2006 - 2007

TRAVAUX PERSONNELS ENCADRÉS

La sphère

Lycée Louis le Grand
1ère S 2

BELHALFAOUI Thomas
DURIEUX Guillaume
ROZIER Antoine

Mme MONTEBELLO,
professeur de lettres

M. ALARCON,
professeur de mathématiques

Introduction

La sphère est omniprésente dans le monde qui nous entoure, de l'infiniment grand à l'infiniment petit, de notre Soleil au noyau du plus simple atome. En effet, de très nombreux objets de la nature ont une forme sphérique, du moins en en considérant une approximation: c'est le cas des planètes, mais aussi des perles, des gouttes d'eau (en l'absence de gravité), ou des bulles.

La sphère est un objet qui, tout au long de l'histoire humaine, a passionné, notamment de par son caractère de perfection universelle. Que ce soient les mathématiciens, les écrivains ou les architectes, beaucoup s'y sont intéressé, pour tenter de la comprendre ou de la réaliser. Parmi les plus connus, dans l'Antiquité, nous pouvons citer Pythagore, Euclide, Archimède ou Eratosthène, en Grèce, ou Bonaventura Francesco Cavalieri, en Italie, à la fin du XVIème siècle, ou encore, à la fin du XVIIème siece, Johann Carl Friedrich Gauss, en Allemagne.

Les mathématiciens de l'Antiquité, parmi lesquels Thalès, Démocrite, ou Eratosthène, étaient très souvent également des philosophes. Certains, comme Platon, dans *Le Timée*, ont également fait le récit de mythes, le plus souvent des mythes originels, faisant intervenir la sphère.

C'est pour cela que nous allons tenter d'offrir, au cours de cette étude, un aperçu de ce que sont les aspects mythologique et mathématique de la sphère.

Ainsi commencerons nous par illustrer la représentation de la sphère, notamment dans les mythes grecs et tibétains, puis la symbolique de celle-ci – ainsi que d'autres objets s'y rattachant, comme le cube ou le cercle –, ce qui nous amènera à nous intéresser au philosophe Platon, mais aussi à Pythagore, Phylolaos ou Aristote. Enfin nous étudierons plus précisément le mythe d'Er développé à la fin de *la République* de Platon.

Nous poursuivrons par une présentation mathématique de la sphère, en détaillant la preuve de l'aire d'une sphère, ainsi que deux preuves différentes du volume de la sphère – la première faisant appel au principe de Cavalieri, et la seconde à une décomposition de la sphère en un nombre infini de pyramides –, puis des notions de trigonométrie sphérique, comme la formule de Girard, qui permet d'obtenir l'aire d'un rectangle sphérique, ou le groupe de Gauss – formule fondamentale, relation des sinus, relation des cinq éléments –, avant de montrer l'impossibilité d'obtenir une carte isométrique d'une région d'une sphère.

SOMMAIRE

I. La sphère et sa symbolique dans la mythologie

Inaccessible, superbe, mystérieuse, divine, parfaite : autant d'adjectifs qui ont été attribués à la sphère. De tout temps, la sphère a passionné, notamment dans l'Antiquité. En Grèce, bien sûr, pays des sciences et des philosophies, mais également dans bien d'autres régions, aussi éloignées que l'Australie et la Chine, les Andes et Madagascar. On voit très bien à travers toutes les mythologies qui font référence à l'œuf cosmique originel, contenant toute chose, le rôle mystique et symbolique qui fut attribué à la sphère. Mais c'est bien plus qu'une simple curiosité dont fut sujette la sphère, mais une véritable quête, comme en témoignent les multiples ouvrages grecs sur la question. La plupart de ces œuvres peuvent nous sembler actuellement drôles, farfelues et invraisemblables, mais on ne peut nier les avancées que ces propositions ont permis. De plus, certaines d'entre elles restèrent utilisées pendant près de quinze siècles, avant d'être remises en question. Ceci témoigne de la grande précision de mesure dont ont fait preuve les Grecs, et donc de la véritable fièvre scientifique autour de ce sujet. Mais, plus que de simples découvertes et avancées scientifiques et technologiques, ces recherches représentent un état d'esprit, une façon de penser, et, plus largement, une philosophie de l'époque.

1. La représentation mythologique de la sphère

La sphère apparaît dans les mythes seulement sous la forme de l'œuf cosmique. *Seulement* ; pourtant, c'est déjà beaucoup. La multiplicité de ces mythes dans les différentes civilisations, et quelquefois au sein même d'une civilisation, rend le sujet très difficile à cerner. On trouve de ces mythes aux quatre coins du monde, y compris en Australie et en Amérique. Ce n'est donc pas un phénomène régional ou même indo-européen, mais bien universel. La généralisation du phénomène rend compte du caractère mystérieux de la sphère. Or, la mythologie et la religion ont presque toujours pour but d'expliquer l'inconnu ou l'incompréhensible. Nous nous intéresserons donc particulièrement aux mythes sur l'œuf cosmique les plus originaux et les plus représentatifs du mysticisme qui fut attribué à l'objet.

1.1. Le mythe grec

Oeuf cosmique

Bien que peu connu, le mythe de l'œuf cosmique grec est l'un des mythes originels les plus clairs, et surtout aux sources les plus sûres. C'est pour cette raison que nous l'aborderons en premier.

Au commencement, Eurynomée émergea de Chaos. Après avoir séparé la mer du ciel, elle dansa sur les vagues. Elle s'empara du vent du nord et, le frottant entre ses mains, elle donna vie à Orphion, le grand serpent. Ce dernier, envahi par le désir, s'accouple avec la danseuse. Celle-ci prit alors la forme d'une colombe et couva sur les vagues. Le moment venu, elle pondit l'œuf universel. Orphion s'enroula autour de cet œuf sphérique sept fois. On voit à travers sa forme que la sphère, chez les Grecs, représente la plénitude, la totalité. Comme le diront plusieurs philosophes grecs, dont Aristote et Platon, la sphère est la perfection, car elle contient tout – et comment la totalité pourrait-elle ne pas être parfaite ? De cet œuf sortit ensuite tout ce qui existe : le Soleil, la Lune, les planètes, les étoiles, la Terre, avec ses montagnes, ses rivières, ses arbres, ses plantes, et toutes ses créatures vivantes. Ce mythe, datant de 3500 av. J.-C., est un mythe archaïque, préhellénique. C'est un mythe matriarcal, car Eurinomée est la déesse unique et primordiale. Ce mythe fut peu à peu remplacé par les mythes de dieux grecs, plus haut en couleurs. Ce mythe est principalement représenté par Hésiode dans *Théogonie, 116*.

Ce mythe fut repris plus tard par les Orphiques. Selon eux, la Nuit aux ailes noires fut courtisée par le vent et déposa l'œuf d'argent au sein de l'obscurité. Phanes sortit alors de l'œuf et mit en marche l'Univers. La Nuit vivait avec lui dans une caverne gardée par l'inévitable Rhéa. Phanes créa la Terre, le Ciel, le Soleil et la Lune, mais c'est sa mère, apparaissant sous trois formes – nuit, ordre et justice -, qui gouvernait l'univers jusqu'au moment du passage à une société patriarcale. (*Apollodore*, I.3.2)

1.2. Le mythe tibétain

La légende tibétaine de création du monde est un mythe dont la particularité est de posséder peu de sources disponibles à son sujet. En effet, sa source principale est un livre encore non publié, *Langs po-ti bse-ru*, accessible sous forme de citations dans la *Chronique du cinquième Dalaï-Lama* (XVIIIème siècle), et dans *L'Histoire*, de Sumpa

Mkhan-Po (XVIIIème siècle).


Oeuf contenant un Homme

De l'essence des cinq éléments primordiaux, un vaste œuf rond fut formé. A l'extérieur était la blanche falaise des Dieux. A l'intérieur, était un tourbillon, dans la partie liquide de l'œuf, au milieu, les six espèces d'êtres vivants. Du jaune de l'œuf furent formés dix-huit œufs. Parmi ceux-ci, celui du milieu, blanc, se sépara. A cet œuf poussèrent des bras et des jambes, avec aussi les cinq organes des ses sens. C'était le premier Homme, du nom de Ye-smon, contraction de Yid-la-smon, qui signifie «qui répond à tous les vœux ».

Ce mythe est intéressant, car, contrairement aux autres mythologies dans le monde, les dieux n'ont qu'une importance secondaire. L'Homme a la même place dans la création du monde que les dieux, même si cet Homme est presque l'équivalent d'un dieu dans cette croyance. De plus, on voit, dans cette allégorie, s'entremêler deux mythes de la création différents. Celui de l'œuf cosmique, qui est tout, sans doute hérité de l'influence chinoise, et celui de l'Homme primordial, qui vient vraisemblablement des Indes.

1.3. Autres mythes

Il existe bien d'autres mythes ayant trait à l'œuf cosmique, mais nous ne pouvons les développer tous ici, à la fois par manque de source sure, mais aussi car leur lien avec la sphère n'est pas toujours clair. Nous évoquerons néanmoins succinctement quelques mythes notables, mais un choix a dû être fait quant aux mythes abordés et aux versions données. En effet, pour certains d'entre eux, le nombre de variantes du même mythe est impressionnant.

Chez les Indiens, l'œuf est né de Non-Être ; il engendrera les éléments : « Au commencement, il n'y avait que le Non-Être. Il fut l'Être. Il a grandi et se changea en œuf d'une parfaite rondeur. Il reposa toute une année, puis se fendit. Deux fragments de coquille apparurent : l'un d'argent, l'autre d'or. Celui d'argent voilà la Terre ; celui d'or voilà le ciel. Ce qui était la membrane externe voilà les montagnes; Ce qui était la membrane interne voilà les nuages et les brumes ; ce qui était les veines voilà les rivières ; ce qui était l'eau de la vessie voilà l'océan. », *Dans le Soum,* 354.

Selon les Azteques, Huira Cocha, le dieu suprême, souvent représenté lui-même sous la forme d'une sphère, assimilé au Soleil, envoie pour peupler la Terre trois œufs : un œuf d'or, un d'argent et un de cuivre. De l'œuf d'or sortent les rois et les nobles ; de l'œuf d'argent sortent les femmes; de l'œuf de cuivre, sort le peuple. Une variante de cette histoire conte que ces oeufs seraient tombés du ciel après le déluge.

Element de poterie représentant un oeuf contenant les Hommes

Pour les Likouba et les Likoula du Congo, l'oeuf est une image du monde et de la perfection. Le jaune représente l'humidité féminine, le blanc, le sperme masculin. Sa coquille, dont l'intérieur est isolé par une membrane, représente le Soleil issu de la coquille de l'oeuf cosmique. Aussi, les Likouba et les Likoula disent-ils que l'Homme soit s'efforcer de ressembler à un oeuf.

Il reste bien des mythes sur l'oeuf cosmique que nous ne pouvons aborder, mais nous avons essayé de présenter ici un résumé succinct, comportant les principaux mythes de l'oeuf cosmique, tout en abordant le sujet de la symbolique de la sphère, que nous développerons dans le point suivant.

