Une approche déductive rigoureuse de la géométrie euclidienne élémentaire

Jean-Pierre Demailly

Institut Fourier, Université de Grenoble I, France

15 mars 2010 / Séminaire IREM - Repères / Luminy

Euclide : axiomatisation de la géométrie

8

32. Celle qui a les coftez egaux, mais non les angles droicts, fe nomme Rhombe.
33. Mais celle qui a les coftez oppofez & les angles oppofez egaux, mais n'a pas coftez egaux enfemble ny les angles droicts, fe nomme Rhomboïde.
34. Excepté celle-cy, les figures de quatre coftez fe nomment tablettes ou trapefes.
35. Lignes droictes paralleles font celles, lefquelles eftans en vn mefme plan & menees de part & d'autre ne concourent point enfemble.
36. Parallelogramme, eft vne figure plane contenuë de quatre lignes droictes, defquelles les oppofees font paralleles entr'elles.

S'ENSVIVENT LES DEMANDES, *ou pofitions fimples.*

Demande I.

D'Vn poinct à vn autre poinct mener vne ligne droicte.

2. Continuer vne ligne droicte finietant qu'il en fera befoin.
3. Defcrire vn cercle à l'entour d'vn poinct, & d'vne telle diftance qu'on voudra.

9

COMMVNES SENTENCES.

Premiere.

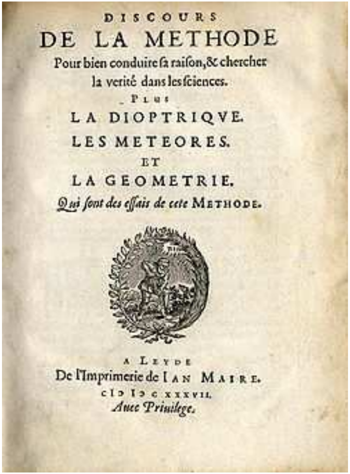
Les chofes egales à vne, font egales entr'elles.

2. Et fi à chofes egales s'adiouftent chofes egales, les toutes feront egales.
3. Et fi de chofes egales, fe leuent chofes egales, les reftes feront egales.
4. Et fi à chofes inegales s'adiouftent chofes egales, les toutes feront inegales.
5. Et fi des chofes inegales fe leuent chofes egales, les reftes feront inegales.
6. Les chofes qui font doubles à vn mefme, font egales entr'elles.
7. Et les chofes qui font moictié d'vne mefme, font egales entr'elles.
8. Et les chofes qui conuiennent enfemble & entre elles, font egales entr'elles.
9. Le tout eft plus grand que fa partie.
10. Tous angles droicts font egaux entr'eux.
11. Si deffus deux lignes droictes tombe vne ligne droicte, faifant les angles dedans d'vne mefme part, plus petits que deux droicts, icelles eftans prolongees infiniment fe rencontreront de la part en laquelle les angles font plus petits que deux droicts.
12. Deux lignes droictes ne comprennent pas vn efpace.

B

Viète et l'algèbre nouvelle

Descartes et la géométrie analytique



DISCOURS
DE LA METHODE
Pour bien conduire sa raison, & chercher
la verité dans les sciences.
PLUS
LA DIOPTRIQVE.
LES METEORES.
ET
LA GEOMETRIE.
Qui sont des essais de cete METHODE.

A LEYDE
De l'Imprimerie de IAN MAIRE.
CIϽ IϽ C XXXVII.
Avec Privilege.

L'axiomatique de Hilbert

LES PRINCIPES FONDAMENTAUX

DE

LA GÉOMÉTRIE

PAR

M. D. HILBERT.

Traduit par L. LAUGEL.

PARIS,

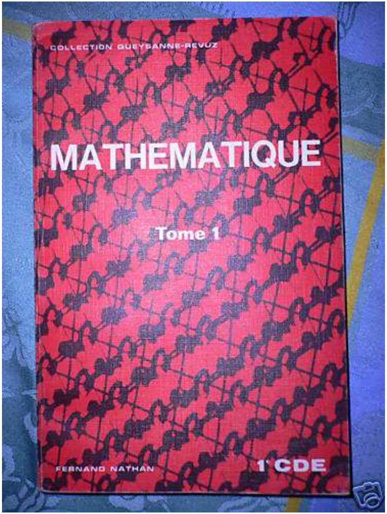
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

Quai des Grands-Augustins, 55.

