Une petite remarque

/

Comme tu le suggère toi-même dans la remarque 2.10, il est possible d'affaiblir les hypothèses de ton théorème 1.1 en supposant seulement que φ est psh sur Ω, possède des valeurs au bord nulles (en un sens assez général) et vérifie $\int_\Omega (dd^c\varphi)^n \leq M$. En effet, l'argument de compacité utilisé dans la preuve de ton théorème fonctionne encore dans ce cas si l'on fait l'observationen suivante:

La classe $\mathcal{P}_0 := \mathcal{P}_0(\Omega, M)$ φ des fonctions psh sur Ω, à valeurs au bord nulles et vérifiant $\int_\Omega (dd^c\varphi)^n \leq M$ est une partie relativement compacte de $L^1_{loc}(\Omega)$ et son adhérence possède les mêmes propriétés à savoir qu'elle a encore des valeurs au bord nulles en un sens un peu plus général de sorte que son Monge-Ampère reste bien définie et vérifie $\int_\Omega (dd^c\varphi)^n \leq M$.

Cette remarque est contenue dans mon papier (Ind. Univ. Math. J. Vol. 50, No. 1 (2001), cor. 4.4, p. 685). On peut la prouver de la façon suivante. On peut toujours supposer $M = 1$ pour simplifier.

Suivant Cegrell, déignons par $\mathcal{E}_0(\Omega)$ l'ensembles des fonctions psh test i.e. des fonctions psh bornées sur Ω ayant des valeurs au bord nulles et dont la mesure de Monge-Ampère a une masse finie. Alors, grâce à n intégrations par parties successives, on montre qu'il existe une constante $c_n > 0$ telle que si φ et ψ sont des fonctions de la classe $\mathcal{E}_0(\Omega)$, on a

$$\int_\Omega (-\varphi)^n (dd^c\psi)^n \ \leq \ c_n \|\psi\|^n_{L^\infty} \int_\Omega (dd^c\varphi)^n.$$

Cette estimation est assez standard et a été observée pour la première fois sans doute par Blocki (Bull. Polish. Acad. Sc. Math., 41 (1993), 151-157). Il est clair par tronquature que cette estimation est encore valable lorsque $\varphi \in \mathcal{P}_0$ et $\psi \in \mathcal{E}_0(\Omega)$. Ce qui prouve que $\mathcal{P}_0$ est relativement compact dans $L^1_{loc}(\Omega)$.

Pour déterminer l'adhérence de $\mathcal{P}_0$, on utlise la classe $\mathcal{F}(\Omega)$ définie par Cegrell (Ann. Inst. Fourier, 54 (2004)). Par définition, $\mathcal{F}(\Omega)$ est la classe des fonctions φ psh négatives sur Ω telle qu'il existe une suite décroissante (φ_j) de fonctions test de la classe $\mathcal{E}_0(\Omega)$ qui converge vers φ et telles que $\sup_j \int_\Omega (dd^c\varphi_j)^n < +\infty$. Cegrell a montré que l'opérateur de Monge-Ampère est bien défini sur $\mathcal{F}(\Omega)$ et est continue sur les suites décroissantes. Il est alors facile de montrer que l'adhérence de $\mathcal{P}_0$ dans $L^1_{loc}(\Omega)$ coincide avce la classe $\mathcal{F}_0$ des fonctions psh $\varphi \in \mathcal{F}(\Omega)$ telles que $\int_\Omega (dd^c\varphi)^n \leq 1$. En effet si (φ_j) est une suite d'éléments de $\mathcal{P}_0$ qui converge dans $L^1_{loc}(\Omega)$ vers φ alors on sait que $\varphi = (\limsup_j \varphi_j)*$ sur Ω. En posant $\psi_j := (\sup_{k \geq j} \varphi_k)*$, on obtient une suite décroissantes de fonctions de $\mathcal{P}_0$ qui décroit vers φ et puisque $\varphi_j \leq \psi_j \leq$, elles ont des valeurs au bord nulles et le principe de comparaison implique que $\int_\Omega (dd^c\psi_j)^n \leq \int_\Omega (dd^c\varphi_j)^n \leq 1$, ce qui prouve que $\varphi \in \mathcal{F}(\Omega)$. L'estimation $\int_\Omega (dd^c\varphi)^n \leq 1$ en résulte puisque $(dd^c\psi_j)^n \to (dd^c\varphi)^n$ faiblement.

Un complément

/

En fait on peut démonter le théorème d'intégrabilité globale suivant :

Theorem 0.1 *Soit Ω un domaine hyperconvexe borné de $\mathbb{C}^n$ and φ une fonction plurisousharmonique sur Ω avec des valeurs au bord nulles et*

$$\int_\Omega (dd^c\varphi)^n \leq M < n^n.$$

Alors il existe une constante uniforme $C'(\Omega, M) > 0$ indépendante de φ telle que

$$\int_\Omega e^{-2\varphi} \leq C'(\Omega, M).$$

La preuve se fait en deux étapes. On démontre d'abord l'intégrabilité uniforme sur un compact $K \subset \Omega$ avec une constante uniforme $C'(\Omega, K, M)$. Ensuite, on se ramène ce cas là grâce à un théorème de sous-extension sans gain de masse de Monge-Ampère. On effet soit φ comme dans l'énoncé du théorème et soit $\tilde{\Omega}$ un domaine hyperconvexe borné de $\mathbb{C}^n$ (e.g. une boule euclidienne) tel que $\overline{\Omega} \subset \tilde{\Omega}$. Alors d'après ([CZ03]), il existe $\tilde{\varphi} \in \mathcal{F}(\tilde{\Omega})$ telle que $\tilde{\varphi} \leq \varphi$ sur Ω et $\int_{\tilde{\Omega}} (dd^c\tilde{\varphi})^n \leq \int_\Omega (dd^c\, \varphi)^n \leq M$. Il en résulte alors d'après le premier cas que

$$\int_\Omega e^{-2\varphi} d\lambda \leq \int_{\overline{\Omega}} e^{-2\tilde{\varphi}} d\lambda \leq C'(\tilde{\Omega}, \overline{\Omega}, M).$$

ce qui prouve l'estimation voulue avec $C'(\Omega, M) := C'(\tilde{\Omega}, \overline{\Omega}, M)$.

References

CZ03 U. Cegrell, A. Zeriahi : Subextension of plurisubharmonic functions with bounded Monge-Ampère mass C.R. Acad. Sc. Paris, série I **336** (2003) , 305-308.