2. La sphère un objet philosophique

La sphère a toujours passionné les philosophes et les écrivains de tout temps. Objet de perfection par excellence, on le trouve partout. Dans les mythes antiques, comme nous l'avons vu précédemment mais aussi dans plusieurs ouvrages philosophiques comme *Le Timée* et *La République* de Platon, ou dans *Du Ciel* d'Aristote, pour les plus connus. De l'Antiquité jusqu'à récemment, les interrogations sur la sphère avaient une large porté philosophique sur la conception du monde, de la divinité et de la mort. Pendant plus de vingt siècles les écrits se multiplièrent, chacun apportant une nouvelle idée, une nouvelle nuance ou une nouvelle limite à l'image que l'on attribuait à la sphère. Cette recherche de symbole liée à la sphère est représentative de la quête philosophique de la compréhension du monde et de l'univers : changeante, jamais finie, propre à chaque auteur et plus largement, propre à chacun. Nous essayerons donc dans cette partie d'apporter une définition du symbolisme de la sphère et des objets qui lui sont associés, puis d'étudier un des grands philosophes ayant eu une approche complexe de la sphère : Platon, et également d'aborder d'autres philosophes.

2.1. Symbolisme de la sphère et de quelques autres objets


Abside en cul-de-four d'église romane

Le symbolisme de la sphère s'exprime le mieux dans le couple sphère-cube, que l'on retrouve dans l'art et l'architecture. Par exemple dans les culs-de-four, les basiliques byzantines, les mosquées et l'art de la Renaissance, les exemples les plus connus étant la Basilique Saint-Pierre de Rome. Une autre illustration notable de l'opposition sphère-cube est une représentation de l'art chrétien assez commune : un personnage surmonté d'une voûte, les pieds posés sur un escabeau rectangulaire, Dieu descendant de son trône céleste sur la Terre. Le passage de la sphère, du cercle ou de l'arc aux formes anguleuses symbolise l'Incarnation: le Dieu Parfait qui se fait homme, imparfait. Cette représentation figure d'une personne, tenant à la fois du divin et de l'humain, faisant le lien entre le Ciel et la Terre.

A l'inverse le passage du cube à la sphère symbolise le retour du créé à l'incréé, de la Terre au Ciel, la perfection du cycle accompli.

Chez les orphiques deux sphères concentriques représentaient le Monde Terrestre et l'Autre Monde. La mort passant d'une sphère à l'autre. On peut par exemple lire sur une *tablette orphique* : « Je suis sorti du cercle où l'on est sous le poids des terribles deuils, je suis entré dans le cercle désirable, à pas rapides. J'ai pénétré dans le sein de la Maîtresse, de la reine infernale. ».

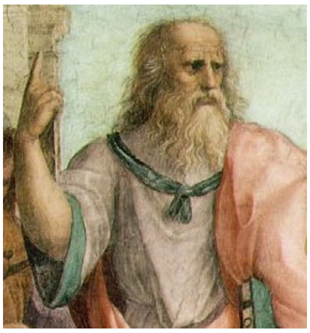
Mais les grecs ne sont pas les seuls à s'être intéressés à la sphère. Elle est présente par exemple dans la cosmogonie islamique. Par exemple *Ibn'Abbâs* décrit la création de l'Eau comme une perle blanche de la dimension du Ciel et de la Terre, les sept cieux se présentant sous la forme de tentes rondes superposées. Encore une fois, la sphère est présentée comme l'essence de la perfection divine.

On retrouve d'ailleurs dans différentes mythologies un androgyne originel sphérique, la sphère étant aussi le symbole de la perfection par la totalité, l'androgyne étant la représentation parfaite de l'être humain : la beauté et la subtilité féminine mêlées à la force masculine.


Johannes Kepler (1571-1630)

Mais même bien plus tard la sphère garde une connotation divine ; Johannes Kepler dira par exemple à propos de la sphère dans *Le Mystère Cosmographique* (1596) : « Le père au centre, le fils à la superficie, le Saint-Esprit dans la relation du centre au pourtour. Et bien que le centre, la surface et l'intervalle soient manifestement trois, pourtant ils ne font qu'un, au point qu'on ne peut même pas concevoir qu'il en manque un sans que tout soit détruit ». L'homme même qui démontra que les mouvement des astres n'étaient pas circulaires, donc parfaits, comme le soutenait l'Eglise, gardait une profonde culture de la sphère parfaitement divine.

2.2. Platon, l'homme des sphères.

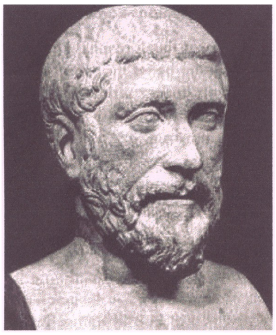

Platon (427-348 av. J.-C.), détail de L'école d'Athènes*, par Raphaël*

Platon est le principal auteur à avoir écrit sur la sphère. Il reprend largement les idée pythagoriciennes, de l'harmonie des sphères, soit d'un univers constitué de plusieurs sphères concentriques organisées autour de la Terre. La particularité de ce système est l'idée que ces sphères en se déplaçant produisaient un son, une musique, son que l'on ne pouvait entendre car il faisait partie du bruit de fond auquel nous sommes habitués depuis notre naissance. Il dit dans *La République* : « Et sur le haut de chacun des cercles se trouve une sirène entraînée avec lui dans son mouvement circulaire, émettant un unique son, un unique ton ; et à partir de tous ceux-ci, qui sont huit se fait entendre un unique accord. ».

Platon est aussi un des premiers à soutenir que la Terre est sphérique. Il pense que la Terre est une sphère parfaite au centre de d'un Univers parfait constitué de sphères. « Voilà pourquoi et pour quelle raison le dieu a construit avec tous les touts ce tout unique, parfait et inaccessible » (Platon, Le *Timée*) ; « C'est par toutes ces raisons que le dieu songeant au dieu qui devait être un jour, en fit un corps poli, partout homogène, équidistant de son centre, complet, parfait, composé de corps parfaits. ». (Platon, *Le Timée*)

Dans ses œuvres se mêlent à la fois des idées scientifiques en avance sur son temps, que nous aborderons par la suite, ainsi que des représentations de l'univers qui semblent étranges mais n'en restent pas moins remplies de symbolisme et de poésie. L'organisation d'un univers autour d'intervalle musical n'est-elle pas poétique ?

2.3. Quelques autres philosophes



Pythagore
(580-490 av. J-.C.)

Mais Platon est loin d'être le seul à avoir philosophé sur la sphère, le monde et l'Univers. En réalité, c'est Pythagore, que l'on connaît plus pour son théorème que pour sa philosophie, qui fut le premier à affirmer que la Terre était ronde. Son système philosophique repose sur deux principes : « Qu'y a-t il de plus sage ? Les nombres. Qu'y a-t il de plus beau ? L'harmonie. ». Comme nous l'avons dit précédemment, il soutient que les astres produisent un son en parcourant leur cercle, une musique produite par la vibration des différentes sphères composant une octave parfaite.

Philolaos, au cinquième siècle avant JC est le premier à penser que la Terre n'est pas au centre de l'Univers. Nous ne connaissons sa conception du monde qu'à travers Platon. Il reprend le système de Pythagore, dit « principe des huit sphères ». Cependant, il ajoute la sphère de la Terre qui n'est plus immobile au centre de l'univers, mais tourne autour du Feu central Hestia, qui n'est pas le Soleil. Pour parvenir au nombre sacré de dix sphères il imagine une autre planète, l'Anti-terre, toujours invisible car toujours opposée à la Terre par rapport au Feu central.

Extrait de « Chronique de Nuremberg », histoire du monde, paru en 1493. Au centre est la Terre, entourée des quatre éléments, puis viennent les objets célestes, sur leur sphère respective

Aristote en revanche soutient fermement le géocentrisme. Pour lui la Terre est au centre du Cosmos parce qu'elle est lourde, alors que les autres astres relèvent de la sphère du feu, légère. Les planètes sont fixées sur des orbes animés d'un mouvement circulaire uniforme. Le vide ne pouvant exister, les espaces entre les sphères, sont occupés par d'autres sphères, les anastres, au nombre de cinquante-six composées d'Ether, le cinquième élément. Le mouvement général est impulsé par ce qu'il appelle le « Premier Moteur », installé sur la sphère des fixes, celles des étoiles, qui le transmet aux autres.

Il y eut bien plus de philosophes et bien plus de théories, mais la plupart se contentent de reprendre les idées des grands philosophes sans vraiment les modifier. La Grande question pendant l'Antiquité était de savoir si oui ou non la Terre était au centre de l'Univers, et si oui ou non la Terre était sphérique, donc parfaite, questions auxquelles nous répondrons dans le prochain point.

3. Etude d'un extrait de Platon

3.1. Introduction

Nous allons étudier un extrait de *La République* de Platon. Nous nous intéresserons plus précisément au mythe d'Er le Pamphylien.

Ce mythe est exposé par Socrate et termine l'oeuvre. Il n'est pas une invention de Platon; celui-ci emprunte les principaux éléments aux traditions orphique et pythagoricienne mais en fait une interprétation libre.

Soldat tué sur le champ de bataille, Er revient à la vie, douze jours après sa mort, au moment de sa crémation. Lui même a été exceptionnellement épargné, car il a été choisi par les juges pour être le messager de l'au-delà auprès des hommes.

La plus grande partie de ce mythe rapporte le jugement des âmes et la relation entre le destin et la liberté.

La fin du récit présente la vision qu'a eu Er de l'ensemble de l'univers: c'est cet extrait qui nous intéresse. [cf annexe C, extrait de *La République*]

3.2. Analyse

Ce mythe commence par une paronomase : « Ce n'est point le recit d'Alkinoos que je vais te faire, mais celui d'un homme vaillant, Er, fils d'Armenios, originaire de Pamphylie. ». En effet Alkinoos s'écrit en grec *Alkinou* et en grec homme vaillant s'ecrit *Alkimou*. Les âmes des morts passent sept jours dans la prairie puis, le huitième, elles partent pour un voyage de quatre autres jours. Après quoi elles découvrent une colonne de lumière droite. Cette lumière est comparée à un arc en ciel, mais elle est plus brillante et plus pure. Or on sait qu'un arc-en-ciel est composé de toutes les couleurs formant la lumière; la lumière observée est donc d'une essence supérieure. Après un autre jour de marche, les morts se trouvent au pied de cette colonne de lumière, que certains ont comparée à la voix lactée.

Là, dans cette lumière, ils voient les attaches du ciel. Littéralement : « ils virent, s'étendant depuis le ciel, les extrémités de ses attaches. » cette colonne de lumière est donc l'ossature du monde, les liens du ciel. Cette ossature est comparée aux armatures des trières, les navires de guerre grecs, cette image étant claire pour les grecs, peuple maritime et grand explorateur des mers.

Aux extrémités de cette colonne est accroché le fuseau de la Nécessité. S'en suit une description technique et matérialiste du fil du destin, le métal, sa composition, ce fuseau faisant tourner des sphères.

Au bout du fuseau étaient accrochés des pesons, un peson étant le contrepoids du fuseau. Ces pesons au nombre de huit étaient emboîtés les uns dans les autres de manière concentrique. Platon compare cette organisation à celle des boîtes qu'on emboîte et, si on osait un anachronisme, on comparerait ce système à celui des poupées russes. Ensuite l'auteur procède à une longue énumération des différents aspects des pesons.

