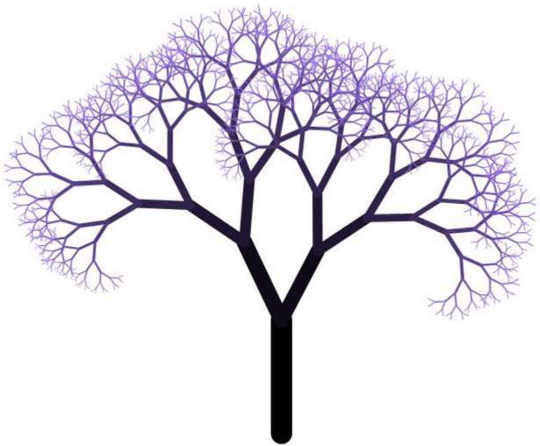
# Ensembles fractals, mesure et dimension

Jean-Pierre Demailly

Institut Fourier, Université de Grenoble I, France
& Académie des Sciences de Paris

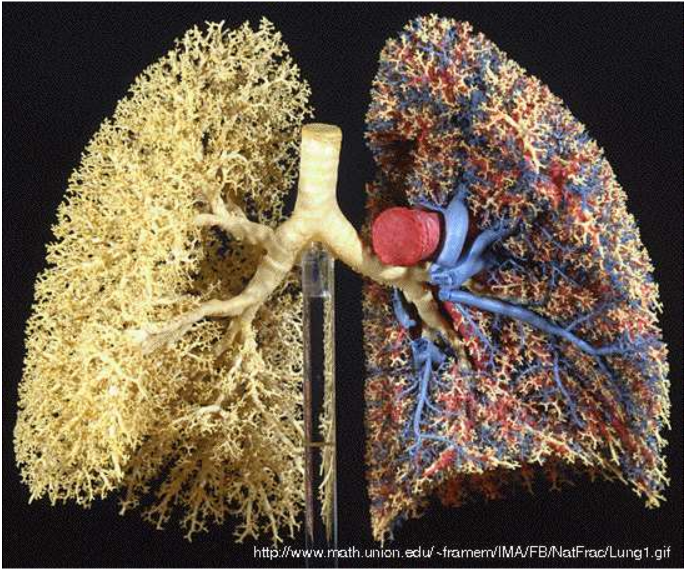
11 avril 2013
Conférence au Lycée Portes de l'Oisans, Vizille

# Les fractales sont partout : arbres ...



fractale pouvant être obtenue comme un "système de Lindenmayer"

# Poumons ...



# Chou broccoli Romanesco ...

# Notion de dimension

La dimension d'un espace (ensemble de points dans lequel on se place) est classiquement le nombre de coordonnées nécessaires pour repérer un point de cet espace. C'est donc a priori un nombre entier. On va introduire ici une notion plus générale, qui conduit à des dimensions parfois non entières.

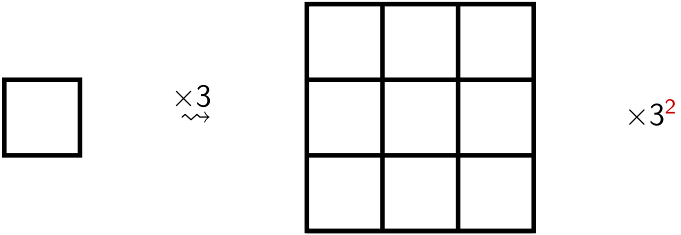
## Objet de dimension 1


Par une homothétie de rapport 3, la mesure (longueur) est multipliée par $3 = 3^1$, l'objet résultant contient 3 fois l'objet initial.

La dimension d'un segment est 1.

