $\varphi \in \Phi$:

$$\int_\Omega |f|^2 \gamma^{-2} \exp(-\varphi)\, d\lambda < +\infty$$

si $|f| \leq C\gamma \exp(\varphi)$ et $\int_\Omega \exp(-\varphi)\, d\lambda < +\infty$

on a $\int_\Omega |f|^2 \gamma^{-2} \exp(-2\varphi)\, d\lambda \leq C^2 \int_\Omega \exp(-\varphi)\, d\lambda < +\infty$

donc $\mathcal{J}(\gamma) \subset \mathcal{K}(\gamma)$.

Montrons que $\mathcal{J}(|g|)^{q+\ell+1} \subset \mathcal{K}(|g|^{q+\ell+1}) \subset \mathcal{I}(g)^\ell\, \mathcal{K}(|g|^{q+1})$.

La première inclusion résulte de ce que $\mathcal{J}(|g|)^{q+\ell+1} \subset \mathcal{J}(|g|^{q+\ell+1})$; il suffit donc de raisonner par récurrence sur ℓ, en s'assurant que :

$$\mathcal{K}(|g|^{q+\ell+1}) \subset \mathcal{I}(g)\, \mathcal{K}(|g|^{q+\ell}) \quad \text{pour } \ell \geq 1$$

Mais ceci est l'exacte traduction du théorème 1 avec $\alpha = 1 + \frac{\ell}{q}$.

(iii) Remarquons d'abord que la condition est toujours vraie localement ;
(si $g \in A_\Phi$ est un polynôme de Weierstrass de degré k sur un voisinage compact K d'un point $z_0 \in \Omega$, alors

$$\int_K |g|^{-\frac{1}{k}}\, d\lambda < +\infty \quad .)$$

Sous l'hypothèse (iii) $\mathcal{J}(|g|^{q+\ell}) \subset \mathcal{K}(|g|^{q+\ell+\frac{\varepsilon}{2}})$ (vérification immédiate)
et $\mathcal{K}(|g|^{q+\ell+\frac{\varepsilon}{2}}) \subset \mathcal{I}(g)\, \mathcal{K}(|g|^{q+\ell-1+\frac{\varepsilon}{2}})$ pour tout $\ell \geq 1$

grâce au théorème 1 appliqué à $\alpha = 1 + \frac{1}{q}(\ell - 1 + \frac{\varepsilon}{2})$.

(iv). En effet si $k > \ell$ on a $g_i^\ell \in \mathcal{J}(|g|)^k \subset \mathcal{J}(|g|^k)$

d'où $|g_i^\ell| \leq C\,|g|^k \exp(\varphi)$ $C > 0$ $\varphi \in \Phi$

et $|g|^\ell \leq p^{(\frac{\ell}{2}-1)_+} . C\,|g|^k \exp(\varphi)$

Comme $k > \ell$, il vient $|g|^{k-\ell} \geq K \exp(-\varphi)$ $K > 0$

or $|g|^{k-\ell-1} \leq C' \exp(\varphi')$ d'où $|g| \geq C'' \exp(-\varphi'')$ $C'' > 0$, $\varphi'' \in \Phi$.

et d'après le corollaire 1 $\mathcal{I}(g) = \mathcal{J}(|g|) = A_\Phi$

• Si $k < \ell$ alors $g_i^k \in \mathcal{J}(|g|)^k = \mathcal{I}(g)^\ell \subset \mathcal{J}(|g|^\ell)$

et on applique le même raisonnement .

Nous allons maintenant démontrer le deuxième théorème d'existence de H. Skoda [5] qui nous permettra de retrouver le résultat $\mathcal{J}(|g|)^{q+1} \subset \mathcal{J}(g)$ du corollaire 2 (iii) sous des hypothèses applicables aux algèbres de fonctions entières d'ordre fini.

4. Le second théorème d'existence.

Ce théorème se propose d'être l'analogue du théorème 1 pour $\alpha = 1$.