La largeur des pesons est présentée dans l'ordre décroissant de leur largeur. Le bord extérieur symbolise, le plus grand peson, symbolise celui des étoiles fixes. Les sept autres symbolisent, quant à elles, les orbites des sept autres, errant, qui de la plus éloignée à la plus proche de la Terre (selon Platon) sont : Saturne, Jupiter, Mars, Mercure, Venus, le Soleil et la Lune. En fait on s'aperçoit que c'est exactement l'ordre de taille des astres qu'on observe dans le ciel terrestre. Ceci laisse imaginer que Platon supposait ces astres de même taille ou de taille proche. Ces astres tournent bien entendu autour de la Terre.

Toute cette description, ou du moins la traduction étudiée, est complexe à lire et à suivre. Les répétitions s'enchaînent entre les mots pesons (sept fois), cercle (sept fois), rang (six fois), les nombres cardinaux (cinq) et ordinaux (trente-sept). Cette accumulation numérique peut signifier l'existence d'un ordre supérieur transcendent.

Le fuseau et ses pesons reposants sur les genoux de la Nécessité est un retour à l'image de la fileuse, une des premières entités créées, avant-même les Titans et les géants, image qui introduit d'autres figures mythiques, les sirènes.

Dans une correspondance entre les cercles et la musique, chacune des sirènes se tient sur un cercle et émet une note qui en se conjuguant avec celle de ses sept soeurs donne une octave parfaite, nouvelle image de l'harmonie universelle.

On voit alors l'apparition de « trois autres femmes » comme l'écrit Platon. Cette façon d'introduire les moires, filles de la Nécessité par parthogénèse, attire l'attention sur le fait que tous les protagonistes du mondes sont des femmes : la Nécessité, les Moires et les Sirène.

Les Moires ne sont autres que Lachésis, le passé, qui mesure le fil et fait tourner les pesons des deux mains, Clôthô, le présent, la fileuse, qui de la main droite fait tourner le peson extérieur et Atropos, l'avenir, celle à qui on ne peut échapper, qui coupe le fil et fait tourner les pesons intérieurs de sa main gauche. C'est peut être de là que vient *sinistra* – gauche, en latin – qui a donné sinistre en français.

Ce mouvement qu'appliquent les Moires est peut-être une tentative de Platon d'explication des incohérences des mouvements célestes observés depuis la Terre comme des planètes qui reculent.

Ensuite l'auteur décrit la couleur et l'éclat de chacun des cercles. Celui des étoiles fixes par exemples est pailleté, ce qui ressemble bien à un ciel étoilé. Celui de Soleil est le plus vif et colore le plus petit, la Lune.

Les mouvements de ces cercles sont circulaires mais ils n'ont pas tous la même vitesse. Ainsi la sphère de la Lune est la plus rapide et celle de Saturne la plus lente.

Certains experts ont montrés que la somme respective de certains termes symétriques (ordre, distance, couleur, vitesse) est toujours égales à neuf (professeur Cook Wilson). Ceci renforce l'idée d'ordre et d'équilibre parfait, que l'on retrouve dans l'harmonie des correspondances : forme, couleur, musique, nombre.

3.3. Conclusion

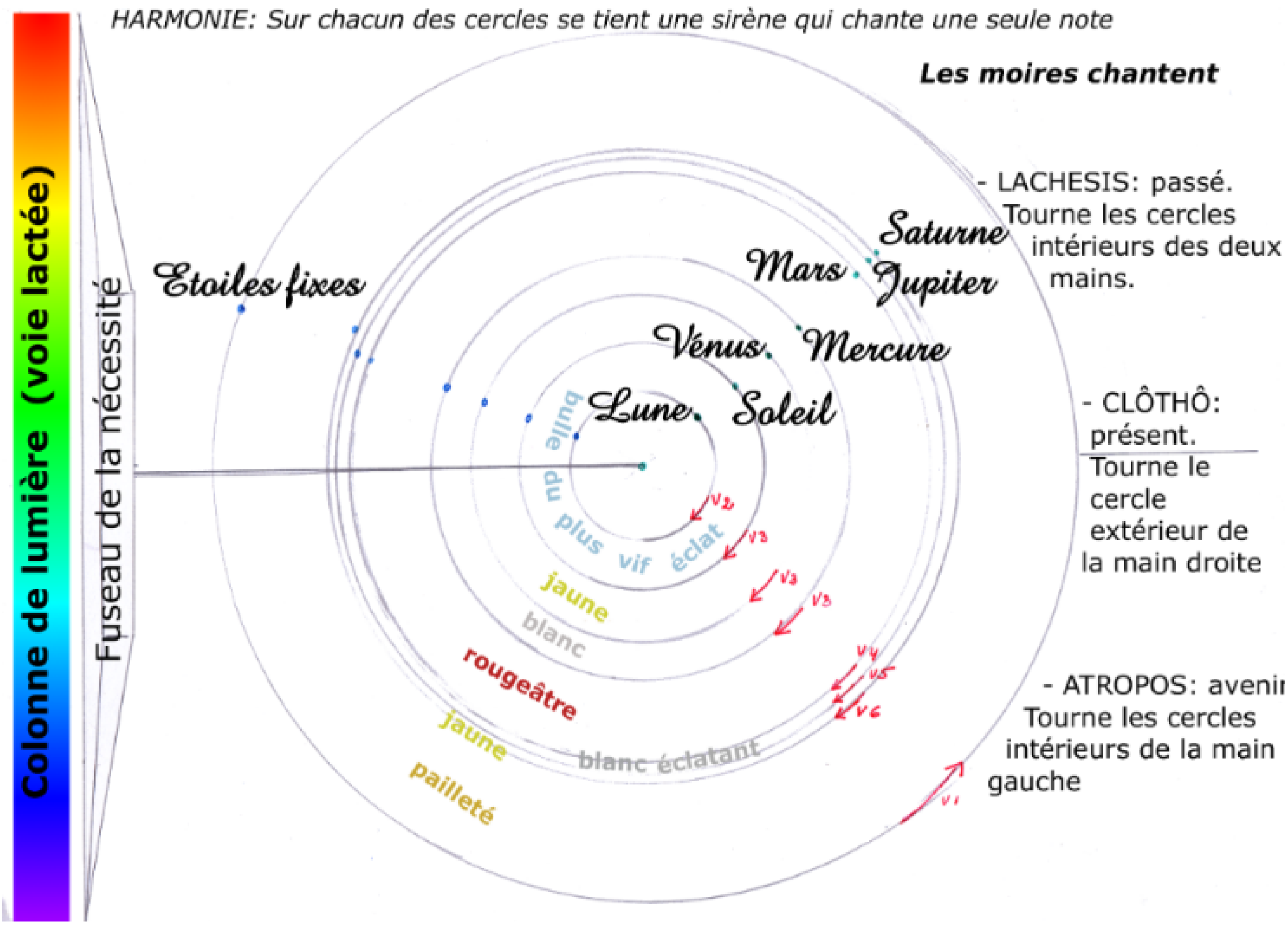
Ce texte reste difficile à comprendre, c'est pourquoi nous avons effectué un schéma, illustrant l'organisation de l'Univers selon Platon.

Ce mythe mêle des allusions mythologiques, un mythe spécifique, celui d'Er, et des explications numériques complexes.

Ce mythe répond aux cinq aspects que dénombre le professeur Droz :

- récit fictif;
- rupture avec la dimension dialectique;
- exposition du vraisemblable;
- existence d'un sens caché;
- existence d'une intention pédagogique.

3.4. Illustration



Conclusion I.

Ce bref aperçu de ce que représentait la sphère durant l'Antiquité nous a permis de montrer son importance mythologique, symbolique et scientifique. Il y eut bien d'autres auteurs et bien d'autres textes se rapportant à la sphère, mais nous avons essayé de présenter les principaux.

Nous avons décidé de ne pas parler de la science et de la conception de la Sphère après l'Antiquité car, au Moyen Age, il en fut très peu question. Ensuite, ce furent les remises en cause du dogme de l'Eglise avec Copernic, Tycho Brahé et Kepler, qui furent bien entendu déterminants du point de vu scientifique, mais eurent un impact philosophique restreint.

En effet l'évolution des hypothèses sur la sphère et la conception de l'univers, symbolise une remise en cause du système préétabli, une volonté de comprendre, qui fut véritablement déterminante.

En outre, nous avons passé sous silence les autres travaux antiques pour nous concentrer sur ceux des Grecs, à la fois par volonté de présenter un devoir uni et parce que, hormis les scientifiques et philosophes grecs, il y en eut peu de remarquables à cette époque, à l'exception peut être des travaux indiens.

II. Etude mathématique de la sphère

1. Préambule

Une sphère est, dans un espace euclidien à trois dimensions, l'ensemble des points équidistants d'un centre – on appelle rayon la distance entre le centre et chacun de ces points. Contrairement à la boule, elle n'inclut pas les points situés à une distance inférieure au rayon.

(S) une surface plongée dans l'espace est une sphère si et seulement si pour tout plan (P), $(S)\cap(P)=\emptyset$ ou $(S)\cap(P)$ est un cercle, éventuellement réduit à un point.

Une sphère peut être également vue comme la surface engendrée par la rotation d'un cercle autour de son diamètre. Elle a donc une infinité d'axes de symétrie: l'ensemble des plans passant par son centre.

Nous allons tout d'abord tenter de justifier les formules usuelles de l'aire et du volume d'une sphère, déjà connues par Archimède au IIIème siècle av. J.-C.

1.1. Aire d'une sphère

Fig. 1: Sphère inscrite dans un cylindre

Tout d'abord, on inscrit une sphère de rayon r dans un cylindre de révolution de diamètre $2r$, et on projette tous ses points sur la face latérale de ce dernier.

Le cylindre étant exactement circonscrit à la sphère, sa hauteur est égale au diamètre de la sphère, $2r$, et son périmètre est égal au périmètre de la sphère, $2\pi r$.

Cette projection cylindrique est équivalente, c'est-à-dire qu'elle conserve les aires. En effet, (D) un domaine de la sphère est caractérisé par :

$\theta_1 \leqslant \theta \leqslant \theta_2$, où θ est sa longitude,

et $\varphi_1 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_2$, où φ est sa latitude.

En passant à la limite en faisant tendre θ_2 vers θ_1 et φ_2 vers φ_1, on assimile (D) à un domaine plan d'aire :

$$R^2 \cos^2\varphi\, \Delta\varphi\, \Delta\theta$$

où $\Delta\theta=\theta_2-\theta_1$ et $\Delta\varphi=\varphi_2-\varphi_1$.

Sur le patron du cylindre, on a un rectangle de largeur $R\cos\varphi\, \Delta\varphi$ et de longueur $R\cos\varphi\, \Delta\theta$, donc d'aire :

$R^2 \cos^2\varphi \; \Delta\varphi \; \Delta\theta$.

Le domaine se projette sur un domaine d'aire égale: la projection est donc équivalente.

