INSTITUT DE FRANCE
Académie des sciences

Bulles de savon, équations d'Einstein et structure de l'espace-temps

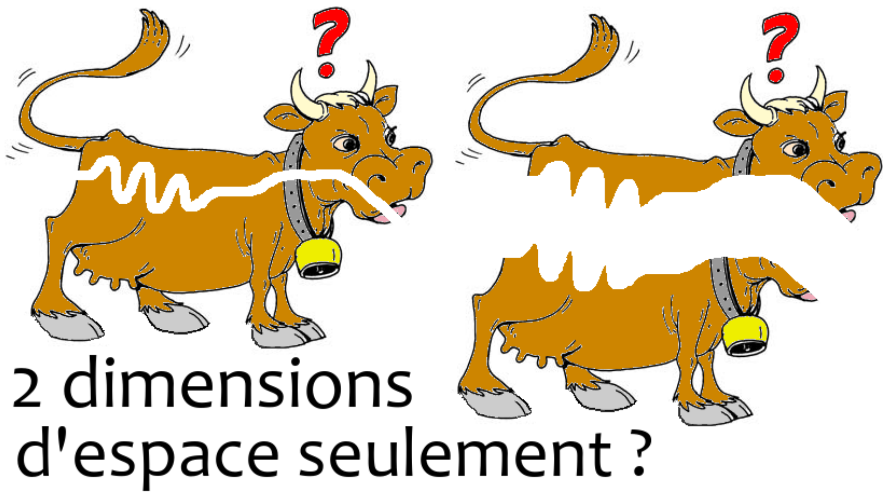
Jean-Pierre Demailly

Institut Fourier, Université de Grenoble-Alpes, France

8 octobre 2015 / Séminaire du Magistère - St Martin d'Hères

Dimension de l'espace-temps

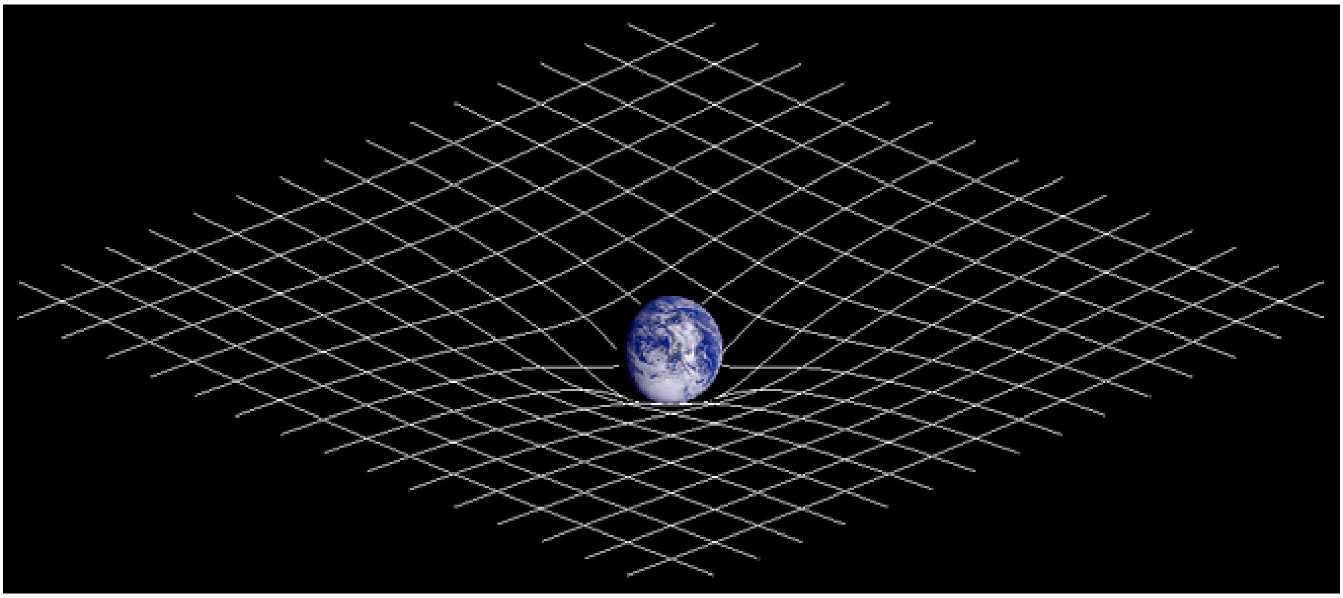
Selon Einstein, notre univers est de dimension 4 :
3 dimensions d'espace et 1 de temps
Pourrait-il en avoir moins ?