Lorsque $\alpha = 1$, la proposition 2 fournit :

$$\| L^* v + \Theta^* u \|_1^2 \geq \int_\Omega \frac{1}{1+\beta} \sum_{i,k,l} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z_k \partial \bar z_l} u_{ik} \overline{u_{il}}\, e^{-\varphi_3}\, d\lambda$$

avec $\beta > 0$, $q = \mathrm{Inf}(n, p-1)$, $v \in F$, $u \in \mathrm{Dom}\, \Theta^*$

π, ψ plurisousharmoniques de classe C^2 sur Ω

$$\begin{aligned} \varphi_3 &= \psi + 2\rho + \pi + (1+\beta) q \operatorname{Log}|g|^2 \\ \varphi_2 &= \psi + \rho + \pi + (1+\beta) q \operatorname{Log}|g|^2 \\ \varphi_1 &= \psi + \pi + (1+\beta) q \operatorname{Log}|g|^2 \\ \varphi &= \psi + \pi + ((1+\beta)q + 1) \operatorname{Log}|g|^2 \end{aligned}$$

avec les même restrictions que pour la proposition 2.

Supposons de plus ψ strictement plurisousharmonique :
$\mathcal{H}(\psi, \lambda) \geq c|\lambda|^2$ où c est continue > 0 sur Ω.

Soient $w = (w_1, w_2, \ldots w_p) \in H_2$ un système de p formes de bidegré $(0,1)$.

Par définition de H_2 on a $\bar\partial w_i = 0$ et $\int_\Omega |w_i|^2 e^{-\varphi_2} d\lambda < +\infty$

Supposons de plus que $\int_\Omega \frac{1}{c} |w|^2 e^{-\varphi_1} d\lambda < +\infty$.

On a alors $(w, u)_{\varphi_2} = \int_\Omega \sum_{i,k} w_{ik} \overline{u_{ik}}\, e^{-\varphi_2} d\lambda$

$$|(w,u)_{\varphi_2}|^2 \leq \left(\int_\Omega \frac{1}{c} |w|^2 e^{-\varphi_1} d\lambda\right)\left(\int_\Omega c|u|^2 e^{-\varphi_3} d\lambda\right)$$

$$|(w,u)_{\varphi_2}| \leq \sqrt{1+\beta} \left(\int_\Omega \frac{1}{c}|w|^2 e^{-\varphi_1} d\lambda\right)^{\frac12} \| L^* v + \Theta^* u \|_1$$

L'application du théorème de Hahn-Banach montre qu'il existe un système de p fonctions $h = (h_1, \ldots h_p) \in H_1 = [L^2(\Omega, \varphi_1)]^p$ tel que :

$$\int_\Omega |h|^2 e^{-\varphi_1} d\lambda \leq (1+\beta) \int_\Omega \frac{1}{c} |w|^2 e^{-\varphi_1} d\lambda$$

et $(w, u)_{\varphi_2} = (h, L^* v + \Theta^* u)_1$ avec $u \in \mathrm{Dom}\, \Theta^*$, $v \in F$

ce qui équivaut à :

$Th = w$ (en faisant $v = 0$)

et de plus $(Lh, v)_\varphi = 0$ pour tout $v \in F$

soit encore $\bar\partial h_i = w_i$ $1 \leq i \leq p$ et :

$$\int_\Omega \Big(\sum_{i=1}^p g_i h_i\Big) \bar{v}\, e^{-\varphi}\, d\lambda = 0 \qquad \forall v \in F .$$

Quitte à remplacer Ω par un ouvert Ω' pseudo-convexe relativement compact dans Ω, on peut supposer $|g|$ minorée dans Ω.
(et on supprime ainsi en même temps l'hypothèse suivant laquelle les fonctions $|g|^2\, |\partial(g_i\, |g|^{-2})|^2$ sont bornées.)

Supposons $\int_\Omega |w|^2\, |g|^{-2q}\, e^{-\psi}\, d\lambda < +\infty$
et $\int_\Omega \frac{1}{c}\, |w|^2\, |g|^{-2q}\, e^{-\psi}\, d\lambda < +\infty$

On peut alors recommencer le passage à la limite décrit au début de la démonstration du théorème 1.

Avec les mêmes notations que dans cette démonstration on obtient des fonctions $h_\nu \in A(\Omega)$ telles que :