Par conséquent, la sphère se ramène exactement à la face latérale du cylindre, dont on considère le patron, un rectangle de largeur $2\pi r$ et de longueur $2r$, dont l'aire A se calcule aisément; c'est l'aire de la sphère :

$$A=2\pi r \, x \, 2\mathrm{r} \Leftrightarrow A=4\pi r^2$$

1.2. Démonstration du volume d'une sphère grâce au principe de Cavalieri

Le principe de Cavalieri, qui trouve sa justification profonde dans le calcul intégral – qui dépasse nos compétences de cette première moitié d'année scolaire –, s'énonce ainsi en termes modernes:

L'espace est rapporté au repère orthonormal $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. Deux solides S_1 et S_2 bornés étant donnés, notons $s_1(h)$ respectivement $s_2(h)$ l'aire du domaine plan $S_1 \cap P_h$ respectivement $S_2 \cap P_h$, où P_h est le plan d'équation $z=h$. Alors, $\forall h \in R$ $s_1(h)=s_2(h)$, S_1 et S_2 ont même volume.

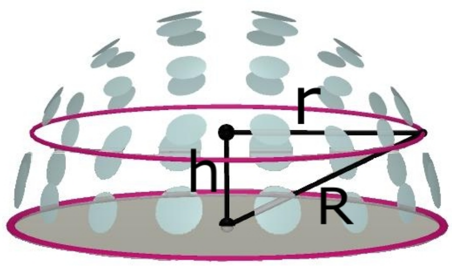


Fig. 2: Solide S_1

On applique ce principe au volume de la sphère.

Soient une demi-sphère S_1 de rayon R, et $s_1(h)$ l'aire d'un domaine plan, qui est l'intersection d'un plan P_h d'équation $z=h$ avec cette sphère.

L'aire $s_1(h)$ s'exprime ainsi: $s_1(h)=\pi r^2$. D'après le théorème de Pythagore, $r^2=R^2-h^2$, d'où $s_1(h)=\pi(R^2-h^2)$, soit encore $s_1(h)=\pi R^2-\pi h^2$.

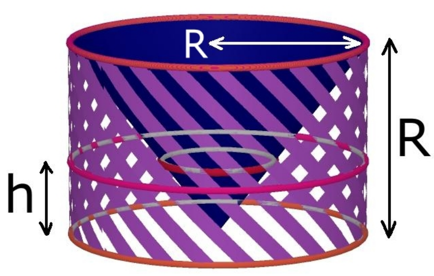


Fig. 3: Solide S_2

Soit un tronc de cylindre de hauteur *R* et de rayon *R*, avec à l'intérieur, un tronc de cône de base de rayon *R*, comme sur la figure. On considère le solide S_2 formé par le complémentaire dans le tronc de cylindre du tronc de cône. Soit $s_2(h)$ l'aire du domaine plan

$S_2 \cap P_h$, où P_h est le plan d'équation $z=h$.

L'aire $s_2(h)$ correspond à la différence de l'aire de l'intersection de P_h avec le cylindre (πR^2), et de l'aire de l'intersection de P_h avec le cône (πr^2). On peut donc écrire: $s_2(h)=\pi R^2-\pi r^2$.

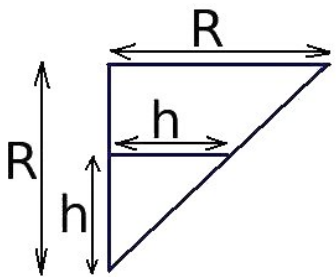


Fig. 4: Intersection du cône avec un plan vertical (parallèle à l'axe du cône)

Donc $\forall h_{0\leqslant h\leqslant R}$, on a $s_1(h)=s_2(h)$. De plus, $\forall h \notin [0,R]$, $s_1(h)=s_2(h)$: les deux aires sont alors toutes deux nulles, puisqu'elles n'intersectent aucun des deux solides S_1 et S_2 .

D'après le principe de Cavalieri, les deux solides S_1 et S_2 ont même volume: $V_1=V_2$.

On calcule donc le volume du solide S_2 .

Le calcul du volume d'un tronc de cône est connu avant Archimède et justifié rigoureusement par lui. Celui-ci est égal au tiers du tronc de cylindre qui le contient. Le volume du cylindre de base d'aire πR^2 et de rayon R est $\pi R^2 R$. Alors :

$$V_2=V_1=\left(1-\frac{1}{3}\right)\pi R^2 R = \frac{2}{3}\pi R^3$$

S_2 étant une demi-sphère, on peut en conclure que le volume d'une sphère de rayon R est $2V_1$, soit $\boldsymbol{\frac{4}{3}\pi R^3}$.

1.3. Autre démonstration du volume d'une sphère: preuve géométrique

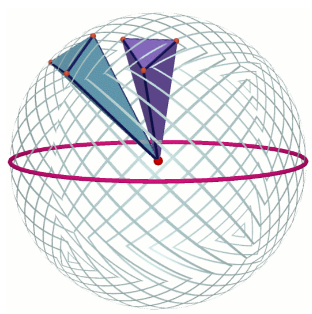


Fig. 5 : Décomposition d'une sphère en un nombre N de pyramides

On décompose la sphère en un nombre N de pyramides ayant pour sommet le centre de la sphère et pour hauteur son rayon.

On effectue un passage à la limite quand N tend vers $+\infty$. La somme de la surface des bases de toutes les pyramides est alors égale à l'aire de la sphère, $4\pi r^2$ (on suppose chaque base plane).

Par conséquent, la somme des volumes des pyramides, et donc le volume V de la sphère, est égal à :

$$V = \frac{(Aire\,de\,la\,base)\,x\,(hauteur)}{3} \Leftrightarrow V = \frac{4\pi r^2 x r}{3} = \frac{4}{3}\pi r^3$$

2. Trigonométrie sphérique

On appelle géométrie sphérique la géométrie dont le support est une sphère. Malgré les différences entre la géométrie euclidienne dans le plan et la géométrie sphérique, on peut transposer certaines notions de la première à la seconde. Nous nous plaçons sur une sphère (S) de centre O et de rayon 1. Les mesures sont en radians.

Ainsi, en géométrie sphérique, un triangle est la donnée de trois points *x*, *y* et *z* tels que $\vec{Ox}$, $\vec{Oy}$ et $\vec{Oz}$ ne sont pas coplanaires (autrement dit, *x*, *y* et *z* ne sont pas alignés sur un grand cercle de (S)).

Par définition, le côté d'un triangle sphérique est l'arc de grand cercle passant par *y* et *z* de longueur strictement inférieure à un demi-grand cercle (i.e. $\widehat{xOy}$, $\widehat{yOz}$ et $\widehat{zOx}$ strictement inférieurs à π). On désigne par *grand cercle* tout cercle ayant même centre et même rayon que la sphère.

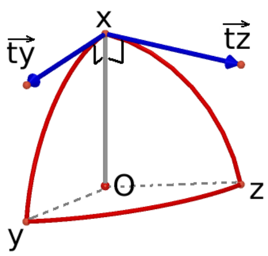


Fig. 6: Triangle xyz

Par ailleurs, on appelle angle entre deux arcs de cercles l'angle formé par les deux droites tangentes à ces arcs de cercles (elles appartiennent toutes deux au plan tangent à la sphère au point d'intersection des deux arcs).

Soit *a* la mesure en radians de l'angle entre les vecteurs $\vec{Oy}$ et $\vec{Oz}$, sur une sphère de rayon 1, on a :

$0 < a < \pi$ $\quad \vec{Oy}.\vec{Oz} = \cos(a)$, d'où $a = \arccos(\vec{Oy}.\vec{Oz})$.

De même :

$0 < b < \pi$ $\quad \vec{Oz}.\vec{Ox} = \cos(b)$, d'où $b = \arccos(\vec{Oz}.\vec{Ox})$

$0 < c < \pi$ $\quad \vec{Ox}.\vec{Oy} = \cos(c)$, d'où $c = \arccos(\vec{Ox}.\vec{Oy})$

L'angle *A* en *x* de *xyz* est l'angle entre les vecteurs $\vec{ty}$ et $\vec{tz}$ tangents en *x* aux arcs de cercle *xy* et *xz* comme indiqué sur la figure 6.

La mesure *A* est aussi la mesure ($0 < A < \pi$) de l'angle dièdre des plans xOy et xOz.

2.1. Formule de Girard

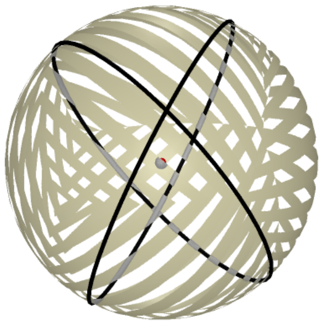


Fig. 7: 2 grands cercles délimitent 4 lunes

Définition d'une lune :

En géométrie sphérique, le plus simple polygone, à deux côtés, est appelé lune.

En effet, deux grands cercles définissent quatre régions de la sphère, donc chacune est appelée lune. Ainsi, certaines propriétés de la lune sont remarquables: ses deux angles sont égaux, ses deux côtés sont des arcs de grands cercles (demi-grands cercles), ses deux sommets sont antipodaux.

Soit la lune AA' d'angle $\theta_2-\theta_1$, région de la sphère définie par $\theta_1 \leqslant \theta \leqslant \theta_2$.

Lemme: Aire d'une lune

L'aire d'une lune d'angle α sur la sphère de rayon 1 est $S=2\alpha$ (avec α mesuré en radians).

Démonstration :

L'aire d'une sphère de rayon 1 est égale à 4π . Si on trace un grand cercle sur la sphère, on la divise en deux hémisphères d'aire de 2π . Si on place un deuxième grand cercle, coupant le premier à angle droit, la sphère est alors divisée en quatre lunes, chacune d'angle $\frac{\pi}{2}$ radians et d'aire π . Si on divise chaque lune en deux (on a alors quatre grands cercles en tout), on obtient huit lunes d'angle $\frac{\pi}{4}$ d'aire $\frac{\pi}{2}$, et ainsi de suite.

En résumé, si on divise la sphère en $2q$ lunes d'aire égale, on a besoin de q grands cercles (passant par tous par deux mêmes points antipodaux). Chaque lune est alors d'angle $\frac{2\pi}{2q}$, soit $\frac{\pi}{q}$, et d'aire $\frac{4\pi}{2q}$, soit $\frac{2\pi}{q}$.

Ainsi, une grande lune formée de p de ces lunes sera d'angle $\frac{p\pi}{q}$ et d'aire $\frac{2p\pi}{q}$. Supposons que l'angle de la (grande) lune est $\alpha=\frac{p\pi}{q}$, son aire est alors de 2α .

Soit A_L l'aire d'une lune d'angle $\alpha=\frac{p}{q}\pi$, ou encore $\alpha=a\pi$ où a est un coefficient rationnel, on a donc :

$$A_L = 2\alpha$$

La formule de l'aire d'une lune $A_L = 2\alpha$ ci-dessus est montrée pour une lune d'angle $\alpha \in \mathbb{Q}$. Cependant, on peut l'étendre à tous les angles.

En effet, soit $\alpha \in \mathbb{R}$, on peut définir deux suites u et v de rationnels telles que :

$$\forall n \quad u_n \leqslant \alpha \leqslant v_n \qquad \lim_{n\to+\infty} v_n - u_n = 0 \quad ,$$

alors $2u_n \leqslant A_L \leqslant 2v_n$.