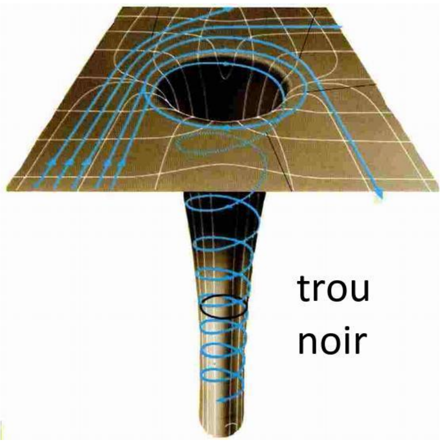
Le tube digestif de la vache la couperait en deux composantes connexes – les animaux ne pourraient pas exister!

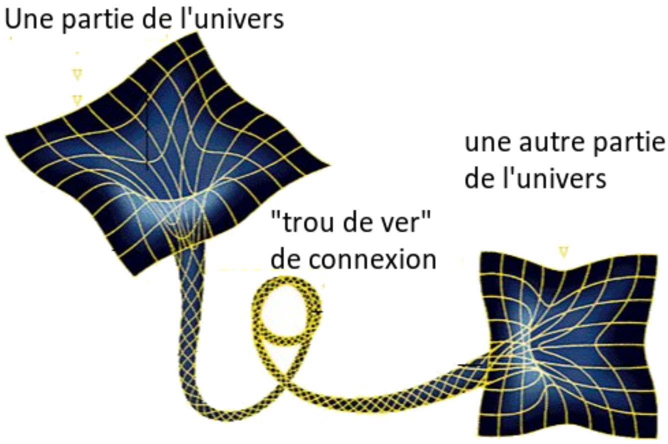
Géométrie de l'espace

Selon Einstein et sa théorie de la relativité générale (1907–1915), l'espace est courbé en raison de la distribution de matière, qui induit un champ gravitationnel



"Trous noirs" et "trous de ver" ?

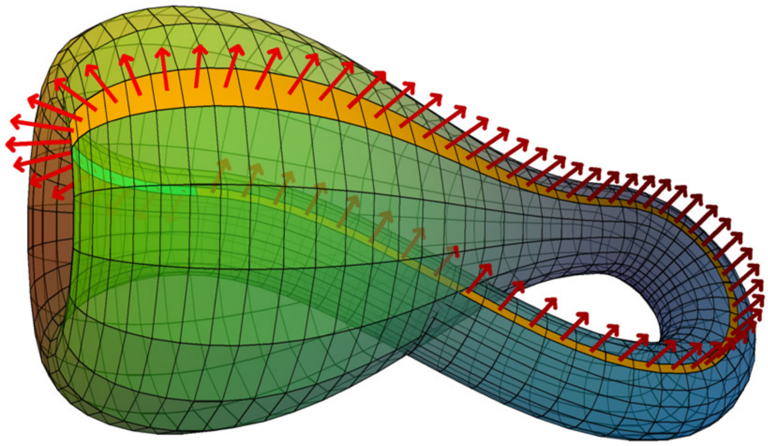




La question de savoir si l'univers est ouvert ou fermé agite beaucoup les astrophysiciens : cela dépend de la densité de matière présente dans l'univers ... seule une densité suffisante permettrait qu'il se referme sur lui-même.