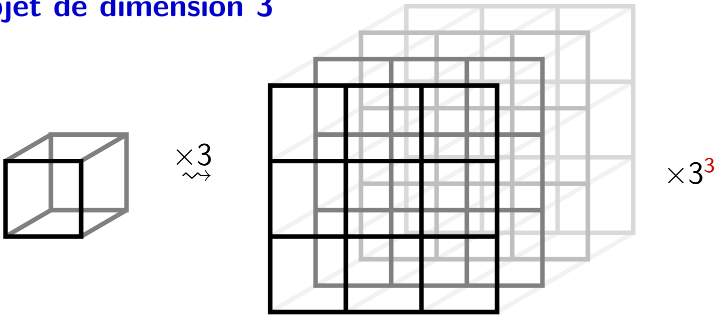
# Dimension 2 ...

## Objet de dimension 2




Par une homothétie de rapport 3, la mesure (aire) de l'objet est multipliée par $9 = 3^{2}$, l'objet résultant contient 9 fois l'objet initial. La dimension du carré est 2.

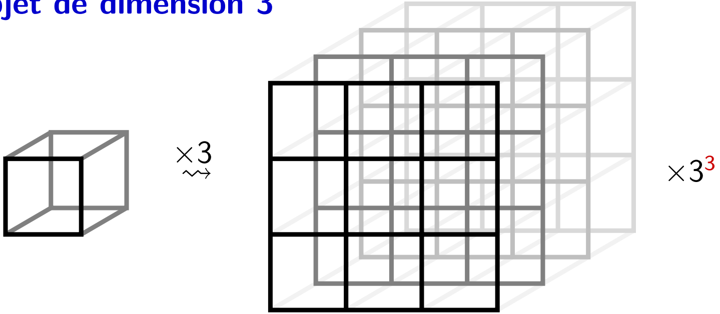
## Objet de dimension 3




Par une homothétie de rapport 3, la mesure (volume) de l'objet est multipliée par $27 = 3^3$, l'objet résultant contient 27 fois l'objet initial. La dimension du cube est 3.

# Dimension $d \geq 3$ ...

## Objet de dimension 3

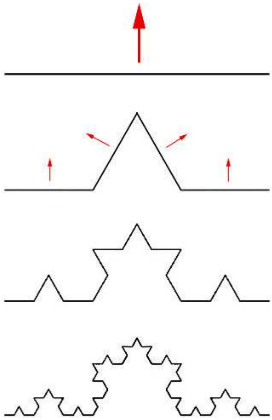


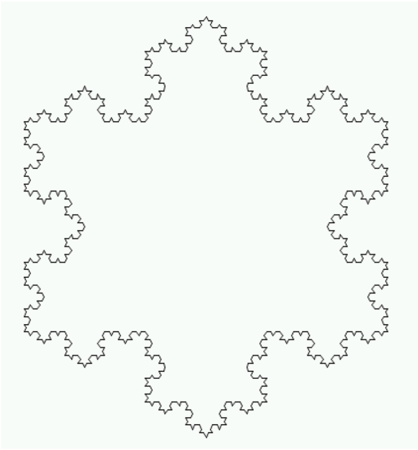

Par une homothétie de rapport 3, la mesure (volume) de l'objet est multipliée par $27 = 3^3$, l'objet résultant contient 27 fois l'objet initial. La dimension du cube est 3.

En généralisant, pour un objet de dimension $d$, l'effet d'une homothétie de rapport $\lambda$ est de *multiplier la mesure par* $\lambda^d$.

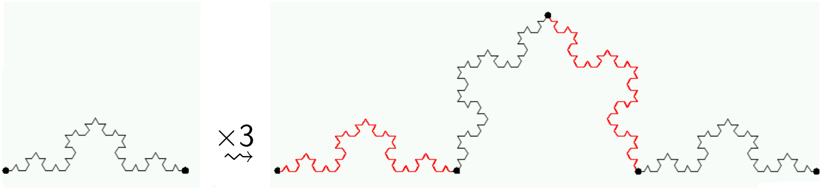
# Qu'en est-il d'un ensemble fractal ?