Comme $\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} v_n = \alpha$, $A_L = 2\alpha$.

Aire d'un triangle sphérique

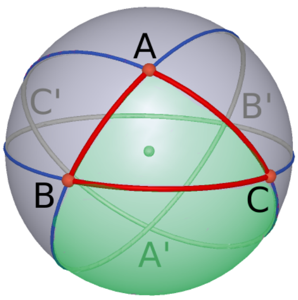


Fig. 8: Triangle sphérique ABC et seconde lune AA' (L_A)

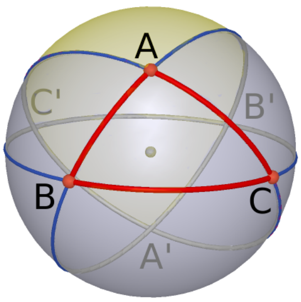


Fig. 9: Triangle sphérique ABC et première lune AA' (L_A')

Soit un « vrai »triangle sphérique ABC (défini en 2)), d'angles α , β et γ , correspondant aux sommets A, B et C.

Si on prolonge les arcs de grands cercles qui constituent ses côtés (on trace ainsi trois grands cercles), la sphère est alors divisée en huit triangles.

Par ailleurs, on s'aperçoit qu'un des triangles est image antipodale de ABC; on le note A'B'C'. En effet, ses sommets A', B' et C' sont respectivement antipodaux des sommets A, B et C. Les triangles ABC et A'B'C' ont donc la même aire.

En outre, en considérant le point A, on remarque qu'il est le sommet de deux lunes AA', donc l'une est constituée de ABC et de BCA' (on la note L_A), et l'autre de A'B'C' et B'C'A (que l'on note L_A'). De même, on a :

- Deux lunes BB': L_B formée de ABC et ACB', et L_B' formée de A'B'C' et A'C'B;
- Deux lunes CC': L_C formée de ABC et ABC', et L_C' formée de A'B'C' et A'B'C.

En résumé :

- ABC est contenu uniquement dans L_A , L_B et L_C ;
- A'B'C' est contenu uniquement dans L_A' , L_B' et L_C' ;
- Chaque point de la sphère qui n'est ni dans ABC ni dans A'B'C' est contenu dans l'une des six lunes.

Par conséquent, les six lunes couvrent entièrement la sphère, la surface de ABC et celle de A'B'C' étant chacune couvertes deux fois de plus, ce qui revient à écrire (on note chaque lune L_i , avec $i \in \mathbb{N}$ tel que $1 \leqslant i \leqslant 6$) :

$$\sum_{i=1}^{6} aire(L_i) = aire(sphère) + 2\,aire(ABC) + 2\,aire(A'B'C') \quad ,$$

soit, en remplaçant par leur formule les aires connues :

$$2\alpha + 2\beta + 2\gamma + 2\alpha + 2\beta + 2\gamma = 4\pi + 4\,aire(ABC) \quad .$$

On peut donc exprimer l'aire de ABC :

$$4\,aire(ABC) = 4\alpha + 4\beta + 4\gamma - 4\pi$$

$$aire(ABC) = \alpha + \beta + \gamma - \pi$$

On peut passer à la sphère de rayon *r* par homothétie de rapport *r*. En effet, soit triangle sphérique $A''B''C''$, situé sur une sphère S'' de rayon *r* et de centre O, on a :

$$\forall M \in S \ \ \forall M'' \in S'', \ \ \overrightarrow{OM''} = r\,\overrightarrow{OM}$$

On peut en déduire que $\boxed{aire(A''B''C'') = r^2 aire(ABC)}$

On obtient ainsi la **formule de Girard** :

$$\boxed{\boldsymbol{aire(A''B''C'') = r^2(\alpha + \beta + \gamma - \pi)}}$$

On peut également s'intéresser à la somme des mesures des angles d'un triangle sphérique :

$$\alpha + \beta + \gamma \ = \ \pi + \frac{1}{r^2} aire(ABC)$$

On peut alors noter que, à la différence de la géométrie euclidienne dans le plan où elle est toujours égale à π , elle n'est pas constante, mais dépend du rayon de la sphère et de l'aire du triangle.

2.2. Relations du 1er ordre: le groupe de Gauss

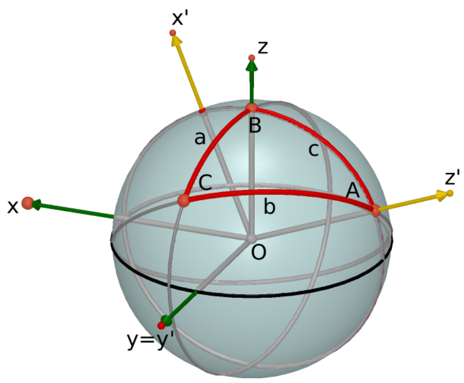


Fig. 10: Triangle sphérique

Soit ABC un triangle sphérique sur la sphère de centre O et de rayon 1. On note, classiquement, a, b et c respectivement mesures des côtés BC, AC et AB, $0 < a < \pi$, $0 < b < \pi$, $0 < c < \pi$. On note également A, B et C les mesures en radians respectives des angles $\widehat{BAC}$, $\widehat{ABC}$ et $\widehat{BCA}$.

Choisissons un repère

orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ d'origine O tel que $B \in (Oz)$, $A \in (xOz)$ de telle sorte que $x_A < 0$, et (Oy) tel que $y_C > 0$.

Les coordonnées du point *C* sont (par lecture graphique) :

$$(1) \begin{cases} x = -\sin(a) \cos(B) \\ y = \sin(a) \sin(B) \\ z = \cos(a) \end{cases}$$

On effectue un changement de repère: le nouveau repère $(O, \vec{i'}, \vec{j'}, \vec{k'})$ s'obtient à partir du premier par rotation d'axe (Oy) d'angle *c* de sorte que $A \in (Oz')$.

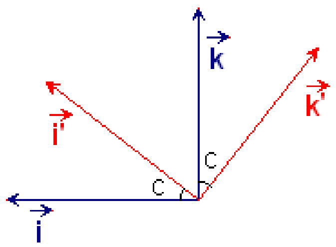


Fig. 11: Changement de repère

Calculons ensuite les coordonnées de C relativement au second repère $(O, \vec{i'}, \vec{j'}, \vec{k'})$ (par lecture graphique également) :

$$(2) \begin{cases} x' = -\sin(b) \cos(A) \\ y' = \sin(b) \sin(A) \\ z' = \cos(b) \end{cases}$$

On écrit alors les formules de changement de repère, afin d'exprimer les anciennes coordonnées de *C* (*x, y et z*) en fonction des nouvelles (*x', y' et z'*).

Le second repère étant obtenu à partir du premier par rotation d'axe (Oy) d'angle *c*, on a $\widehat{xOx'} = \widehat{zOz'} = c$. On peut alors écrire :

$$(3) \begin{cases} \vec{i'} = \cos(c)\vec{i} + \sin(c)\vec{k} \\ \vec{j'} = \vec{j} \\ \vec{k'} = -\sin(c)\vec{i} + \cos(c)\vec{k} \end{cases}$$

De plus, on a $\vec{OC} = x'\vec{i'} + y'\vec{j'} + z'\vec{k}$, d'où, en remplaçant $\vec{i'}$, $\vec{j'}$ et $\vec{k'}$ par leurs expressions (3), on obtient :

$\vec{OC} = x'(\cos(c)\vec{i} + \sin(c)\vec{k}) + y'\vec{j} + z'(-\sin(c)\vec{i} + \cos(c)\vec{k})$

d'où $\vec{OC} = x'\cos(c)\vec{i} + x'\sin(c)\vec{k} + y'\vec{j} - z'\sin(c)\vec{i} + z'\cos(c)\vec{k}$

soit encore $\vec{OC} = (x'\cos(c) - z'\sin(c))\vec{i} + y'\vec{j} + (x'\sin(c) + z'\cos(c))\vec{k}$

On peut donc écrire les coordonnées de C dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$:

$$\begin{cases} x = x' \cos(c) - z' \sin(c) \\ y = y' \\ z = x' \sin(c) + z' \cos(c) \end{cases}$$

En rappelant (1) et (2), on obtient :

$$\begin{cases} \mathbf{sin}(\boldsymbol{a})\,\mathbf{cos}(\boldsymbol{B}) \;=\; \mathbf{cos}(\boldsymbol{b})\,\mathbf{sin}(\boldsymbol{c}) - \mathbf{sin}(\boldsymbol{b})\,\mathbf{cos}(\boldsymbol{C})\,\mathbf{cos}(\boldsymbol{A}) & (i) \\ \mathbf{sin}(\boldsymbol{a})\,\mathbf{sin}(\boldsymbol{B}) \;=\; \mathbf{sin}(\boldsymbol{b})\,\mathbf{sin}(\boldsymbol{A}) & (ii) \\ \mathbf{cos}(\boldsymbol{a}) \;=\; \mathbf{cos}(\boldsymbol{b})\,\mathbf{cos}(\boldsymbol{c}) + \mathbf{sin}(\boldsymbol{b})\,\mathbf{sin}(\boldsymbol{c})\,\mathbf{cos}(\boldsymbol{A}) & (iii) \end{cases}$$

(i) : **relation des 5 éléments** (2 angles et 3 côtés),

(ii) : **relation des sinus**, qui s'écrit aussi $\frac{\sin(a)}{\sin(A)} = \frac{\sin(b)}{\sin(B)} = \frac{\sin(c)}{\sin(C)}$

(iii) : **formule fondamentale**

On peut remarquer que si ABC est équilatéral, $a = b = c$, et la formule fondamentale *(iii)* s'écrit $\mathbf{cos}(\boldsymbol{a}) = \mathbf{cos}^2(\boldsymbol{a}) + \mathbf{sin}^2(\boldsymbol{a})\mathbf{cos}(\boldsymbol{A})$.

Or, $\cos^2(a) + \sin^2(a) = 1 \; d'où \sin^2(a) = 1 - \cos^2(a)$. On obtient alors :

$\cos(a).(1 - \cos(a)) = (1 - \cos(a)).(1 + \cos(a))\cos(A)$.

Comme $0 < a < \pi$, $1 - \cos(a) \neq 0$,

donc $\cos(a) = (1 + \cos(a))\cos(A)$,

ou encore $\cos(A) = \frac{\cos(a)}{1 + \cos(a)}$.

Pour un triangle sphérique équilatéral, la formule suivante est donc vérifiée: $\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{cos}(\boldsymbol{A})} \;=\; \mathbf{1} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{cos}(\boldsymbol{a})}$ *(iii')*.

2.3. Application: angle dièdre de deux faces adjacentes d'un tétraèdre régulier

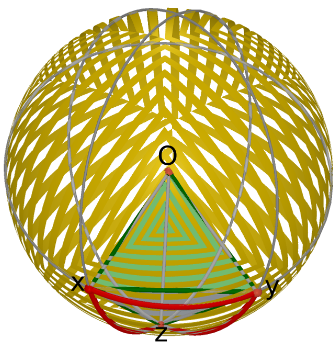


Fig. 12: Tétraèdre régulier Oxyz inscrit dans la sphère S

On peut utiliser la formule fondamentale pour calculer la mesure de l'angle dièdre de deux faces adjacentes d'un tétraèdre régulier.