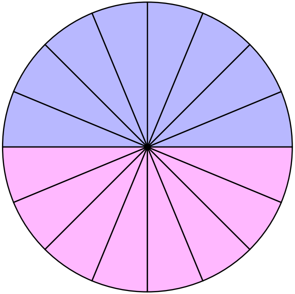
1900

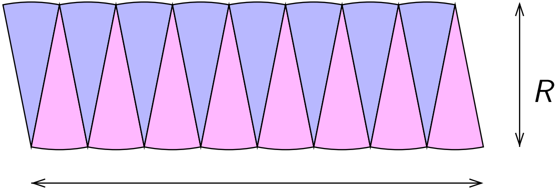
La réforme des mathématiques modernes



Raisonnement : aire du disque (fin primaire)

disque $\qquad\qquad\qquad \rightarrow$ parallélogramme





$$\pi = \frac{P}{D} \Rightarrow P = 2\pi R \qquad\qquad \simeq \frac{P}{2} = \pi R$$

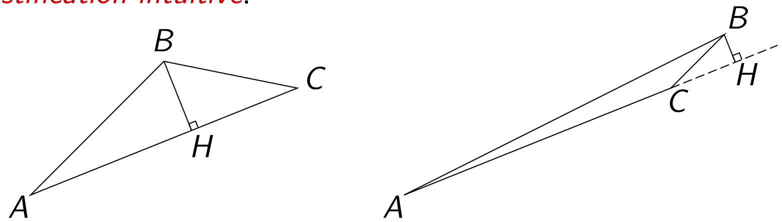
d'où (aire du disque de rayon R) $= \pi R \times R = \pi R^2$.

Une approche basée sur la distance

Notion primitive : la distance $d(A, B) = AB$.

Inégalité triangulaire. *Étant donnés trois points A, B, C, les distances vérifient toujours $AC \leq AB + BC$, autrement dit la longueur d'un côté d'un triangle est toujours inférieure ou égale à la somme des longueurs des deux autres côtés.*

Justification intuitive.



L'hypoténuse est plus grande que les côtés de l'angle droit ...

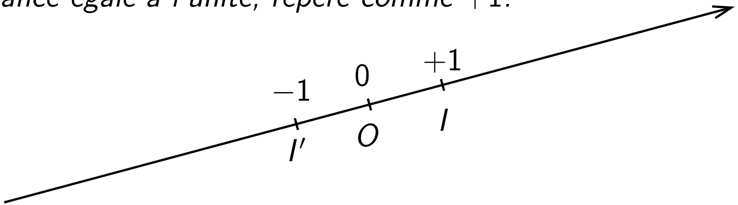
On peut déjà donner des définitions rigoureuses

Segments, droites, demi-droites.

- *Étant donné deux points A, B du plan ou de l'espace, on appelle segment $[A, B]$ d'extrémités A, B l'ensemble des points M tels que $AM + MB = AB$.*
- *On dit que trois points A, B, C sont alignés avec B situé entre A et C si $B \in [A, C]$, et on dit qu'ils sont alignés (sans autre précision) si l'un deux appartient au segment formé par les deux autres.*
- *Étant donné deux points distincts A, B, la droite (AB) est l'ensemble des points M alignés avec A et B ; la demi-droite $[A, B)$ d'origine A contenant B est l'ensemble des points M alignés avec A et B tels que M soit situé entre A et B, ou B entre A et M. Deux demi-droites de même origine sont dites opposées si leur réunion forme une droite.*

Axes : premier lien avec la “géométrie analytique”

Définition. *Un axe est une droite $\mathcal{D}$ muni d'une origine O et d'une orientation, c'est à dire un choix d'un point I situé à une distance égale à l'unité, repéré comme $+1$.*



Abscisse d'un point.
$x_M = +OM$ si $M \in [0, I)$, $\quad x_M = -OM$ si $M \in [0, I')$.

Mesure algébrique. $\overline{AB} = x_B - x_A = \pm AB$.

Relation de Chasles. $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$.
Elle résulte du fait que $(x_B - x_A) + (x_C - x_B) = x_C - x_A$.

Droites, plans, parallélisme.