Question de topologie : un espace non orienté ?

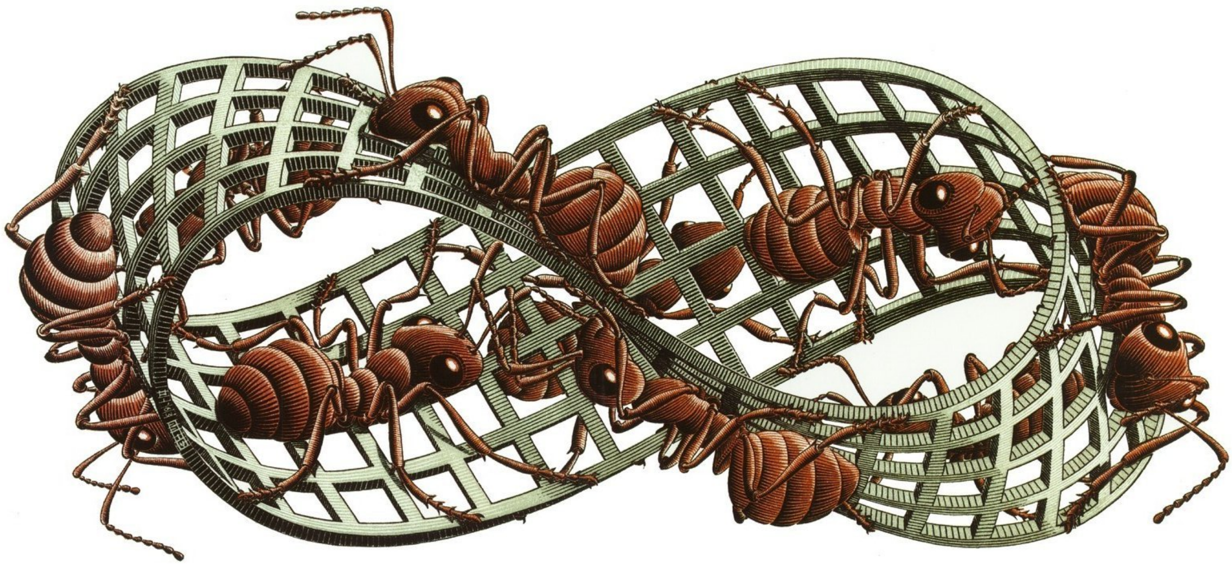
La “bouteille de Klein” (Felix Klein 1849 – 1925) : une surface compacte (=fermée sans bord) non orientable.



Après un “tour d’univers”, les droitiers se retrouveraient gauchers et vice-versa...