Soit un tétraèdre régulier O*xyz* de base *xyz*, inscrit dans une sphère S de centre O et de rayon $Ox = Oy = Oz$. On projette la base *xyz* sur la sphère S, et on considère le triangle sphérique *xyz* sur S. Soient respectivement A, B, C ses angles et a, b, c ses côtés (comme indiqué sur la figure 13).

On cherche à déterminer l'angle A entre les plans *(xOy)* et *(xOz)*, c'est-à-dire l'angle dièdre des faces *xOy* et *xOz.*

On a $a = \widehat{zOy}$, $b = \widehat{xOz}$ et $c = \widehat{xOy}$. Or $a = b = c = \frac{\pi}{3}$ car toutes les faces d'un tétraèdre régulier sont des triangles équilatéraux. Le triangle sphérique *xyz* est donc équilatéral.

En reprenant la relation *(iii')*, qui découle de la formule fondamentale, on obtient :

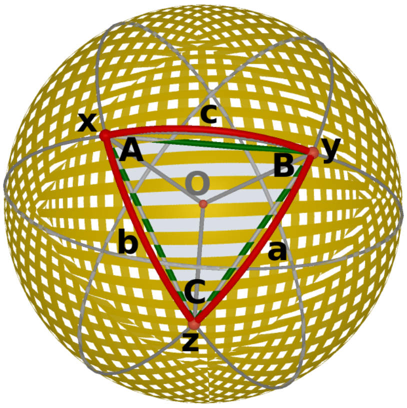


Fig. 13: Tétraèdre régulier Oxyz inscrit dans la sphère S

$$\frac{1}{\cos(A)} = 1+\frac{1}{\cos(a)} = 1+\frac{1}{\cos(\frac{\pi}{3})} = 1+\frac{1}{1/2} = 3$$

d'où $\cos(A)=\frac{1}{3}$ et $\boldsymbol{A=\arccos\left(\frac{1}{3}\right)}$,

soit encore $\boldsymbol{A\approx 70°31'44''}$, ou $A\approx 70{,}5288°$

2.4. Impossibilité d'une carte isométrique

Dans l'idéal, on désire une carte isométrique (à un scalaire près). Nous allons montrer qu'une carte rigoureusement isométrique d'une région de la sphère, aussi petite soit-elle, n'existe pas.

A défaut de cartes isométriques, on emploie des cartes *conformes* (c'est-à-dire conservant les angles) ou des cartes *équivalentes* (c'est-à-dire conservant les aires à un scalaire près) pour représenter de grandes étendues.

Comme exemples de cartes conformes, nous pouvons citer la projection de Mercator (utilisée pour les planisphères de géographie), la projection de Lambert (en usage à l'IGN et pour les cartes d'état-major), ainsi que la projection stéréographique.

Le projection de Bonne est, quant à elle, une projection équivalente. Elle a été en usage dans les cartes d'état-major, en France, jusqu'à la Première Guerre Mondiale.

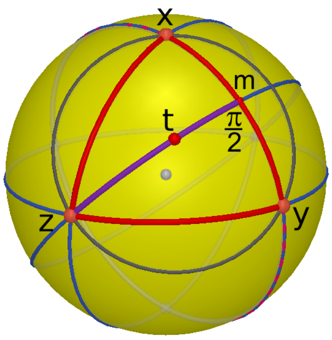
Proposition : Soit *(S)* la sphère de centre *O* et de rayon 1. Soit *U* une région de *(S)* d'intérieur non vide, c'est-à-dire telle qu'il existe $x\in U$ et $r>0$ tel que la boule B_r de centre x et de rayon r vérifie $B_r\cap(S)\subset U$. Soit P le plan supposé rapporté au repère orthonormal $(O,\vec{i},\vec{j})$.

Il n'existe pas d'application $f:U\to P$ qui soit isométrique, c'est-à-dire pour laquelle il existe k>0 tel que :

$$\forall x\in U \quad \forall y\in U \quad d(f(x),f(y))=k.\delta(x,y) \quad ,$$

où δ est la distance sur la sphère: $\delta(u,v)=\arccos(\overrightarrow{Ou},\overrightarrow{Ov})$,

et *d* la distance euclidienne dans *P*.



Démonstration :

U étant d'intérieur non vide, il est possible de choisir *x, y* et *z* tels que $\delta(x,y)=\delta(y,z)=\delta(z,x)>0$, c'est-à-dire que *xyz* est équilatéral. Soit en effet $t\in U$ pour lequel il existe $r>0$ et la boule B_r de centre *t* et de rayon *r* telle que $B_r\cap(S)\subset U$. $(\sum_r)$ la sphère de centre t de rayon *r* coupe *(S)* selon un cercle (γ_r) inclus dans *U*. Plaçons sur (γ_r) *x, y et z* tels que $xy=yz=zx$ (avec $xy=d(x,y)$, $yz=d(y,z)$ et $xz=d(x,z)$). Alors xyz est un triangle sphérique de *(S)* équilatéral, et sur *(S) :* $\delta(t,x) = \delta(t,y) = \delta(t,z) = r$.

Notons $a = \delta(x,y) = \delta(y,z) = \delta(z,x)$.

Soit m le milieu de l'arc de cercle yz. Le triangle sphérique *mty* est rectangle en *m*. L'angle en t de *ytm* est égal à $\frac{\pi}{3}$. La relation des sinus permet d'écrire :

$$\frac{\sin(r)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}=\frac{\sin\left(\frac{a}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)}\text{, donc }\quad \boldsymbol{\sin\left(\frac{a}{2}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin(r)}\quad (*)$$

Or *f* l'application de $x\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right]$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f: x\to\frac{\sin(x)}{x}$ est dérivable:

$$\forall x\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[\quad f'(x)=\frac{x\cos(x)-\sin(x)}{x^2}=\frac{\cos(x)}{x^2}(x-\tan(x)) \ .$$

$$\forall x\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[\quad \cos(x)>0 \text{ et } x-\tan(x)<0 \ ,$$

donc $\forall x\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[\quad f'(x)<0$, et f est strictement décroissante sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right]$.

Donc $\forall(x_1,x_2)\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right]^2 \quad x_1<x_2 \Rightarrow \frac{\sin(x_2)}{x_2}<\frac{\sin(x_1)}{x_1}$,

c'est-à-dire $\boldsymbol{\frac{\sin(x_2)}{\sin(x_1)}<\frac{x_2}{x_1}}$ (1)

Ayant pris soin de prendre *r* tel que $0<r<\frac{\pi}{2}$, la relation (*) entraîne : $\sin\left(\frac{a}{2}\right)<\sin(r)$ car $\frac{\sqrt{3}}{2}<1$.

Comme sin est strictement croissante sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, on obtient $\frac{a}{2}<r$, donc, d'après (1) :

$$\frac{\sin(r)}{\sin(a/2)} < 2.\frac{r}{a} .$$

Comme, d'après (*), $\frac{\sin(r)}{\sin(a/2)} = \frac{2}{\sqrt{3}}$, on obtient : $\frac{r}{a} > \frac{1}{\sqrt{3}}$, ou encore :

$$\boldsymbol{a < \sqrt{3}\, r} \quad (2)$$

Raisonnons par l'absurde :

S'il existe une isométrie *f* de *U* dans *P*, soient x', y', z' et t' les images par *f* respectives de x, y z, t, alors x'y'z' est un triangle équilatéral de centre t', et il existe k > 0 tel que *t'x' = kr et y'z' = ka*, donc, d'après (2) :

$$\boldsymbol{\frac{t'x'}{y'z'} = \frac{r}{a} > \frac{1}{\sqrt{3}}} \quad (3) .$$

Or car t est le centre de gravité de x'y'z' et $t'x' = \frac{2}{3}.\frac{\sqrt{3}}{2}.y'z'$, donc :

$$\boldsymbol{\frac{t'x'}{y'z'} = \frac{1}{\sqrt{3}}} \quad (4)$$

Il y a contradiction entre (3) et (4), ce qui prouve la proposition.

Conclusion II.

Cette étude de la sphère du point de vue mathématique nous a permis de nous rendre compte de l'étendue du sujet, intéressant mais parfois complexe à traiter. C'est pour cela que nous avons restreint cette partie à l'étude de certains éléments relatifs à la sphère.

En effet, nous avons, tout d'abord, pu démontrer deux formules courantes: l'aire d'une sphère (en effectuant une projection sur un cylindre) et le volume d'une sphère (en utilisant le principe de Cavalieri ou en décomposant la sphère en un nombre infini de pyramides). Nous nous sommes ensuite intéressés à la trigonométrie sphérique, en prouvant la formule de Girard (aire d'une triangle sphérique), en prouvant les relations du premier ordre dans le triangle sphérique (formule fondamentale, formule des sinus, formule des cinq éléments), et, enfin, en montrant qu'il était impossible d'obtenir une carte isométrique d'une région d'une sphère, aussi petite soit-elle.

Il a été intéressant, notamment, de rechercher la signification de formules comme celles de l'aire et du volume d'une sphère, qui nous sont pourtant connues depuis longtemps, et de constater que leur simplicité n'est qu'apparente. La trigonométrie sphérique nous a également intéressés, du fait, notamment, des nombreuses applications géographiques et astronomiques qu'elle permet, si on assimile la Terre à une sphère (navigation aérienne et maritime notamment).

Conclusion de l'étude

Lors de ce travail personnel encadré, nous avons pu nous rendre compte de l'étendue du sujet et du grand nombre d'éléments d'étude possibles, tant concernant l'aspect mathématique que l'aspect mythologique. C'est pour cette raison que nous nous sommes cantonnés à certains axes de recherche.

En effet, en premier lieu, l'étude de la sphère dans la mythologie nous a conduit à aborder la représentation de cette dernière dans les mythologies grecque, tibétaine, indienne et amérindienne.

Nos recherches sur la sphère dans la mythologie nous ont également conduit à étudier son symbolisme, notamment sa représentation du divin et de la perfection, mais aussi le couple sphère-cube, que l'on retrouve dans l'art et l'architecture. Par ailleurs, le passage d'un élément courbe à un objet anguleux symbolise l'Incarnation.

Enfin, ces nombreux mythes nous ont amenés à nous intéresser à quelques philosophes qui ont écrit sur la sphère, et ont élaboré des théories sur la forme et la place de notre planète dans l'Univers. Nous nous sommes particulièrement intéressés à l'approche de Platon, au travers d'une analyse du Mythe d'Er, rapporté dans *la République*.

Suivre le fil des mythes fondateurs au travers de l'espace, celui des conception de l'univers au cours de temps, celui des calculs mathématiques depuis Archimède a donc été pour nous particulièrement intéressent, induisant nombre de questions sur l'universalité de la fascination pour la sphère. Les architectes de tous temps ont, en effet, souhaité concrétiser ce miracle de beauté et d'harmonie, en construisant des dômes sphériques – et en les reconstruisant lorsqu'ils s'effondraient. Les progrès techniques contemporains, diminuant les risques d'accident, autorisent l'édification de monuments sphériques – du moins en première approximation –, toujours plus complexes, dont l'une des illustrations est la Géode de la *Cité des Sciences*, à Paris.