- *Deux droites $\mathcal{D}$, $\mathcal{D}'$ sont dites concourantes si leur intersection est constituée d'exactement un point.*
- *Un plan $\mathcal{P}$ est un ensemble de points balayé par les droites (UV) telles que U décrit une droite $\mathcal{D}$ et V une droite $\mathcal{D}'$, pour des droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ concourantes données. Si A, B, C sont 3 points non alignés, on note (ABC) le plan associé par exemple aux droites $\mathcal{D} = (AB)$ et $\mathcal{D}' = (AC)$.*
- *Deux droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont dites parallèles si elles sont confondues, ou bien si elles sont contenues dans un même plan $\mathcal{P}$ et ne coupent pas.*

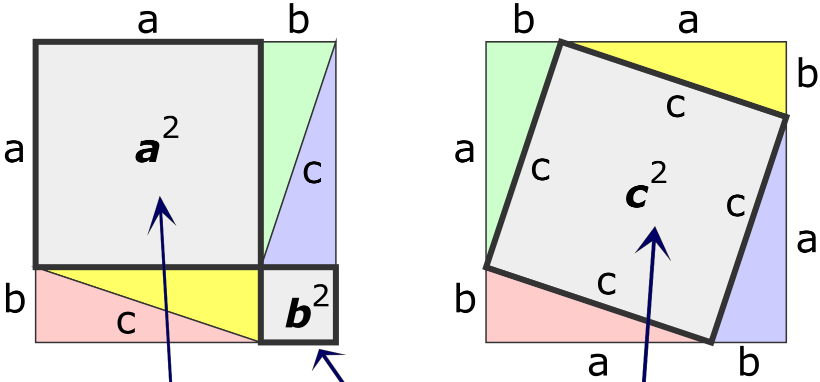
Angles (secteurs angulaires).

- *Un angle aigu* $\widehat{BAC}$ *(ou secteur angulaire aigu) défini par deux demi-droites* $[A, B)$, $[A, C)$ *de même origine et non opposées est l'ensemble balayé par les segments* $[U, V]$ *avec* $U \in [A, B)$ *et* $V \in [A, C)$.
- *Un angle obtus (ou secteur angulaire obtus)* $\overset{\frown}{BAC}$ *est le complémentaire de l'angle aigu* $\widehat{BAC}$ *dans le plan* (ABC), *union les 2 demi-droites* $[A, B)$ *et* $[A, C)$ *comme bord.*
- *Étant donné une droite* $\mathcal{D}$ *et une demi-droite* $[A, M)$ *avec* $A \in \mathcal{D}$ *et* $M \notin \mathcal{D}$, *le demi-plan bordé par* $\mathcal{D}$ *contenant* M *est la réunion de tous les segments* $[U, V]$ *tels que* $U \in \mathcal{D}$ *et* $V \in [A, M)$. *Le demi-plan opposé est celui associé à une demi-droite* $[A, M')$ *opposée à* $[A, M)$. *On parle aussi dans ce cas d'angles plats de sommet* A.

Cercles, arcs, mesures des angles.

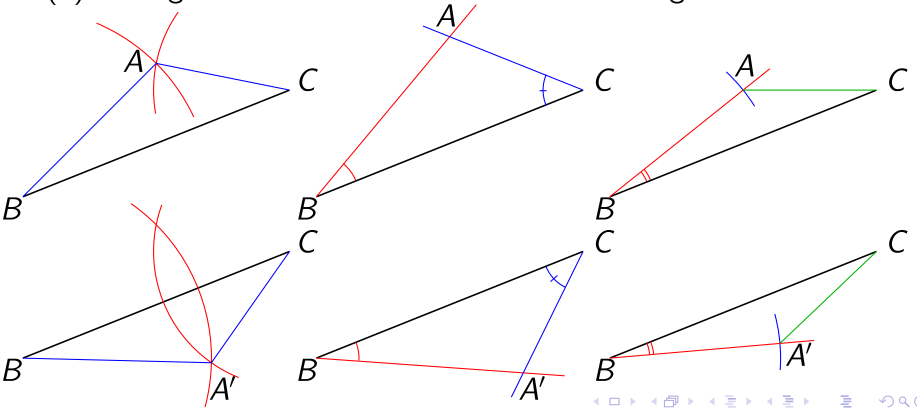
- *Le cercle de centre A et de rayon $R > 0$ est l'ensemble des points M d'un plan $\mathcal{P}$ tels que $d(A, M) = AM = R$.*
- *Un arc de cercle est l'intersection d'un cercle avec un secteur angulaire ayant pour sommet le centre du cercle.*
- *La mesure d'un angle (en degrés) est calculée proportionnellement à la longueur de l'arc de cercle qu'il intercepte sur un cercle dont le centre est le sommet de l'angle, de sorte que le cercle complet corresponde à 360°.*
- *angle plat = angle de mesure 180° (arc = demi-cercle)*
- *angle droit = moitié d'un plat = angle de mesure 90°.*
- *Deux demi-droites de mêmes extrémités sont dites perpendiculaires si elles forment un angle droit.*