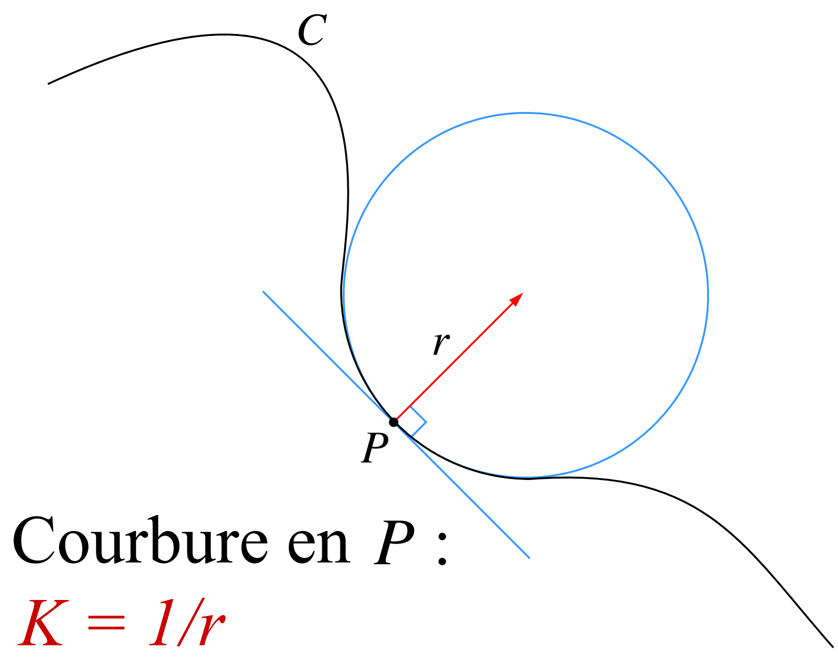
Le ruban de Möbius d’Escher

Un célèbre dessin de Maurits Cornelis Escher (1898-1972)



Comment calcule-t-on la courbure ?

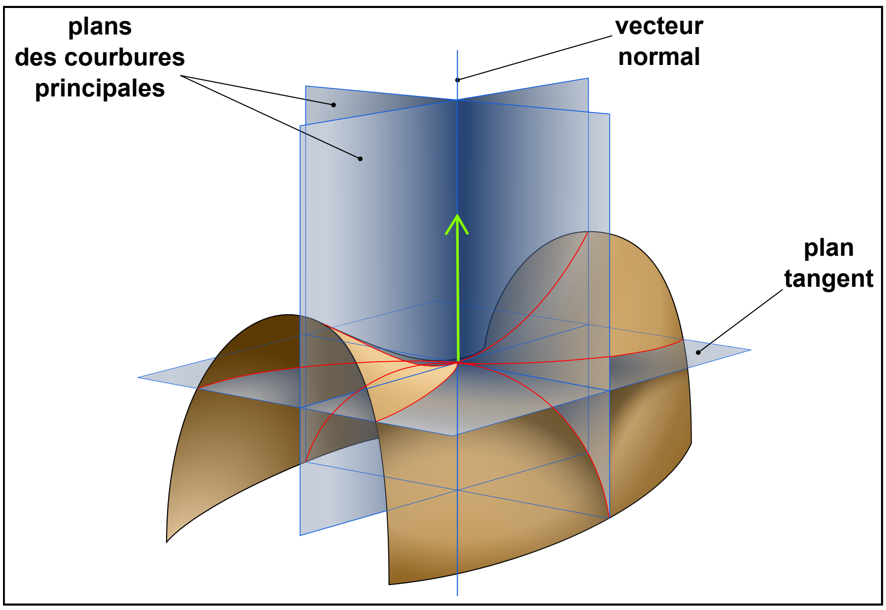
Une courbe et son cercle osculateur de rayon r



Si le rayon $r = \infty$, la courbure K est nulle.

Coefficients de courbure d'une surface

Les deux courbures d'une surface dans un espace de dimension 3



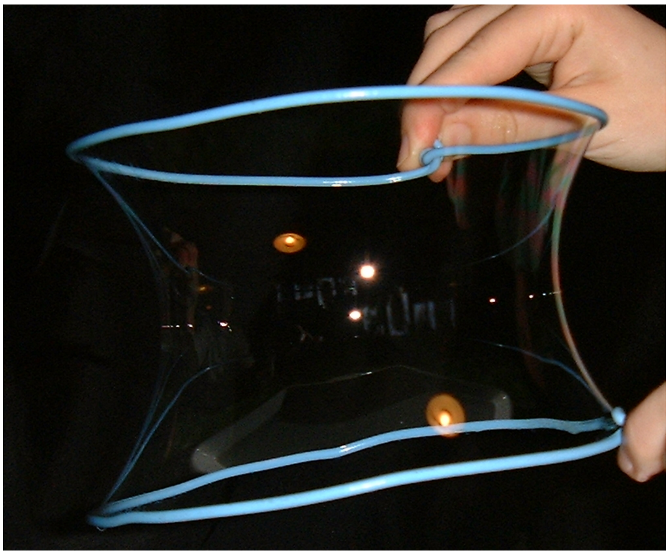
$$K_1 = \frac{1}{r_1} > 0, \qquad K_2 = \frac{1}{r_2} < 0$$