Prenons l'exemple de la courbe de Koch (ou flocon de neige) obtenue par itération du procédé ci-contre





# Effet d'une homothétie de rapport 3




Par une homothétie de rapport 3, l'objet devient un objet de nature identique, contenant 4 morceaux de même taille que l'objet initial, donc de mesure 4 fois plus grande. Ceci conduit à poser

$$3^d = 4 \quad \Longrightarrow \quad d = \log_3(4) = 1,26185950714\ldots$$

Il nous faut admettre ici que la dimension n'est pas un entier, mais un nombre compris strictement entre 1 et 2 !

# Définition des logarithmes

- **En base 10**

  On a $10^3 = 1000$ : on écrit $\log_{10}(1000) = 3$

  On a $10^4 = 10000$ : on écrit $\log_{10}(1000) = 4$

  On a $10^{-2} = 0,01$ : on écrit $\log_{10}(0,01) = -2$

# Définition des logarithmes

- **En base 10**

  On a $10^3 = 1000$ : on écrit $\log_{10}(1000) = 3$
  On a $10^4 = 10000$ : on écrit $\log_{10}(1000) = 4$
  On a $10^{-2} = 0,01$ : on écrit $\log_{10}(0,01) = -2$

- **En base $a$**

  Si $a^p = x$, on écrit $\log_a(x) = p$.
  Si $a^q = y$, alors $xy = a^p \times a^q = a^{p+q}$, donc :
  $\log_a(xy) = p + q = \log_a(x) + \log_a(y)$.
  En particulier $\log_a(x^2) = \log_a(xx) = 2\log_a(x)$
  $\log_a(x^p) = \log_a(xx \ldots x) = p\log_a(x)$.

# Définition des logarithmes

- **En base 10**
  On a $10^3 = 1000$ : on écrit $\log_{10}(1000) = 3$
  On a $10^4 = 10000$ : on écrit $\log_{10}(1000) = 4$
  On a $10^{-2} = 0,01$ : on écrit $\log_{10}(0,01) = -2$
- **En base *a***
  Si $a^p = x$, on écrit $\log_a(x) = p$.
  Si $a^q = y$, alors $xy = a^p \times a^q = a^{p+q}$, donc :
  $\log_a(xy) = p + q = \log_a(x) + \log_a(y)$.
  En particulier $\log_a(x^2) = \log_a(xx) = 2\log_a(x)$
  $\log_a(x^p) = \log_a(xx\ldots x) = p\log_a(x)$.
- On a $\log_a(\sqrt{x}) = \frac{1}{2}\log_a(x)$, plus généralement
  $\log_a(\sqrt[p]{x}) = \frac{1}{p}\log_a(x)$.

# Définition des logarithmes (suite)

On a

$$(x^p)^q = x^p \times \ldots \times x^p \ (q \text{ fois}) = x^{pq}.$$

Donc $(x^{1/p})^p = x^{(1/p)\times p} = x^1 = x$, c'est-à-dire

$$x^{1/p} = \sqrt[p]{x}.$$

# Définition des logarithmes (suite)

On a

$$(x^p)^q = x^p \times \ldots \times x^p \ (q \text{ fois}) = x^{pq}.$$

Donc $(x^{1/p})^p = x^{(1/p)\times p} = x^1 = x$, c'est-à-dire

$$x^{1/p} = \sqrt[p]{x}.$$

On calcule ainsi

$3^{0.5} = 3^{1/2} = \sqrt{3} \simeq 1,732$,

$3^{0.25} = 3^{1/4} = \sqrt[4]{3} = \sqrt{\sqrt{3}} \simeq 1,316$,

$3^{1.25} = 3^1 \times 3^{0.25} \simeq 3 \times 1,316 = 3,948$.