Le théorème de Pythagore

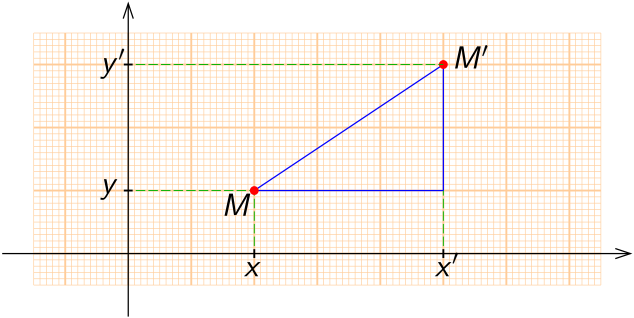


$$a^2 + b^2 = c^2$$

Problème. Construire un triangle ABC ayant une base BC donnée et deux autres éléments donnés, à savoir :
(1) les longueurs des côtés AB et AC,
(2) les mesures des angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{ACB}$,
(3) la longueur du côté AB et la mesure de l’angle $\widehat{ABC}$.

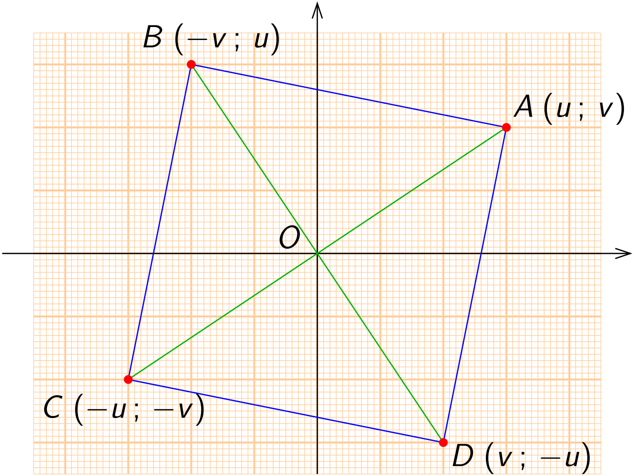


Les coordonnées cartésiennes

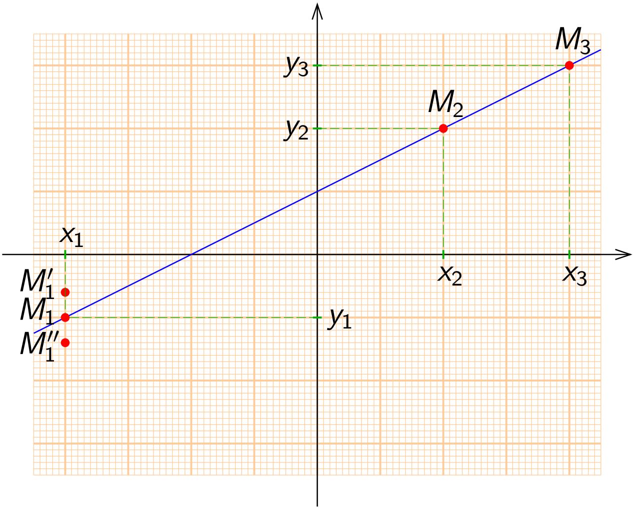


$$d(M, M') = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2}.$$

Le carré en coordonnées cartésiennes



Droite $y = ax + b$



$$M_1M_2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + a^2(x_2 - x_1)^2} = (x_2 - x_1)\sqrt{1 + a^2}.$$