La courbure moyenne

Courbure moyenne : $M = \frac{1}{2}(K_1 + K_2)$

Une bulle de savon “libre” est de courbure moyenne nulle en tout point :

$K_1 = -K_2, \quad M = 0$



Caténoïde:

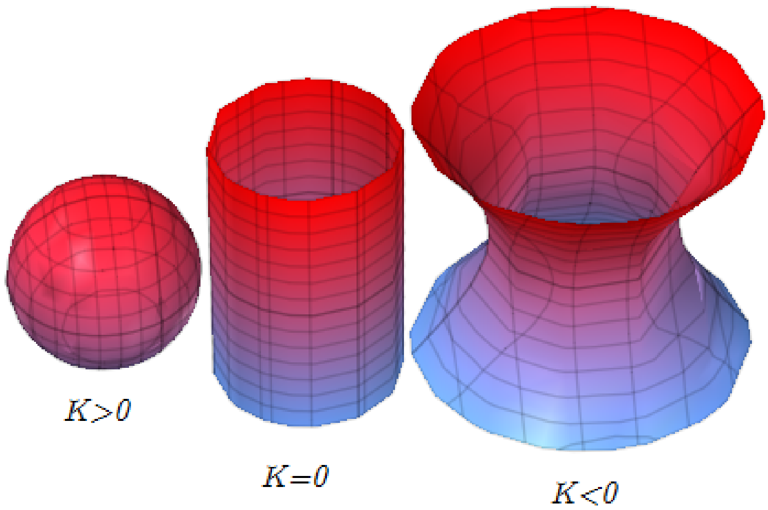
$x = a \cosh u \cos\theta$

$y = a \cosh u \sin\theta$

$z = au$

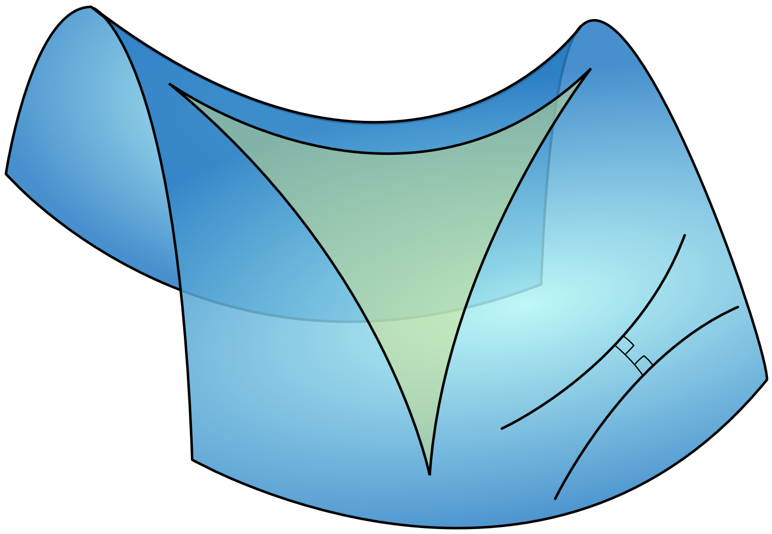
La courbure de Gauss

Carl Friedrich Gauss (1777-1855) : $K = K_1 \times K_2$ est invariant par déformation d’une surface inextensible (theorema egregium)



Le cylindre peut s’aplatir, pas la sphère ni le caténoïde.