# Définition des logarithmes (suite)

On a

$$(x^p)^q = x^p \times \ldots \times x^p \text{ ($q$ fois)} = x^{pq}.$$

Donc $(x^{1/p})^p = x^{(1/p)\times p} = x^1 = x$, c'est-à-dire

$$x^{1/p} = \sqrt[p]{x}.$$

On calcule ainsi

$3^{0.5} = 3^{1/2} = \sqrt{3} \simeq 1,732$,
$3^{0.25} = 3^{1/4} = \sqrt[4]{3} = \sqrt{\sqrt{3}} \simeq 1,316$,
$3^{1.25} = 3^1 \times 3^{0.25} \simeq 3 \times 1,316 = 3,948$.

On en conclut que $\log_3(4)$ est un peu supérieur à $1,25$. En fait $\log_3(4) = 1,26185950714\ldots$

# Définition des logarithmes (suite)

On a

$$(x^p)^q = x^p \times \ldots \times x^p \text{ } (q \text{ fois}) = x^{pq}.$$

Donc $(x^{1/p})^p = x^{(1/p)\times p} = x^1 = x$, c'est-à-dire

$$x^{1/p} = \sqrt[p]{x}.$$

On calcule ainsi

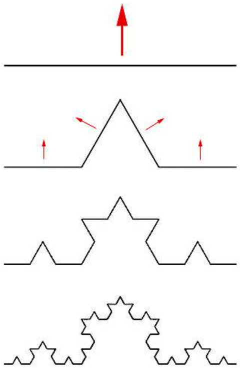
$3^{0.5} = 3^{1/2} = \sqrt{3} \simeq 1,732$,
$3^{0.25} = 3^{1/4} = \sqrt[4]{3} = \sqrt{\sqrt{3}} \simeq 1,316$,
$3^{1.25} = 3^1 \times 3^{0.25} \simeq 3 \times 1,316 = 3,948$.

On en conclut que $\log_3(4)$ est un peu supérieur à $1,25$. En fait $\log_3(4) = 1,26185950714\ldots$

Formule générale avec les calculettes :

$$\log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}.$$

# Longueur de la courbe de Koch



$\ell = 1$

$\ell = 4 \times 1/3 = 4/3$

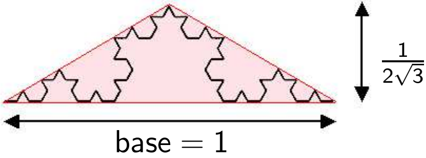
$\ell = (4/3) \times (4/3) = (4/3)^2$

$\ell = (4/3)^3$

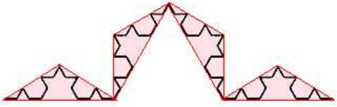
À chaque itération, la longueur est multipliée par $4/3$, donc si le segment initial est pris pour unité, la longueur de la $n$-ième itération est $(4/3)^n$, ce qui tend vers l'infini quand $n \to +\infty$. La longueur de la courbe de Koch est donc infinie !

# Aire de la courbe de Koch

La courbe de Koch est entièrement contenue dans le triangle isocèle figuré ci-dessous (raisonnement par récurrence).



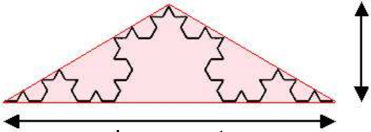

$$\text{aire} = \alpha = \frac{1}{4\sqrt{3}} \simeq 0.1443\ldots$$



$$\text{aire} = 4 \times \frac{\alpha}{9} = \frac{4}{9}\alpha$$

# Aire de la courbe de Koch

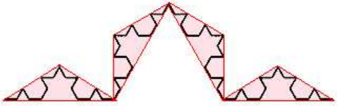
La courbe de Koch est entièrement contenue dans le triangle isocèle figuré ci-dessous (raisonnement par récurrence).