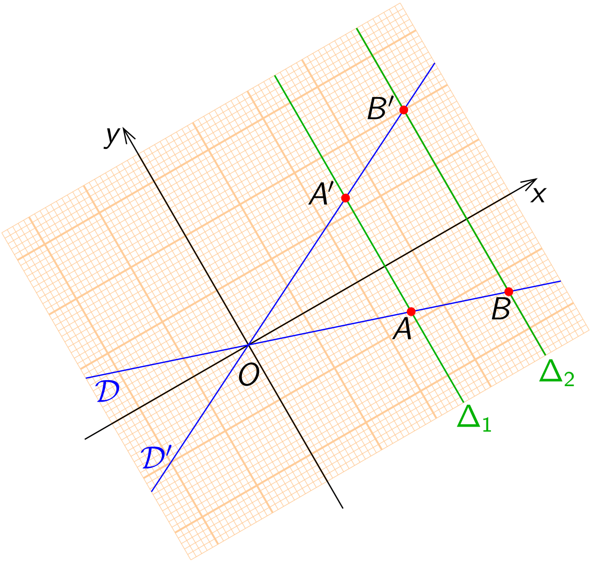
Le théorème de Thalès

$\mathcal{D}\ :\ y = ax$

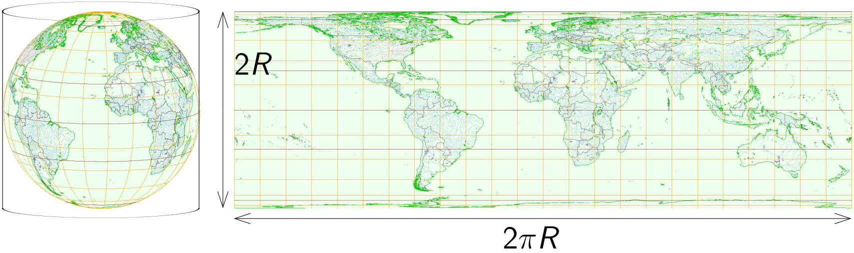
$\mathcal{D}'\ :\ y = a'x$

$\Delta_1\ :\ x = x_1$

$\Delta_2\ :\ x = x_2$



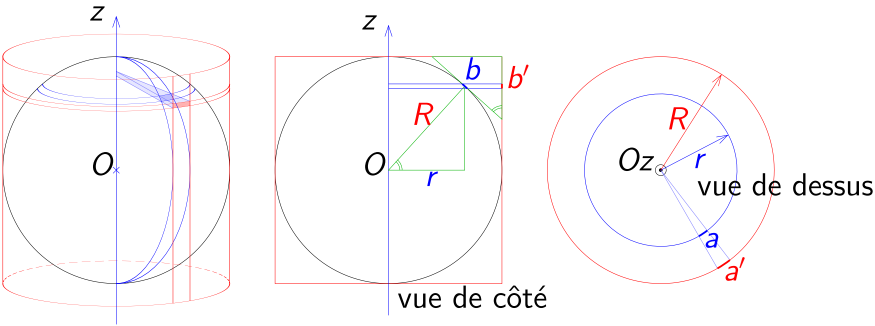
Des preuves riches (vive Archimède ...)



L'aire de la sphère est la même que celle de la carte rectangulaire qui la représente:

$$A = 2R \times 2\pi R = 4\pi R^2.$$

La preuve d'Archimède



$$\frac{b'}{b} = \frac{r}{R} \qquad \frac{a'}{a} = \frac{R}{r}.$$

d'où égalité des aires : $a'b' = ab$.

Une “axiomatique” rigoureuse

Définition. *On appellera plan euclidien un ensemble de points noté $\mathcal{P}$, muni d'une distance d, c'est-à-dire une application*

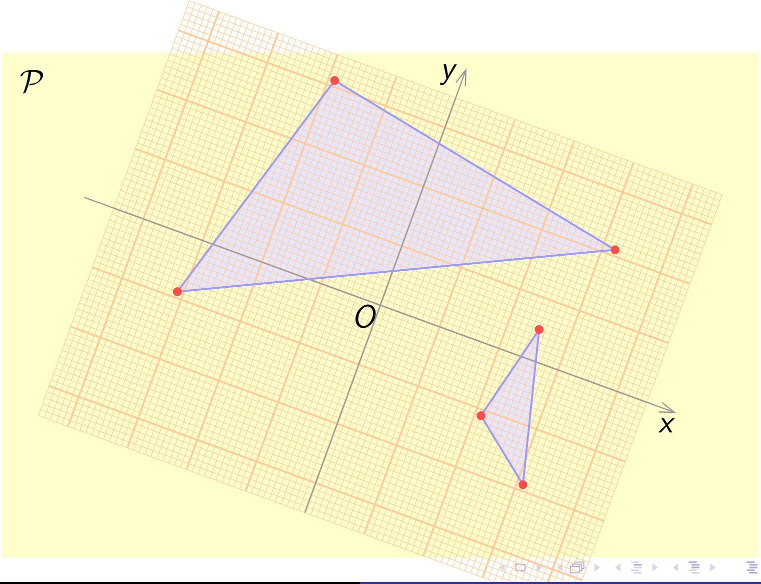
$$d : \mathcal{P} \times \mathcal{P} \to \mathbb{R}_+, \qquad (M, M') \mapsto d(M, M') = MM' \geq 0,$$