La courbure de Gauss (formule de Gauss-Bonnet)



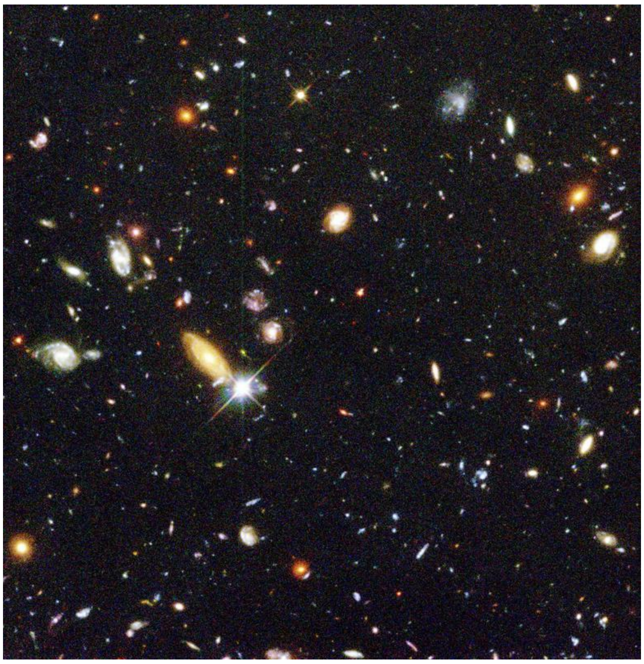
somme des angles d'un triangle géodésique $= \pi + \iint_T K\,dS$

Espace homogène / localement symétrique ?

Un espace X est dit symétrique s'il admet un tout point une "symétrie" par rapport à ce point

Dans ce cas il admet un groupe de transformations isométriques G et X est un espace homogène G/H.

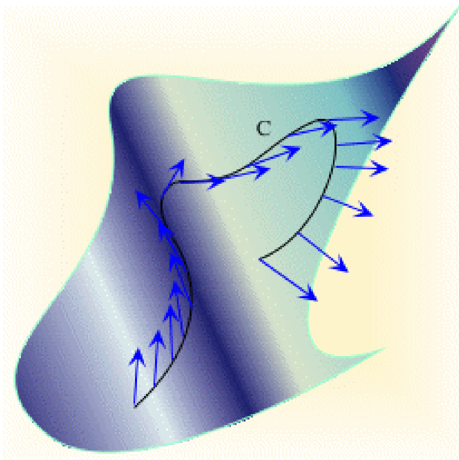
Mais l'univers n'est pas homogène...



"Grumeaux"
de galaxies

Métrique riemannienne / Tenseur de courbure

Bernhard Riemann (1826–1866) / espace à n dimensions



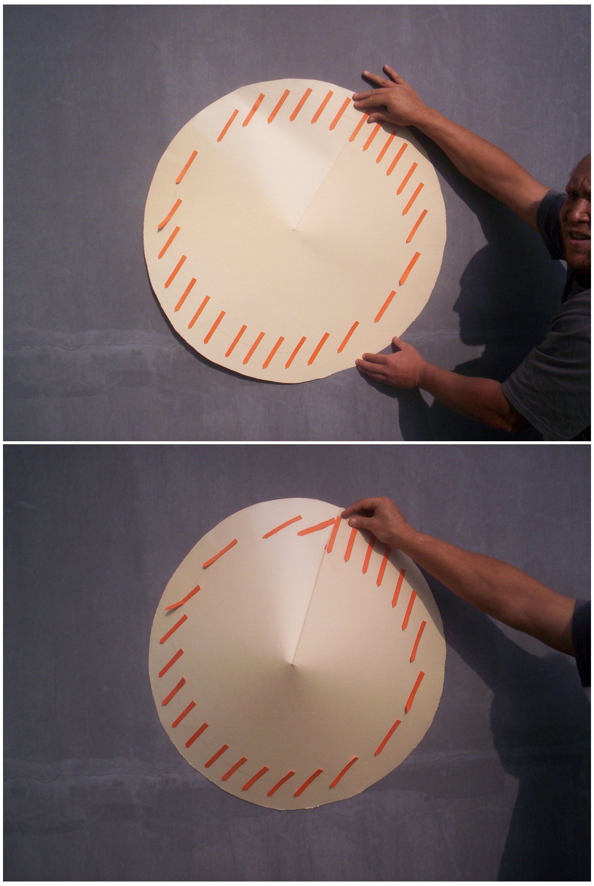
$$ds^2 = \sum g_{\alpha\beta}(x)\, dx^\alpha dx^\beta$$