- $\int_\Omega |h_\nu|^2\, |g|^{-2(1+\beta_\nu)q}\, e^{-\psi - \chi_\nu \circ \pi}\, d\lambda$
$$\leqslant (1+\beta_\nu) \int_\Omega \frac{1}{c}\, |w|^2\, |g|^{-2(1+\beta_\nu)q}\, e^{-\psi-\chi_\nu\circ\pi}\, d\lambda$$
$$\leqslant (1+\beta_\nu) \Big(\operatorname*{Inf}_{z\in\Omega} |g(z)|\Big)^{-2\beta_\nu q} \int_\Omega \frac{1}{c}\, |w|^2\, |g|^{-2q}\, e^{-\psi}\, d\lambda$$
Comme $|g|$ est minorée, la dernière ligne tend vers
$\int_\Omega \frac{1}{c}\, |w|^2\, |g|^{-2q}\, e^{-\psi}\, d\lambda$ quand $\nu \to +\infty$
- $\bar\partial h_{i\nu} = w_i \qquad 1 \leqslant i \leqslant p .$
- et $\int_\Omega \Big(\sum_{i=1}^p g_i h_{i\nu}\Big) \bar{v}\, e^{-\varphi_\nu}\, d\lambda = 0$
pour toute fonction holomorphe v telle que $\int_\Omega |v|^2\, e^{-\varphi_\nu}\, d\lambda < +\infty$
et $\varphi_\nu = \psi + \chi_\nu \circ \pi + ((1+\beta_\nu)q + 1)\, \mathrm{Log}\, |g|^2$.

On extrait une sous-suite encore notée $h_\nu = (h_{i\nu})_{1\leqslant i\leqslant p}$ convergeant faiblement dans L^2_{loc} vers $h = (h_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$ telle que :

$$\int_\Omega |h|^2\, |g|^{-2q}\, e^{-\psi}\, d\lambda \leqslant \int_\Omega \frac{1}{c}\, |w|^2\, |g|^{-2q}\, e^{-\psi}\, d\lambda$$

et $\bar\partial h_i = w_i \qquad 1 \leqslant i \leqslant p .$

La seule difficulté est de vérifier qu'on a bien
$\int_\Omega \Big(\sum_{i=1}^p g_i h_i\Big) \bar{v}\, |g|^{-2q-2}\, e^{-\psi}\, d\lambda = 0$ pour toute fonction holomorphe v telle que $\int_\Omega |v|^2\, |g|^{-2q-2}\, e^{-\psi}\, d\lambda < +\infty$.

Soit K compact $\subset \Omega$;

$$\int_\Omega \Big(\sum_{i=1}^p g_i h_i\Big) \bar{v}\, |g|^{-2q-2} e^{-\psi}\, d\lambda - \int_\Omega \Big(\sum_{i=1}^p g_i h_{i\nu}\Big) \bar{v}\, |g|^{-2(1+\beta_\nu)q-2} e^{-\psi-\chi_\nu\circ\pi}\, d$$
$$= \int_K \sum_{i=1}^p g_i \big(h_i - h_{i\nu}\, |g|^{-2\beta_\nu q}\big)\, |g|^{-2q-2}\, e^{-\psi}\, d\lambda + \int_{\complement K} \cdots - \int_{\complement K} \cdots$$

$$\left| \int_{\complement K} \left(\sum_{i=1}^{p} g_i h_i \right) \bar{v} \, |g|^{-2q-2} e^{-\psi} d\lambda \right| \leq \int_{\complement K} |v| \, |h| \, |g|^{-2q-1} e^{-\psi} d\lambda$$

$$\leq \left(\int_{\complement K} |v|^2 |g|^{-2q-2} e^{-\psi} d\lambda \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\Omega} |h|^2 |g|^{-2q} e^{-\psi} d\lambda \right)^{\frac{1}{2}}$$

et de même

$$\left| \int_{\complement K} \left(\sum_{i=1}^{p} g_i h_{i\nu} \right) \bar{v} \, |g|^{-2(1+\beta_\nu)q-2} e^{-\psi-\chi_\nu \circ \pi} d\lambda \right| \leq$$

$$\left(\int_{\complement K} |v|^2 |g|^{-2(1+\beta_\nu)q-2} e^{-\psi-\chi_\nu\circ\pi} d\lambda \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\Omega} |h_\nu|^2 |g|^{-2(1+\beta_\nu)q} . e^{-\psi-\chi_\nu\circ\pi} d\lambda \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq \left(\operatorname{Inf}_{z \in \Omega} |g(z)| \right)^{-\beta_\nu q} \left(\int_{\complement K} |v|^2 |g|^{-2q-2} e^{-\psi} d\lambda \right)^{\frac{1}{2}} . \text{ constante}$$

donc les deux intégrales étendues à $\complement K$ peuvent être choisies arbitrairement petites (indépendamment de ν) pourvu que K soit assez grand.

Il suffit de voir qu'en fait $h_{i\nu} \to h_i$ uniformément sur tout compact.