de sorte qu'il existe des “systèmes de coordonnées orthonormés” : à tout point $M \in \mathcal{P}$ on peut faire correspondre un couple de coordonnées $(x\,;\,y) \in \mathbb{R}^2$, par une correspondance bijective $M \mapsto (x\,;\,y)$ satisfaisant l'axiome (Pythagore + Descartes)

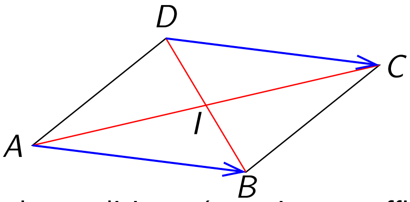
$$d(M, M') = \sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2}$$

pour tous points $M\ (x\,;y)$ et $M'\ (x'\,;\,y')$.

Interprétation géométrique de cette “axiomatique”



Construction des vecteurs



On trouve donc la condition nécessaire et suffisante

$$x_I = \frac{1}{2}(x_B+x_D) = \frac{1}{2}(x_A+x_C), \qquad y_I = \frac{1}{2}(y_B+y_D) = \frac{1}{2}(y_A+y_C),$$

ce qui équivaut encore à

$$x_B + x_D = x_A + x_C, \qquad y_B + y_D = y_A + y_C$$

ou encore à

$$x_B - x_A = x_C - x_D, \qquad y_B - y_A = y_C - y_D,$$

Le produit scalaire

La *norme* $\| \overrightarrow{V} \|$ d'un vecteur $\overrightarrow{V} = \overrightarrow{AB}$ est la longueur $AB = d(A, B)$ d'un bipoint quelconque qui le définit. On pose

$$(1) \qquad \overrightarrow{U} \cdot \overrightarrow{V} = \frac{1}{2}(\| \overrightarrow{U} + \overrightarrow{V} \|^2 - \| \overrightarrow{U} \|^2 - \| \overrightarrow{V} \|^2)$$

de sorte que l'on a en particulier $\overrightarrow{U} \cdot \overrightarrow{U} = \| \overrightarrow{U} \|^2$. Le nombre $\overrightarrow{U} \cdot \overrightarrow{V}$ s'appelle le *produit scalaire* de $\overrightarrow{U}$ et $\overrightarrow{V}$, et $\overrightarrow{U} \cdot \overrightarrow{U}$ s'appelle aussi le carré scalaire de $\overrightarrow{U}$, noté $\overrightarrow{U}^2$. On obtient par conséquent

$$\overrightarrow{U}^2 = \overrightarrow{U} \cdot \overrightarrow{U} = \| \overrightarrow{U} \|^2.$$

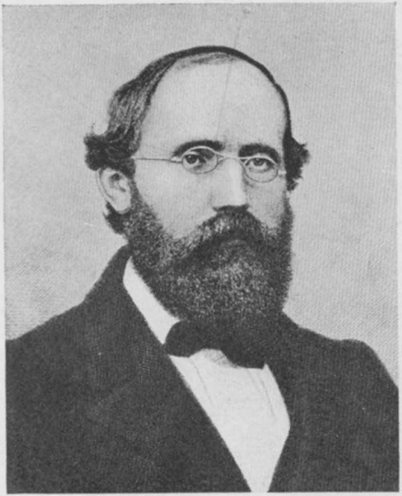
D'après la définition (1), nous avons

$$(2) \qquad \| \overrightarrow{U} + \overrightarrow{V} \|^2 = \| \overrightarrow{U} \|^2 + \| \overrightarrow{V} \|^2 + 2\, \overrightarrow{U} \cdot \overrightarrow{V},$$

ce qui peut se récrire

$$(3) \qquad (\overrightarrow{U} + \overrightarrow{V})^2 = \overrightarrow{U}^2 + \overrightarrow{V}^2 + 2\, \overrightarrow{U} \cdot \overrightarrow{V}.$$

Jusqu'aux travaux de Bernhard Riemann



Bernhard Riemann.