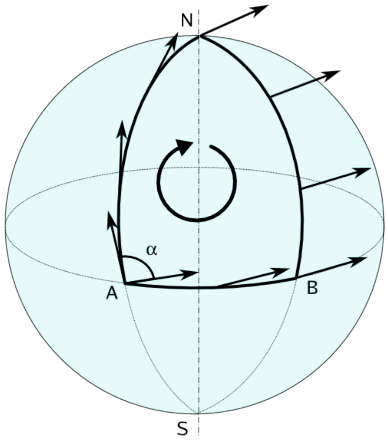
Métrique riemannienne

$$R^{\delta}_{\alpha\beta\gamma}, \quad 1 \leq \alpha, \beta, \gamma, \delta \leq n.$$

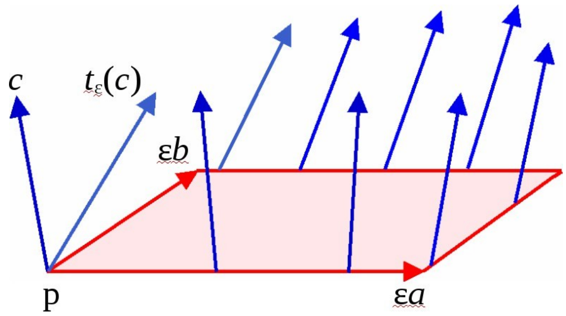
Tenseur de courbure de Riemann
(calcul précisé par Levi-Civita)

Courbure et transport parallèle





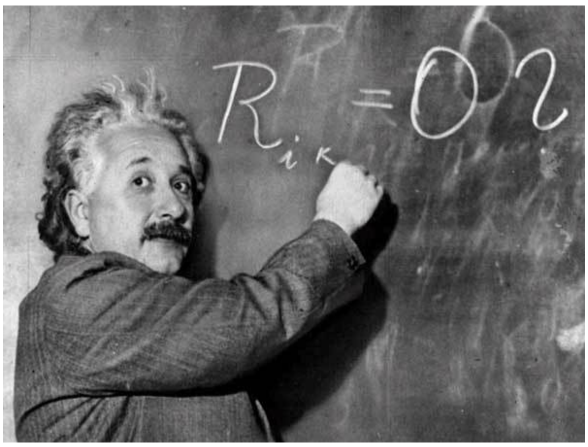
$$R(a,b)c = d \text{ où } d = \lim \frac{1}{\varepsilon^2}(t_\varepsilon(c) - c)$$



Tenseur de Ricci / équation d'Einstein

Le tenseur de Ricci est une sorte de "courbure moyenne" :

$$R_{\alpha\beta} = \sum_\gamma R^\gamma_{\alpha\beta\gamma}$$



Équation d'Einstein (1879–1955) de la relativité générale

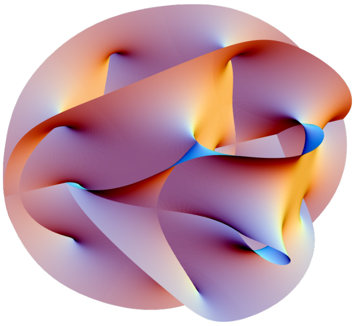
$$R_{\alpha\beta} - \Big(\frac{1}{2}R - \Lambda\Big) g_{\alpha\beta} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\alpha\beta}.$$

Équation d'Einstein en mathématiques

Equation d'Einstein "simplifiée" (univers vide !!)