Mais $h_i - h_{i\nu}$ est holomorphe, et décrit une partie bornée de L^2_{loc}, donc relativement compacte dans $A(\Omega)$.

0 est limite faible dans L^2_{loc}, par suite c'est la seule valeur d'adhérence dans $A(\Omega)$ de $h_i - h_{i\nu}$, et la preuve est achevée.

On supprime enfin l'hypothèse $|g|$ minorée en considérant une suite croissante Ω_ν d'ouverts pseudoconvexes relativement compacts dans Ω tels que $\Omega = \bigcup \Omega_\nu$, et en procédant comme dans le théorème 1.

On a donc la proposition suivante pour laquelle on se donne p fonctions holomorphes $g_1, \dots g_p$ sans zéros communs sur Ω, et une fonction plurisousharmonique ψ de classe C^2 vérifiant :

$$\sum_{k,\ell} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z_k \partial \bar{z}_\ell} \lambda_k \bar{\lambda}_\ell \geq c |\lambda|^2 \qquad \begin{array}{l} c \in C^0(\Omega) \\ c > 0 \end{array}$$

<u>Proposition 3</u> : Soient $w = (w_1, \dots w_p)$ un système de p formes de bidegré $(0,1)$ telles que :

$$\int_\Omega \left(1 + \frac{1}{c}\right) |w|^2 |g|^{-2q} e^{-\psi} d\lambda < +\infty \qquad q = \operatorname{Inf}(n, p-1)$$

Il existe p fonctions h_i telles que :

(a) $\bar{\partial} h_i = w_i$

(b) $\int_\Omega \left(\sum_{i=1}^{p} g_i h_i \right) \bar{v} \, e^{-\varphi} d\lambda = 0$ avec $\varphi = \psi + (q+1) \operatorname{Log} |g|^2$

et pour toute fonction holomorphe $v \in F = A(\Omega) \cap L^2(\Omega, \varphi)$

(c) $\int_\Omega |h|^2 |g|^{-2q} e^{-\psi} d\lambda \leq \int_\Omega \frac{1}{c} |w|^2 |g|^{-2q} e^{-\psi} d\lambda$.

Soit f une fonction holomorphe sur Ω, et cherchons des fonctions h_i telles que $f = \Sigma g_i h_i$.

On a $f = \sum_{i=1}^{p} g_i h_i'$ avec $h_i' = f \dfrac{\bar g_i}{|g|^2}$ (on suppose $|g| > 0$)

Un calcul facile montre que

$$w_i = \bar\partial h_i' = f\, |g|^{-4} \sum_{j,k} g_j \overline{\left(g_j \frac{\partial g_i}{\partial z_k} - g_i \frac{\partial g_j}{\partial z_k}\right)} d\bar z_k$$

On cherche à appliquer la proposition 3 aux w_i.

On a $\int_\Omega \frac{1}{c} |w|^2 |g|^{-2q} e^{-\psi} d\lambda \leqslant$

$$\leqslant \int_\Omega \frac{1}{c} |f|^2 |g|^{-2q-2} \sum_{i,j,k} |g|^{-4} \left| g_j \frac{\partial g_i}{\partial z_k} - g_i \frac{\partial g_j}{\partial z_k}\right|^2 e^{-\psi} d\lambda$$

(en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz sur la sommation en j.)

On $\frac{1}{4} \Delta (\mathrm{Log}|g|^2) = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{\partial^2}{\partial z_k \partial \bar z_k} (\mathrm{Log}|g|^2) = \frac{1}{2} |g|^{-4} \sum_{i,j,k} \left| g_j \dfrac{\partial g_i}{\partial z_k} - g_i \dfrac{\partial g_j}{\partial z_k}\right|^2$

donc $\int_\Omega \frac{1}{c} |w|^2 |g|^{-2q} e^{-\psi} d\lambda \leqslant \int_\Omega \frac{1}{c} |f|^2 |g|^{-2q-2} \Delta \mathrm{Log}|g|\, e^{-\psi} d\lambda$

et on a la même inégalité en remplaçant $\frac{1}{c}$ par $1 + \frac{1}{c}$.