Jusqu'aux travaux de Bernhard Riemann

Une variété riemannienne est par définition une variété différentielle X, c'est-à-dire un espace qui admet localement des systèmes de coordonnées différentiables réelles $x = (x_1\,;\, x_2\,;\, \ldots\,;\, x_n)$, muni d'une métrique infinitésimale g de la forme

$$ds^2 = g(x) = \sum_{1 \le i,j \le n} a_{ij}(x)\, dx_i dx_j.$$

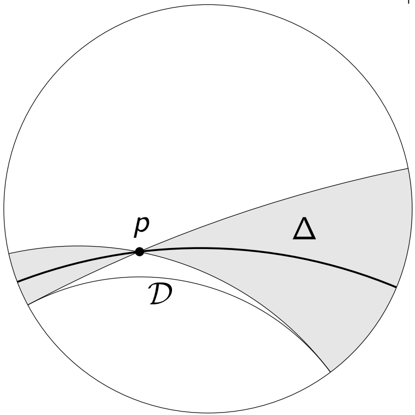
La métrique hyperbolique du disque est donnée par

$$ds^2 = \frac{|dz|^2}{(1-|z|^2)^2} = \frac{dx^2+dy^2}{\big(1-(x^2+y^2)\big)^2}.$$

Elle contredit le "5e postulat" d'Euclide.

Le disque de Poincaré (ou plan hyperbolique)

$$d_P(a,b) = \frac{1}{2}\ln\frac{1+\frac{|b-a|}{|1-\overline{a}b|}}{1-\frac{|b-a|}{|1-\overline{a}b|}}.$$



... aux travaux de Felix Hausdorff

… aux travaux de Felix Hausdorff

Si $(\mathcal{E}, d)$ est un espace métrique quelconque, on définit la mesure de Hausdorff p-dimensionnelle d'une partie A de $\mathcal{E}$ comme

$$\mathcal{H}_{\mathrm{p}}(\mathrm{A}) = \lim_{\varepsilon \to 0} \mathcal{H}_{\mathrm{p},\varepsilon}(\mathrm{A}), \qquad \mathcal{H}_{\mathrm{p},\varepsilon}(\mathrm{A}) = \inf_{\mathrm{diam}\,\mathrm{A_i} \le \varepsilon} \sum_{\mathrm{i}} (\mathrm{diam}\,\mathrm{A_i})^{\mathrm{p}}$$

où $\mathcal{H}_{\mathrm{p},\varepsilon}(\mathrm{A})$ est la borne inférieure des sommes $\sum_{\mathrm{i}} (\mathrm{diam}\,\mathrm{A_i})^{\mathrm{p}}$ étendue à toutes les partitions dénombrables $\mathrm{A} = \bigcup \mathrm{A_i}$ avec $\mathrm{diam}\,\mathrm{A_i} \le \varepsilon$.

Si $(\mathcal{E}, \mathrm{d})$ est un espace métrique quelconque, on définit la mesure de Hausdorff p-dimensionnelle d'une partie A de $\mathcal{E}$ comme

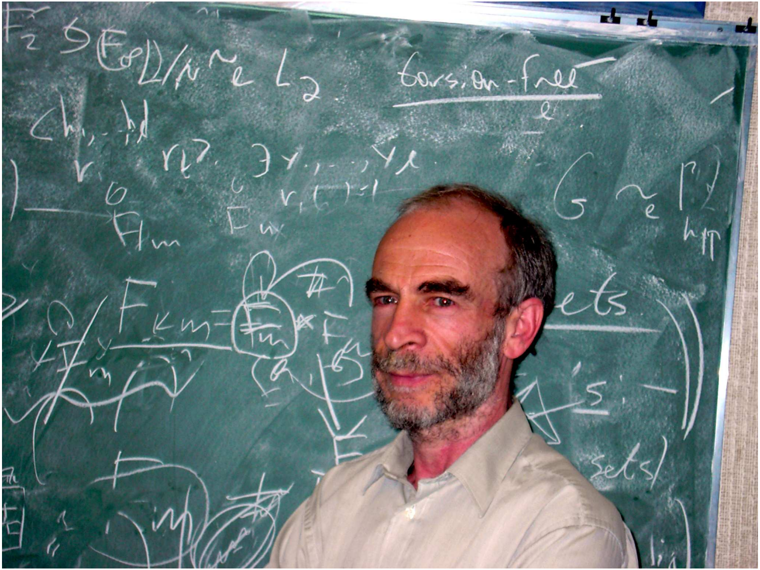
$$\mathcal{H}_{\mathrm{p}}(\mathrm{A}) = \lim_{\varepsilon \to 0} \mathcal{H}_{\mathrm{p},\varepsilon}(\mathrm{A}), \qquad \mathcal{H}_{\mathrm{p},\varepsilon}(\mathrm{A}) = \inf_{\mathrm{diam}\,\mathrm{A_i} \le \varepsilon} \sum_{\mathrm{i}} (\mathrm{diam}\,\mathrm{A_i})^{\mathrm{p}}$$