$\frac{1}{2\sqrt{3}}$

base $= 1$

$$\text{aire} = \alpha = \frac{1}{4\sqrt{3}} \simeq 0.1443\ldots$$

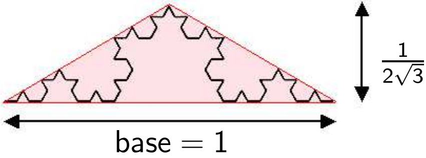


$$\text{aire} = 4 \times \frac{\alpha}{9} = \tfrac{4}{9}\alpha$$

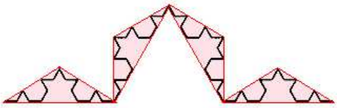
Par récurrence sur le nombre d'itérations, on voit que la courbe de Koch est contenue dans la réunion de $4^n$ triangles isocèles d'aire $\alpha/9^n$, l'aire totale $(4/9)^n\alpha$ tend vers 0.

# Aire de la courbe de Koch

La courbe de Koch est entièrement contenue dans le triangle isocèle figuré ci-dessous (raisonnement par récurrence).




$$\text{aire} = \alpha = \frac{1}{4\sqrt{3}} \simeq 0.1443\ldots$$



$$\text{aire} = 4 \times \frac{\alpha}{9} = \tfrac{4}{9}\alpha$$

Par récurrence sur le nombre d'itérations, on voit que la courbe de Koch est contenue dans la réunion de $4^n$ triangles isocèles d'aire $\alpha/9^n$, l'aire totale $(4/9)^n\alpha$ tend vers $0$.

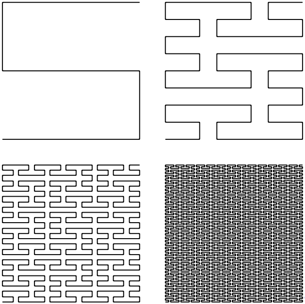
L'aire de la courbe de Koch est donc nulle !

# La courbe de Peano

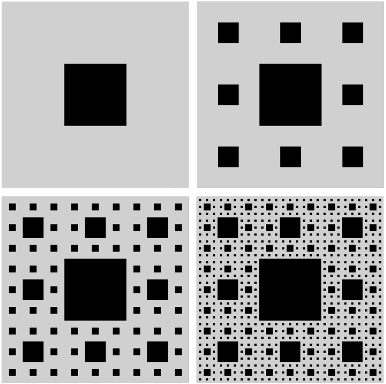
Il existe cependant des courbes continues d'aire non nulle, même si on les trace avec un crayon infiniment fin !

Voici une courbe imaginée en 1890 par le mathématicien italien Giuseppe Peano (1858-1932), en utilisant l'écriture des réels en base 3

$$[0,1] \ni t = 0.a_1 a_2 a_3 \ldots = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n 3^{-n}, \quad a_n = 0,1,2$$

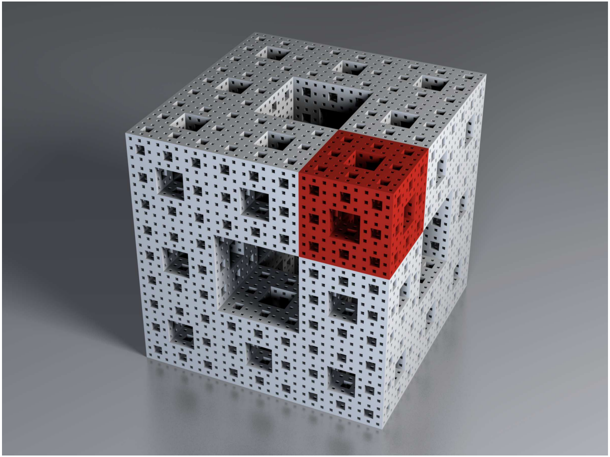


du nom du mathématicien polonais Wacław Sierpiński (1882-1969).



**Exercice :** la dimension (partie grise) est $d = \log_3(8) \simeq 1,892789...$, l'aire est nulle.

# L'éponge de Menger



Sa dimension est $d = \log_3(20) \simeq 2,726833...$
et son volume est nul.