Concernant la sphère en mathématiques, nous avons tout d'abord, après un préambule présentant la définition de cette dernière, développé une preuve de la formule usuelle de l'aire d'une sphère, en projetant tous les points de sa surface sur la face latérale d'un cylindre, et en montrant ensuite que cette projection est équivalente. Nous avons ensuite pu démontrer la formule du volume de la sphère, de deux manières différentes: grâce au principe de Cavalieri, en montrant que la volume d'une sphère de rayon R est égal au double du volume du solide formé du complémentaire dans un cylindre d'un cône de diamètre et de hauteur R, et, également, en décomposant la sphère en un nombre infini de pyramides de sommet le centre de la sphère.

De plus, l'étude de la sphère nous a conduit à nous intéresser à la géométrie sphérique, et, plus précisément, à la trigonométrie sphérique. C'est ainsi que nous avons démontré la formule de Girard, qui permet d'obtenir l'aire d'un triangle sphérique. Toujours dans le triangle sphérique, nous avons également montré trois relations, regroupées sous le nom de *groupe de Gauss*: la formule fondamentale, la relation des sinus, et la relation des cinq éléments (deux angles et trois côtés), qui sont très utiles pour différents calculs sur le triangle sphérique.

Enfin, nous avons montré pourquoi il est impossible d'obtenir une carte isométrique d'une région de la sphère, aussi petite soit-elle, ce qui pose également le problème de l'établissement de cartes de navigation, et explique la nécessité d'utiliser des cartes conformes, conservant les angles, ou équivalentes, conservant les aires.

Ce travail a donc été pour nous l'occasion de recherches et de réflexion intéressantes et instructives, cependant limité par le niveau de nos connaissances en ce milieu d'année de première.

Annexes

A. Références bibliographiques

B. Extraits de textes

1. *La République* de Platon
2. *Le Timée* de Platon

C. Les scientifiques grecs

1. Les Présocratiques,
2. L'Ecole Athénienne,
3. La science hellénistique

A. Références bibliographiques

1. Ouvrages

- Robert Graves, *Les Mythes grecs*, éd. Fayard, 1967, 873 pages.
- Eliade Mircea, *Histoire des croyances et des idées religieuses*, tome 1, éd. Payot, 1976, 496 pages.
- Jean Chevalier et Alain Gheerbrant, *Dictionnaire des symboles*, éd. Robert Laffont, 7982, 1060 pages.
- Sous la direction d'Yves Bonnefoy, *Dictionnaire des mythologies*, tomes 1 et 2, éd. Flammarion, 1999, 2255 pages.
- Stanislas Breton, « création », dans l'*Encyclopédie Universalis,* tome 6, 1990.
- Platon, *La République*, G-F-Flammarion, 1966, introduction, traduction et notes de Robert Baccou, 510 pages.
- Catherine Gollian, *La pensée antique des présocratiques à Saint Augustin – les textes fondateurs commentés*, éd. Tallandier, 2005, 130 pages.

2. Périodiques

- *Dossier pour la science*, « La sphère sous toutes ses formes », Hors-série n°41, octobre / décembre 2003

3. Pages Web

http://perso.orange.fr/therese.eveilleau/pages/hist_mat/textes/mirliton.htm
http://fr.wikipedia.org/wiki/Sph%C3%A8re
http://www.infoscience.fr/articles/articles_aff.php3?Ref=45
http://serge.mehl.free.fr/chrono/Girard.html
http://math.rice.edu/~pcmi/sphere/
http://astroti.free.fr/astroti/calc/astrosph.html
http://xavier.hubaut.info/coursmath/app/geogr.htm
http://tgtg-info.viabloga.com
http://coll-ferry-montlucon.planet-allier.com/gdscient.htm
http://bdl.fr
http://cosmobranche.free.fr
http://quid.fr
http://toutsurlesbulles.free.fr
http://plato-dialogues.org/fr/tetra_4/republic/er.htm
http://ugo.bratelli.free.fr/Platon/Platon-Timee.htm
http://expositions.bnf.fr
http://www.aim.ufr-physique.univ-paris7.fr

B. Extraits de texte.

1. Extrait de La Répubique *de Platon*

Après que, pour chacun d'eux, sept jours dans la prairie se fussent écoulés, se levant pour partir le huitième, il leur fallait s'en aller pour arriver après quatre jours là d'où l'on peut contempler, tendue d'en haut à travers tout le ciel et la terre, une lumière droite comme une colonne, tout à fait semblable à l'arc-en-ciel, mais encore plus brillante et plus pure. On y arrive en poursuivant son chemin pendant un jour et là même, on voit au milieu de la lumière, venant du ciel, les extrémités tendues de ses chaînes --en effet, cette lumière est un lien du ciel qui, comme les armatures qui ceignent les flancs des trières, tient ensemble toute la sphère céleste--, et tendu à partir de ces extrémités, le fuseau de Nécessité (Anagkè), par lequel tournent toutes les sphères célestes, et dont la tige et le crochet d'une part sont d'acier, le peson d'autre part d'un mélange de cela et d'autres espèces. En outre, la nature du peson est telle que voici : d'une part une forme extérieure identique à celle de ceux d'ici, mais d'autre part, il faut comprendre à partir de ce qu'il disait qu'il est tel que voici : comme si dans un grand peson creux et évidé était ajusté de part en part un autre pareil, mais plus petit, comme les vases qui s'ajustent les uns dans les autres, et de même encore un troisième autre, puis un quatrième, puis quatre autres. Huit en effet sont en tout les pesons mis les uns dans les autres, leurs bords paraissant des cercles d'en haut, parfaitement travaillés pour former la surface d'un seul peson autour de la tige ; celle-ci en effet se prolonge de part et d'autre à travers le milieu du huitième. Donc, le premier et le plus à l'extérieur des pesons a le plus large cercle de bordure, alors que celui du sixième [vient en] second, puis troisième celui du quatrième, puis quatrième celui du huitième, puis cinquième celui du septième, puis sixième celui du cinquième, puis septième celui du troisième, puis huitième celui du deuxième. Et celui du plus grand est bariolé, cependant que celui du septième est le plus brillant, et celui du huitième tient sa couleur du septième qui l'illumine, et ceux du deuxième et du cinquième sont presque identiques l'un à l'autre, plus jaunes que ceux-ci, et le troisième a une couleur très blanche, le quatrième rougeâtre, le second en blancheur [étant] le sixième. Et par ailleurs, d'une part le fuseau tout entier enroulé se meut circulairement de son propre mouvement, d'autre part, dans le tout accomplissant sa révolution, les sept cercles intérieurs accomplissent lentement une révolution contraire à celle du tout, et de ceux-ci, celui qui va le plus vite est le huitième, seconds et à égalité 'un de l'autre, le septième, le sixième et le cinquième ; puis au troisième rang vient, à ce qui leur paraissait, dans ce mouvement circulaire inverse, le quatrième, puis au quatrième le troisième et au cinquième le second. En outre, lui-même tourne sur les genoux de la Nécessité.Et sur le haut de chacun des cercles se trouve une Sirène entraînée avec lui dans son mouvement circulaire, émettant un unique son, un unique ton ; et à partr de tous ceux-ci, qui sont huit, se fait entendre un unique accord. D'autres encore, assises alentour à intervales égaux, au nombre de trois, chacune sur un trône, filles de la Nécessité, Moires, vêtues de blanc, portant des bandelettes sur leur tête, Lachésis et Clôthô et Atropos, chantent en accord avec les Sirènes, Lachésis ce qui est advenu, Clôthô quant à elle, ce qui est, Atropos enfin, ce qui doit arriver. Et la Clôthô, avec sa main droite posée dessus, contribue au mouvement circulaire extérieur du fuseau, observant des intervalles de temps, cependant que l'Atropos, de la gauche, fait de même pour sa part avec ceux de l'intérieur ; la Lachésis enfin, tout à tour, de l'une ou l'autre main, s'attache à l'un ou à l'autre.

1. Extrait du **Timée** *de Platon*

Chacun des quatre éléments est entré tout entier dans la composition du monde, car son auteur l’a composé de tout le feu, de toute l’eau, de tout l’air et de toute la terre sans laisser en dehors de lui aucune portion ni puissance d’aucun de ces éléments. Son dessein était en premier lieu qu’il y eût, autant que possible, un animal entier, parfait et formé de parties parfaites, et en outre qu’il fût un, vu qu’il ne restait rien dont aurait pu naître quelque chose de semblable, et, en dernier lieu, pour qu’il échappât à la vieillesse et à la maladie. Il savait en effet que, lorsqu’un corps composé est entouré du dehors et attaqué à contretemps par le chaud, le froid et tout autre agent énergique, ils le dissolvent, y introduisent les maladies et la vieillesse et le font périr. Voilà pourquoi et pour quelle raison le dieu a construit avec tous les touts ce tout unique, parfait et inaccessible à la vieillesse et à la maladie.

Pour la forme, il lui a donné celle qui lui convenait et avait de l’affinité avec lui. Or la forme qui convenait à l’animal qui devait contenir en lui tous les animaux, c’était celle qui renferme en elle toutes les autres formes. C’est pourquoi le dieu a tourné le monde en forme de sphère, dont les extrémités sont partout à égale distance du centre, cette forme circulaire étant la plus parfaite de toutes et la plus semblable à elle-même, car il pensait que le semblable est infiniment plus beau que le dissemblable. En outre, il arrondit et polit toute sa surface extérieure pour plusieurs raisons. Il n’avait en effet besoin ni d’yeux, puisqu’il ne restait rien de visible en dehors de lui, ni d’oreilles, puisqu’il n’y avait non plus rien à entendre. Il n’y avait pas non plus d’air environnant qui exigeât une respiration. Il n’avait pas non plus besoin d'organe, soit pour recevoir en lui la nourriture, soit pour la rejeter, après en avoir absorbé le suc. Car rien n'en sortait et rien n'y entrait de nulle part, puisqu'il n'y avait rien en dehors de lui. L'art de son auteur l'a fait tel qu'il se nourrit de sa propre perte et que c'est en lui-même et par lui-même que se produisent toutes ses affections et ses actions. Celui qui l'a composé a pensé qu'il serait meilleur, s'il se suffisait à lui-même, que s'il avait besoin d'autre chose. Quant aux mains, qui ne lui serviraient ni pour saisir ni pour repousser quoi que ce soit, il jugea qu'il était inutile de lui en ajouter, pas plus que des pieds ou tout autre organe de locomotion. Il lui attribua un mouvement approprié à son corps, celui des sept mouvements [100] qui s'ajuste le mieux à l'intelligence et à la pensée. En conséquence, il le fit tourner uniformément sur lui-même à la même place et c'est le mouvement circulaire qu'il lui imposa ; pour les six autres mouvements, il les lui interdit et l'empêcha d'errer comme eux. Comme il n'était pas besoin de pieds pour cette rotation, il l'enfanta sans jambes et sans pieds.