où $\mathcal{H}_{\mathrm{p},\varepsilon}(\mathrm{A})$ est la borne inférieure des sommes $\sum_{\mathrm{i}} (\mathrm{diam}\,\mathrm{A_i})^{\mathrm{p}}$ étendue à toutes les partitions dénombrables $\mathrm{A} = \bigcup \mathrm{A_i}$ avec $\mathrm{diam}\,\mathrm{A_i} \le \varepsilon$.

Si $(\mathcal{E}, \mathrm{d})$ est un espace métrique et K, L des parties compactes de $\mathcal{E}$, la distance de Hausdorff de K et L est

$$\mathrm{d_H}(\mathrm{K}, \mathrm{L}) = \max \Big\{ \max_{\mathrm{x} \in \mathrm{K}} \min_{\mathrm{y} \in \mathrm{L}} \mathrm{d}(\mathrm{x}, \mathrm{y}), \max_{\mathrm{y} \in \mathrm{L}} \min_{\mathrm{x} \in \mathrm{K}} \mathrm{d}(\mathrm{x}, \mathrm{y}) \Big\}.$$

... et de Mikhail Gromov



Un espace de longueurs est un espace métrique $(\mathcal{E}, \mathrm{d})$ tel que pour tous points A, B il existe un point “milieu” I tel que $\mathrm{d}(\mathrm{A}, \mathrm{I}) = \mathrm{d}(\mathrm{I}, \mathrm{B}) = \frac{1}{2}\mathrm{d}(\mathrm{A}, \mathrm{B})$. Si l’espace $\mathcal{E}$ est complet, on peut alors construire un chemin γ d’extrémités A, B tel que $\mathrm{d}(\mathrm{A}, \gamma(\mathrm{t})) = (1 - \mathrm{t})\mathrm{d}(\mathrm{A}, \mathrm{B})$ et $\mathrm{d}(\gamma(\mathrm{t}), \mathrm{B}) = \mathrm{t}\, \mathrm{d}(\mathrm{A}, \mathrm{B})$ pour tout $\mathrm{t} \in [0, 1]$.

... et de Mikhail Gromov

Un espace de longueurs est un espace métrique $(\mathcal{E}, \mathrm{d})$ tel que pour tous points A, B il existe un point "milieu" I tel que $\mathrm{d}(\mathrm{A}, \mathrm{I}) = \mathrm{d}(\mathrm{I}, \mathrm{B}) = \frac{1}{2}\mathrm{d}(\mathrm{A}, \mathrm{B})$. Si l'espace $\mathcal{E}$ est complet, on peut alors construire un chemin γ d'extrémités A, B tel que $\mathrm{d}(\mathrm{A}, \gamma(\mathrm{t})) = (1 - \mathrm{t})\mathrm{d}(\mathrm{A}, \mathrm{B})$ et $\mathrm{d}(\gamma(\mathrm{t}), \mathrm{B}) = \mathrm{t}\,\mathrm{d}(\mathrm{A}, \mathrm{B})$ pour tout $\mathrm{t} \in [0, 1]$.

si X et Y sont deux espaces métriques compacts, leur distance de Gromov-Hausdorff $\mathrm{d}_{\mathrm{GH}}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$ est l'inf des distances de Hausdorff $\mathrm{d}_{\mathrm{H}}(\mathrm{f}(\mathrm{X}), \mathrm{g}(\mathrm{Y}))$ pour tous les plongements isométriques possibles $\mathrm{f} : \mathrm{X} \to \mathcal{E}$, $\mathrm{g} : \mathrm{Y} \to \mathcal{E}$ de X et Y dans un même espace métrique compact $\mathcal{E}$.