# Mesure $d$-dimensionnelle de Hausdorff

Félix Hausdorff (1868-1942)
fondateur de la
topologie moderne

Les notions de longueur ($d = 1$), d'aire ($d = 2$), de volume ($d = 3$) se se généralisent en dimension $d > 0$ quelconque : on définit la mesure de Hausdorff $d$-dimensionnelle d'une partie $A$ de l'espace par

$$\mathcal{H}_d(A) = \lim_{\varepsilon \to 0} \mathcal{H}_{d,\varepsilon}(A), \quad \mathcal{H}_{d,\varepsilon}(A) = \inf \sum_i (\mathrm{diam}\, A_i)^d$$

où $A = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i$ avec $\mathrm{diam}\, A_i \leq \varepsilon$.

# Nombres complexes

Dans $\mathbb{R}$, $-1$ n'a pas de racine carrée,
car $x^2 \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

# Nombres complexes

Dans $\mathbb{R}$, $-1$ n'a pas de racine carrée,
car $x^2 \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Alors les mathématiciens du 16ème siècle en ont inventé une !!
On définit $i = \sqrt{-1}$ $(i \notin \mathbb{R})$, et on a donc $i \times i = -1$.

# Nombres complexes

Dans $\mathbb{R}$, $-1$ n'a pas de racine carrée,
car $x^2 \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Alors les mathématiciens du 16ème siècle en ont inventé une !!
On définit $i = \sqrt{-1} \quad (i \notin \mathbb{R})$, et on a donc $i \times i = -1$.

On calcule facilement avec les complexes :

- Addition/soustraction

$$(-2{,}5 + 3i) - (4 + 5i) = -6{,}5 - 2i$$

# Nombres complexes

Dans $\mathbb{R}$, $-1$ n'a pas de racine carrée,
car $x^2 \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Alors les mathématiciens du 16ème siècle en ont inventé une !!
On définit $i = \sqrt{-1}$ $\quad (i \notin \mathbb{R})$, et on a donc $i \times i = -1$.

On calcule facilement avec les complexes :

- Addition/soustraction

$$(-2{,}5 + 3i) - (4 + 5i) = -6{,}5 - 2i$$

- Multiplication

$$\begin{aligned}(2+3i)(5+7i) &= 2 \times 5 + 3i \times 5 + 2 \times 7i + 3i \times 7i \\ &= 10 + 15i + 14i + 21i^2 = 10 + 29i - 21 \\ &= -11 + 29i\end{aligned}$$

# Nombres complexes

Dans $\mathbb{R}$, $-1$ n'a pas de racine carrée,
car $x^2 \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Alors les mathématiciens du 16ème siècle en ont inventé une !!
On définit $i = \sqrt{-1}$ $\quad (i \notin \mathbb{R})$, et on a donc $i \times i = -1$.

On calcule facilement avec les complexes :

- Addition/soustraction

$$(-2{,}5 + 3i) - (4 + 5i) = -6{,}5 - 2i$$

- Multiplication

$$\begin{aligned}(2+3i)(5+7i) &= 2 \times 5 + 3i \times 5 + 2 \times 7i + 3i \times 7i \\ &= 10 + 15i + 14i + 21i^2 = 10 + 29i - 21 \\ &= -11 + 29i\end{aligned}$$

On note $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes.

# Itération d'un polynôme du second degré dans $\mathbb{C}$

Dans le plan complexe $\mathbb{C}$, on regarde la fonction polynôme

$$P_c : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \qquad P_c(z) = z^2 + c \quad \text{où } c \text{ est un paramètre,}$$

par exemple $c = 0{,}3 + 0{,}4i$.

On prend un point $z_0 \in \mathbb{C}$ quelconque, et on calcule les "itérés"

$z_1 = z_0^2 + c$

$z_2 = z_1^2 + c$

...