Supposons $\int_\Omega \left(1 + \frac{1}{c}\right) |f|^2 |g|^{-2q-2} \Delta \mathrm{Log}|g|\, e^{-\psi} d\lambda < +\infty$

Alors d'après la proposition 3 il existe des fonctions h_i'' telles que :

$$\bar\partial h_i'' = w_i \quad \text{et :}$$

$$\int_\Omega |h''|^2 |g|^{-2q} e^{-\psi} d\lambda \leqslant \int_\Omega \frac{1}{c} |f|^2 |g|^{-2q-2} \Delta \mathrm{Log}|g|\, e^{-\psi} d\lambda$$

avec $\int_\Omega \left(\sum_{i=1}^{p} g_i h_i'' \right) \bar v\, |g|^{-2q-2} e^{-\psi} d\lambda = 0$ pour tout $v \in F$

Posons $h_i = h_i' - h_i''$; h_i est holomorphe

or $\int_\Omega |h'|^2 |g|^{-2q} e^{-\psi} d\lambda = \int_\Omega |f|^2 |g|^{-2q-2} e^{-\psi} d\lambda$ qu'on suppose finie

Alors $\sum_{i=1}^{p} g_i h_i' \in L^2(\Omega, \varphi)$ et d'après la condition (b) sur h'' :

$$\int_\Omega \left(\sum_{i=1}^{p} g_i h_i \right) \bar v\, |g|^{-2q-2} e^{-\psi} d\lambda = \int_\Omega \left(\sum_{i=1}^{p} g_i h_i' \right) \bar v\, |g|^{-2q-2} e^{-\psi} d\lambda$$

$$= \int_\Omega f \bar v\, |g|^{-2q-2} e^{-\psi} d\lambda$$

En soustrayant le membre de droite du membre de gauche et en prenant :

$$v = \sum_{i=1}^{p} g_i h_i - f$$

on voit que $f = \sum_{i=1}^{p} g_i h_i$,

et de plus $\int_\Omega |h|^2 |g|^{-2q} e^{-\psi} d\lambda$

$$\leqslant 2 \int_\Omega |h'|^2 |g|^{-2q} e^{-\psi} d\lambda + 2 \int_\Omega |h''|^2 |g|^{-2q} e^{-\psi} d\lambda$$

$$\leq 2 \int_\Omega |f|^2 |g|^{-2q-2} \left[1 + \tfrac{1}{c} \Delta \operatorname{Log}|g|\right] e^{-\psi} d\lambda$$

En remplaçant ψ par $\psi + 2 \operatorname{Log}(1+|z|^2)$, c par $\frac{2}{(1+|z|^2)^2}$ on obtient :

<u>Théorème 2</u> : Soient Ω un ouvert pseudo-convexe de $\mathbb{C}^n$, ψ une fonction plurisousharmonique dans Ω, et $g = (g_1, \dots g_p)$ un système de p fonctions holomorphes dans Ω ;
Soit X l'ensemble des zéros communs aux fonctions g_i, et q l'entier $\operatorname{Inf}(n, p-1)$.

Pour toute fonction f holomorphe dans Ω telle que

$$\int_{\Omega \setminus X} |f|^2 |g|^{-2q-2} \left(\frac{2}{(1+|z|^2)^2} + \Delta \operatorname{Log}|g|\right) e^{-\psi} d\lambda < +\infty$$

il existe p fonctions h_i holomorphes dans Ω telles que :

$$f = \sum_{i=1}^{p} g_i h_i$$

et $\int_\Omega |h|^2 |g|^{-2q} (1+|z|^2)^{-2} e^{-\psi} d\lambda \leq$

$$\int_{\Omega \setminus X} |f|^2 |g|^{-2q-2} \left(\frac{2}{(1+|z|^2)^2} + \Delta \operatorname{Log}|g|\right) e^{-\psi} d\lambda$$

<u>Remarque</u> : en fait le théorème 2 est démontré seulement lorsque $|g| > 0$ et ψ de classe C^2, mais on peut éliminer ces restrictions en procédant comme pour le théorème 1.

En reprenant les notations de la section 3.2., on déduit aisément du théorème 2 le résultat suivant :

<u>Corollaire 3</u> : s'il existe $\varphi \in \Phi$ telle que $\int_{\Omega \setminus X} \Delta \operatorname{Log}|g| e^{-\varphi} d\lambda$ soit finie, on a $\mathcal{J}(|g|)^{q+1} \subset \mathcal{I}(g)$.

Lorsque $n = 1$, on obtient le résultat de Kelleher et Taylor [4] p. 231, théorème 3.2 : $\mathcal{J}(|g|)^2 \subset \mathcal{I}(g)$.