C'est par toutes ces raisons que le dieu qui est toujours, songeant au dieu qui devait être un jour, en fit un corps poli, partout homogène, équidistant de son centre, complet, parfait, composé de corps parfaits. Au centre, il mit une âme ; il l'étendit partout et en enveloppa même le corps à l'extérieur. Il forma de la sorte un ciel circulaire et qui se meut en cercle, unique et solitaire, mais capable, en raison de son excellence, de vivre seul avec lui-même, sans avoir besoin de personne autre, et, en fait de connaissances et d'amis, se suffisant à lui-même. En lui donnant toutes ces qualités il engendra un dieu bienheureux.

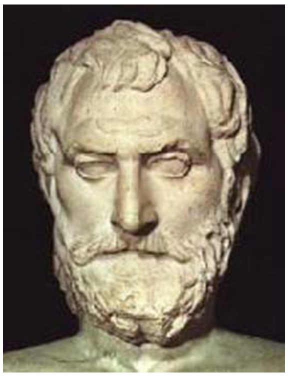
Mais cette âme, dont nous entreprenons de parler après le corps, ne fut pas formée par le dieu après le corps ; car, en les unissant, il n'aurait pas permis que le plus vieux reçût la loi du plus jeune. Nous autres, qui participons grandement du hasard et de l'accidentel, il est naturel que nous parlions aussi au hasard. Mais le dieu a fait l'âme avant le corps et supérieure au corps en âge et en vertu, parce qu'elle était destinée à dominer et à commander, et le corps à obéir.

C. Les scientifiques grecs

Bien qu'ils ne rentrent ni dans l'aspect littéraire ni dans l'aspect purement mathématique qui organisent notre TPE, il est intéressant de s'attarder sur les travaux qu'ont fait dans l'Antiquité les scientifiques grecs. On compte trois mouvement distincts : les présocratiques, qui, les premiers, commencèrent à réfléchir sur le monde qui les entourait, puis l'Ecole Athénienne, organisée autour de deux immenses personnages, Platon et Aristote, et enfin la Science Hellénistique, qui voit l'apparition d'un nouveau foyer culturel mondial, autour d'Alexandrie d'Egypte.

1. Les présocratiques

Les présocratiques n'émirent pas vraiment d'hypothèse vraisemblable, ni sur la structure de l'univers, ni sur la forme de la Terre.



Thalès de Milet (vers 625- 547 av. J.-C.)

Pour Thalès, la Terre est une surface plane, reposant sur l'eau. Cette hypothèse sera réfutée, ironiquement, par Aristote, plus tard: « D'autres disent que la Terre repose sur l'eau. C'est en effet la Thèse la plus ancienne que nous avons reçue, et que l'on attribut à Thalès de Milet, qui soutient que la Terre flotte, immobile à la façon d'un morceau de bois ou de quelques autres choses de même nature (étant entendu qu'aucune ne demeura naturellement au repos sur l'air, mais au contraire sur l'eau) ; comme s'il ne fallait pas trouver une explication identique pour l'eau qui supporte la Terre que pour la Terre elle-même. »

Un autre système, peut-être le plus étrange de ceux que nous aborderons ici, est proposé par Anaximandre, élève de Thalès, qui proposa une Terre cylindrique habitée sur sa partie supérieure.

C'est Pythagore qui aurait, le premier, affirmé la sphéricité de la Terre. Il prenait pour preuve celle de la Lune et du Soleil. Il affirmait que toutes les formes et mouvements célestes devaient être parfaits,; donc sphériques ou circulaires.

C'est Parménide, disciple de Pythagore, qui fut le premier à exprimer les idées de son maître, en utilisant pour se faire les ombres qui apparaissent sur la Lune.

Anaxagore, croyant que la Terre était plane imaginait le Soleil proche de la Terre. Il affirmait que sa taille ne dépassait pas celles du Péloponèse soit 60 kilomètres. Il avança en outre une explication au système des éclipses.

Les présocratiques s'illustrèresnt non par leur bons résultats, mais par l'apport qu'il firent au monde scientifique : une manière de travailler, qui permit de développer la réflexion scientifique.

2. L'Ecole Athénienne

Ce qu'on appelle l'Ecole Athénienne est représenté par deux immenses philosophes, qui participèrent au rayonnement d'Athènes dans le monde entier (connu), Platon et Aristote.

Platon, le disciple bien connu de Socrate et le fondateur de l'Académie d'Athènes, n'est pas vraiment un scientifique. Il posa cependant un problème important du géocentrisme : quels sont les mouvements circulaires uniformes, centrés sur la Terre, qui peuvent expliquer les incohérences que l'on observe dans les mouvements célestes, comme des planètes qui reculent ?

C'est un élève de Platon, Eudoxe de Cnide, qui conçut le premier modèle mathématique basé sur les principes de Platon et fonda de surcroît une théorie des grandeurs. Ce modèle qui fut affiné par plusieurs scientifiques est une juxtaposition de sept assemblages (un pour chaque corps céleste errant) de sphères emboîtées les unes dans les autres, chaque assemblage étant entraîné par le mouvement en 24 heures de la sphère des étoiles, la sphère des fixes.

C'est sans doute Aristote qui fut le plus prolifique à ce sujet. Sa conception de l'univers repose sur trois idées fondamentales: la Terre est immobile au centre de l'univers; il y a une séparation absolue entre le monde terrestre et céleste (la limite étant l'orbite de la Lune); les seuls mouvements célestes possibles sont les mouvements circulaires uniformes. Comme nous le savons aujourd'hui, ces trois principes sont erronés. De plus, Aristote pense avoir démontré l'immobilité de la Terre, en soutenant que si la Terre était en mouvement, nous devrions en ressentir directement les effets. Il reprendra le système d'Eudoxe, mais en lui apportant ce qu'il appelle une « cohérence physique », c'est à dire un seul gigantesque emboîtement de cinquante-cinq sphères centré sur la Terre; au lieu des sept systèmes indépendants, la sphère extérieure retenait celle des fixes. Le principal défaut de ce système était que s'il expliquait le mouvement des planètes, il n'expliquait pas les variations d'éclat de celles-ci au cours de l'année.

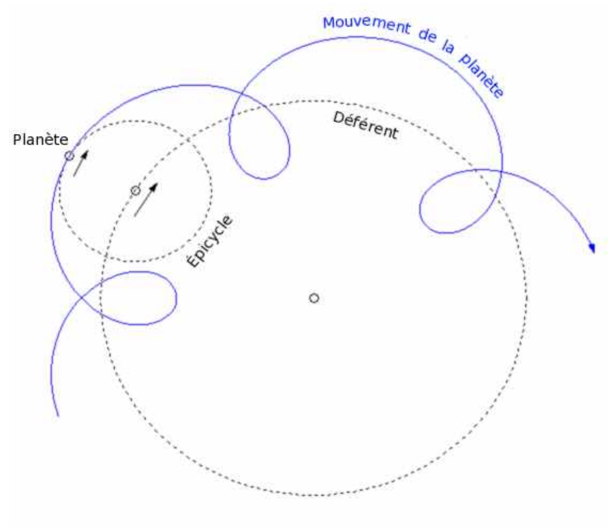
Héraclide envisagea que la sphère des fixes était immobile et que la Terre tournait autour de son axe, ce qui expliquerait le mouvement diurne des étoiles; cependant les sources écrites restent à son sujet très ténues et pour le moins incertaines.

La caractéristique première des scientifiques de l'Ecole Athénienne fut que, ne voulant pas se séparer de principes qu'ils jugeaient inattaquables, ils proposèrent des hypothèses compliquées pour expliquer le monde qui les entoure, mais ces hypothèses bien que toutes fausses permirent dans les siècles suivants d'aboutir à de bons résultats.

3. La science hellénistique

Les conquêtes d'Alexandre le Grand étendirent l'influence culturelle et scientifique de la Grèce, l'influence d'Athènes diminuant pour laisser place à Alexandrie d'Egypte.

Eratosthène est surtout connu pour sa remarquable mesure du rayon terrestre, de 6500 kilomètres – en réalité ,il en fait 6378 –, avec en tout et pour tout deux gnomons.

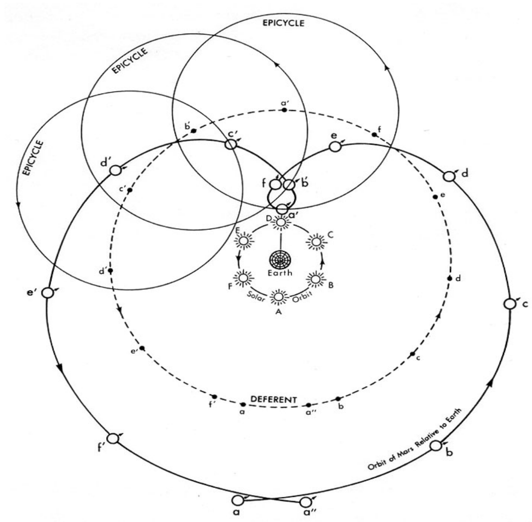


Le système des épicycles

Aristarque, dont l'oeuvre n'est attestée que par très peu de sources écrites, fut le premier à donner une mesure Terre-Lune d'une remarquable précision. Il donna aussi une astucieuse technique pour évaluer la distance Terre-Soleil, mais des imprécisions de mesures l'amenèrent à sous-estimer celle-ci d'un facteur vingt. Il est aussi possible qu'il ait été le premier à avoir proposé un système hélio-centrique, la seule source à ce sujet étant une phrase écrite dans un manuscrit d'Archimède. Il faudra attendre 1543 pour reprendre ce modèle.

Appolonius, surtout connu pour ses ouvres sur les coniques, remit en cause le système des sphères emboîtées d'Aristote. Il introduisit les notions de cercles excentriques, dont les centres seraient décalés par rapport à la Terre et de cercles épicycles – un cercle dont le centre est lui même sur un cercle beaucoup plus grand, ce qui permettrait de reproduire les mouvement de la Lune, du Soleil et des autres planètes, centrés, bien entendu, sur la Terre. Il découvrit également le phénomène de la précession des équinoxes.

Hipparque, grand astronome antique, proposa un modèle géocentrique du mouvement du Soleil rendant compte de l'inégalité des saisons. Dans ce modèle, conforme aux idées d'Appolonius, le Soleil tourne autour d'un point fictif distinct de la Terre.



L'organisation de l'Univers selon le système des épicycles amélioré par Ptolémée

C'est avec Ptolémée que l'astronomie antique va connaître son apogée. Reprenant les travaux de tous ses prédécesseurs, il proposa un système physique et mathématique du Ciel, resté incontesté pendant près d'un millénaire et demi. Il regroupe ses résultats dans *La Grande Syntaxe Mathématique,* plus connue sous le nom de *L'Almageste*. Il reprend le dogme Aristotélicien mais rejette l'idée des sphères emboîtées, et se place dans la continuité d'Appolonius ou d'Hipparque.

Ces scientifiques furent les premiers à remettre en cause des choses que l'on considérait comme acquises. Bien que leurs résultats ne fussent pas tous plus réalistes que ceux des scientifiques les ayant précédés, ils exploitèrent leurs connaissances des phénomènes et arrivèrent à un modèle de l'Univers expliquant parfaitement les mouvements célestes.