$z_{n+1} = z_n^2 + c$

# Itération d'un polynôme du second degré dans $\mathbb{C}$

Dans le plan complexe $\mathbb{C}$, on regarde la fonction polynôme

$$P_c : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \qquad P_c(z) = z^2 + c \quad \text{où } c \text{ est un paramètre,}$$

par exemple $c = 0{,}3 + 0{,}4i$.

On prend un point $z_0 \in \mathbb{C}$ quelconque, et on calcule les "itérés"

$z_1 = z_0^2 + c$

$z_2 = z_1^2 + c$

$\ldots$

$z_{n+1} = z_n^2 + c$

Par exemple, si $c = 0$, on a

$$z_1 = z_0^2, \quad z_2 = z_1^2 = z_0^4, \quad z_3 = z_2^2 = z_0^8, \quad \ldots, z_n = z_0^{2^n}.$$

Si $z_0$ est petit, $z_0^{2^n}$ devient de plus en plus petit, tandis que si $z_0$ est grand, $z_0^{2^n}$ devient de plus en plus grand.

# Ensemble de Julia

On introduit par définition :

**Ensemble de Julia de $P_c$.**

*On appelle ensemble de Julia rempli $K_c$ l'ensemble des points initiaux $z_0$ tels que la suite $(z_n)$ reste bornée, et ensemble de Julia le bord $J_c = \partial K_c$ de l'ensemble de Julia rempli $K_c$.*

# Ensemble de Julia

On introduit par définition :

**Ensemble de Julia de $P_c$.**

*On appelle ensemble de Julia rempli $K_c$ l'ensemble des points initiaux $z_0$ tels que la suite $(z_n)$ reste bornée, et ensemble de Julia le bord $J_c = \partial K_c$ de l'ensemble de Julia rempli $K_c$.*

Si $z = x + iy \in \mathbb{C}$, on pose $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$, et on montre que

$$|z_1 z_2| = |z_1||z_2|.$$

Si $c = 0$, on a simplement $z_n = z_0^{2^n}$, donc $|z_n| = |z_0|^{2^n}$.

Si $|z_0| < 1$, on a $|z_0^{2^n}| \to 0$ quand $n \to +\infty$,

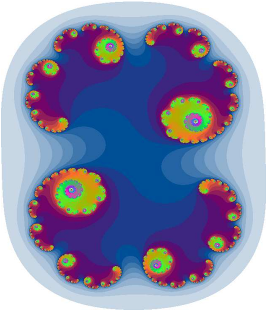
Si $|z_0| > 1$, on a $|z_0^{2^n}| \to \infty$ quand $n \to +\infty$,

On voit que $K_0$ consiste en le disque unité fermé $|z| \leq 1$, et que $J_0$ est le cercle unité.

# Ensemble de Julia (suite)

Pour toute valeur complexe $c \neq 0$ on obtient en fait un ensemble fractal. Voici par exemple une image de $J_c$ et $K_c$ pour la valeur $c = 0,328075517 + 0,022051744\,i$ du paramètre :

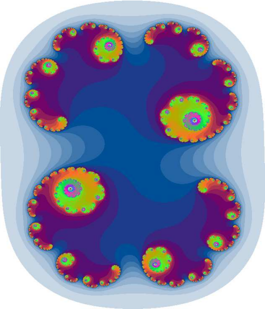
$K_c$



# Ensemble de Julia (suite)

Pour toute valeur complexe $c \neq 0$ on obtient en fait un ensemble fractal. Voici par exemple une image de $J_c$ et $K_c$ pour la valeur $c = 0,328075517 + 0,022051744\,i$ du paramètre :

$K_c$



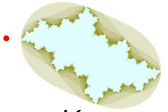
Gaston Julia (1893-1978)

# Ensemble de Mandelbrot

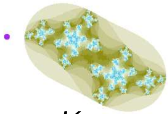
Mathématicien franco-américain Benoît Mandelbrot (1924-2010).