$$R_{\alpha\beta} = \lambda g_{\alpha\beta}, \qquad \lambda = \text{constante.}$$

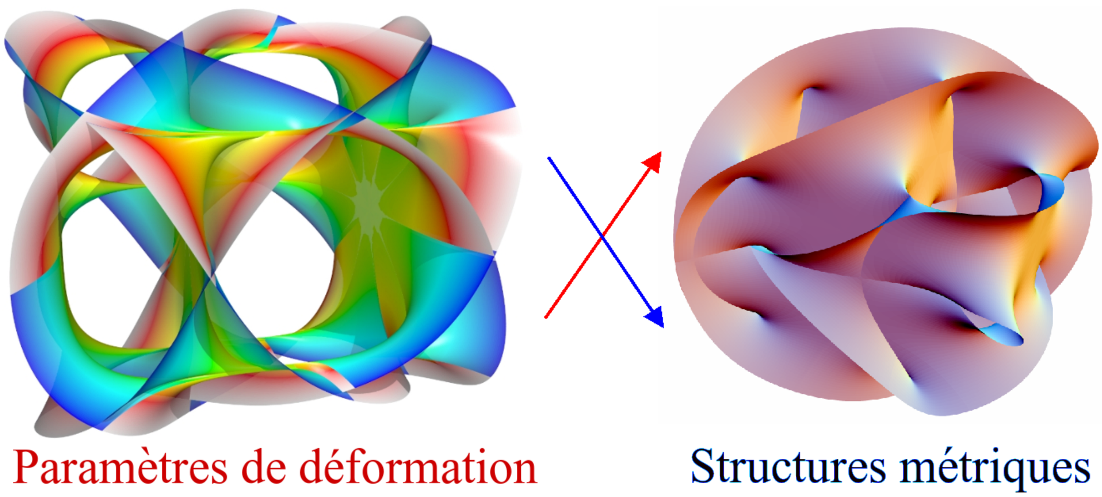
Vérifiée (avec $\lambda = 0$, $R_{\alpha\beta} \equiv 0$) par la
variété de Calabi-Yau 6-dimensionnelle définie dans $\mathbb{CP}^4$ par



$$z_0^5 + z_1^5 + z_2^5 + z_3^5 + z_4^5 - 5a\, z_0 z_1 z_2 z_3 z_4 = 0, \qquad z_0, z_1, z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{C},$$

(avec 1 paramètre a de déformation). Yau: on a bien Ricci $\equiv 0$.

Variétés de Calabi-Yau, sièges des champs de forces?



Notre univers aurait 6 dimensions supplémentaires ultra-miscroscopiques ($\simeq 10^{-35}$ m) qui seraient le siège des champs de force (théorie des cordes)... sous forme d'une variété de Calabi-Yau de dimension complexe 3.
Celle-ci étant de dimension réelle 6, ceci amène à un univers de $4 + 6 = 10$ dimensions au total.

Symétrie miroir et paramètres des familles de CY

La symétrie miroir est une dualité encore quelque peu mystérieuse entre les paramètres de déformation d'une famille de variétés de Calabi-Yau X_a (c'est-à-dire les coefficients a_* des polynômes qui les définissent), et les paramètres associés aux différentes métriques portées par les membres de la "famille duale" Y_b.

Ici ces métriques sont des "métriques de Kähler" $\omega = \sqrt{-1}\sum \omega_{\alpha\overline{\beta}} dz^\alpha \wedge d\overline{z}^\beta$ (métriques hermitiennes vérifiant la propriété symplectique $d\omega = 0$) et la nullité de la courbure $\mathrm{Ricci}(\omega) \equiv 0$.

Elles dépendent uniquement de la classe de cohomologie $\{\omega\} \in H^{1,1}(Y_b, \mathbb{C})$ ($=$ paramètres de la structure métrique des variétés Y_b).