Le corollaire 3 s'applique aux algèbres A_ϕ de fonctions entières d'ordre fini, grâce au lemme suivant, démontré dans Skoda [5] p. 573, lemme 3 :

<u>Lemme 5</u> : si g est d'ordre au plus ρ

(c'-à-d si $\operatorname{Log}|g(z)| \leq C(\varepsilon)(1+|z|)^{\rho+\varepsilon}$ pour tout $\varepsilon > 0$)

alors pour tout $\varepsilon > 0$ on a :

$$\int_{\mathbb{C}^n \setminus X} \Delta(\operatorname{Log}|g(z)|)\,(1+|z|)^{-2n+2-\rho-\varepsilon} d\lambda(z) < +\infty$$

D'après le corollaire 3 $\mathcal{J}(|g|)^{q+1} \subset \mathcal{I}(g)$.

On peut également définir la notion d'ordre de croissance dans le cas d'un ouvert borné Ω :

la fonction g sera dite d'ordre $\leq \rho$ si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $C(\varepsilon)$ tel que :

$$\mathrm{Log}\,|g(z)| \leq C(\varepsilon)\, d(z)^{-\rho-\varepsilon}$$

où $d(z)$ est la distance de z au bord de Ω.

Lorsque la frontière de Ω est de classe C^2, le lemme 5 s'étend à cette situation.

Enfin on peut montrer par des contre-exemples que le résultat $\mathcal{J}(|g|)^{q+1} \subset \mathcal{J}(g)$ ne peut être amélioré.

(Cf Skoda [5] p. 575 - 576, Kelleher et Taylor [4] p. 233, théorème 3.6)

5. Application aux équations de convolution.

Grâce au théorème de Paley-Wiener, l'algèbre de convolution $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ devient par la transformation de Fourier-Laplace l'algèbre A_ϕ avec

$$\phi = \{ A\,|\mathrm{Im}\,z| + s\,\mathrm{Log}(1+|z|) \ ;\ A > 0,\ s > 0 \}$$

Les équations de convolution du type $\sum_{j=1}^{p} T_j * X_j = Y$

où Y et les T_j sont les données, et les X_j les inconnues équivalent donc à des équations :

$$\sum_{j=1}^{p} \hat{T}_j \hat{X}_j = \hat{Y} \quad \text{dans l'algèbre } A_\phi .$$

Le théorème 1 fournit alors un théorème d'existence et de régularité des solutions, que nous énonçons sans démonstration (Cf Skoda [5] p. 576 - 578, § 5)

<u>Théorème 3</u> : soit $T_j \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ telles que

$$C_1 \exp(A_1 |\mathrm{Im}\,z|)\,(1+|z|)^{s_1} \geq \sum_{j=1}^{p} |\hat{T}_j(z)| \geq C_2 \exp(-A_2 |\mathrm{Im}\,z|)\,(1+|z|)^{-s_2}$$

avec des constantes $C_1, A_1, A_2, s_1, s_2 \geq 0$, $C_2 > 0$.

Alors pour tout $Y \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ à support dans la boule de rayon A et dans $H^{-s}(\mathbb{R}^n)$, pour tout $\varepsilon > 0$, et tout $\alpha > 1$, il existe des $X_j \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ telles que :

$$\sum_{j=1}^{p} T_j * X_j = Y \quad \text{et} \quad X_j \in H^{-s'}(\mathbb{R}^n) \quad s' = s + s_2 + \alpha q (s_1 + s_2)$$

le support des X_j est contenu dans la boule de rayon A' avec :

$$A' = A + A_2 + \alpha q (A_1 + A_2) + \varepsilon \quad \text{et } q = \mathrm{Inf}(n, p-1) .$$

Bibliographie :

[1] Hörmander (L.) : L^2 estimates and existence theorems for the ∂ operator.
Acta. Math., vol. 113, 1966, p 89-152

[2] Hörmander (L.) : An introduction to complex analysis in several variables,
Second Edition, North Holland Publishing Company, 1973.

[3] Hörmander (L.) : Generators for some rings of analytic functions.
Bull. Amer. Math. Soc., vol. 73, 1967, p. 943.

[4] Kelleher (J.J) et Taylor (B.A) : Finitely generated ideals in rings of analytic functions.
Math. Ann., vol. 193, 1971, p225-237

[5] Skoda (H.) : Application des techniques L^2 à la théorie des idéaux d'une algèbre de fonctions holomorphes avec poids.
Annales E.N.S., 4e série, tome 5, 1972, p 545-579.