## Ensemble de Mandelbrot

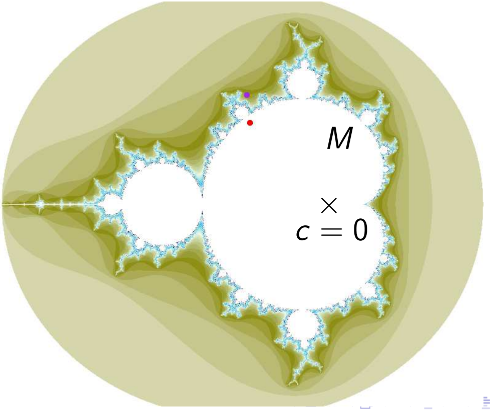
*C'est l'ensemble $M$ des valeurs complexes $c$ du paramètre telles que l'ensemble de Julia $K_c$ associé à $P_c$ soit connexe.*



$K_c$

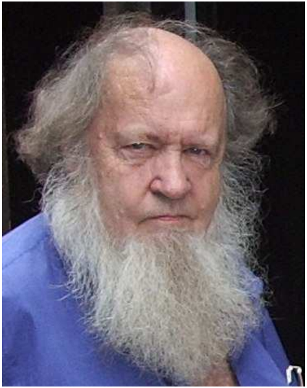


$K_{c'}$



# Dynamiciens célèbres ...

Benoît Mandelbrot (1924-2010)



Adrien Douady (1935-2006)

# Un ensemble fractal de dimension 3 : le Mandelbulbe de degré $p = 8$

# L'équation du Mandelbulbe de degré $p$

White et Nylander ont donné la formule suivante en coordonnées sphériques dans $\mathbb{R}^3$

$$\langle x, y, z\rangle^p = r^p \langle \cos(p\theta)\cos(p\phi), \sin(p\theta)\cos(p\phi), \sin(p\phi)\rangle$$

$$\text{où} \quad \begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \\ \theta = \arctan(y/x) \\ \text{et } \phi = \arctan(z/\sqrt{x^2+y^2}) = \arcsin(z/r). \end{cases}$$

pour la $p$-ième puissance du nombre hypercomplexe 3D.

# L'équation du Mandelbulbe de degré $p$

White et Nylander ont donné la formule suivante en coordonnées sphériques dans $\mathbb{R}^3$

$$\langle x, y, z\rangle^p = r^p \langle \cos(p\theta)\cos(p\phi), \sin(p\theta)\cos(p\phi), \sin(p\phi)\rangle$$

$$\text{où} \quad \begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \\ \theta = \arctan(y/x) \\ \text{et } \phi = \arctan(z/\sqrt{x^2+y^2}) = \arcsin(z/r). \end{cases}$$

pour la $p$-ième puissance du nombre hypercomplexe 3D.

Comme pour l'ensemble de Mandelbrot plan, on regarde les domaines de convergences des suites obtenues par itération de $w \mapsto w^p + c$ où $w$ et $c$ sont des nombres "hypercomplexes" $w = \langle x, y, z\rangle$ dans $\mathbb{R}^3$ et $w \mapsto w^p$ l'application définie ci-dessus

http://www.skytopia.com/project/fractal/2mandelbulb.html

# Logiciels / références utilisés

- Logiciel de présentation : LaTeX Beamer
  texlive : http://www.tug.org/texlive/
- Systèmes de Lindenmayer :
  lsysexp : http://www.sourcefiles.org/Graphics/Fractals/lsysexp-latest.tar.gz
  xfractint : http://www.fractint.org/ftp/current
- Fractales :
  xfractint et
  xaos : http://wmi.math.u-szeged.hu/xaos/doku.php
  mandelbulber : http://sourceforge.net/projects/mandelbulber/
- Images et photographies : Wikipedia