



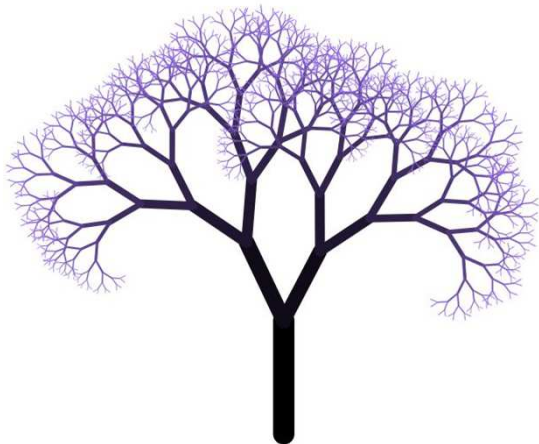
Ensembles fractals, mesure et dimension

Jean-Pierre Demailly

Institut Fourier, Université de Grenoble I, France
& Académie des Sciences de Paris

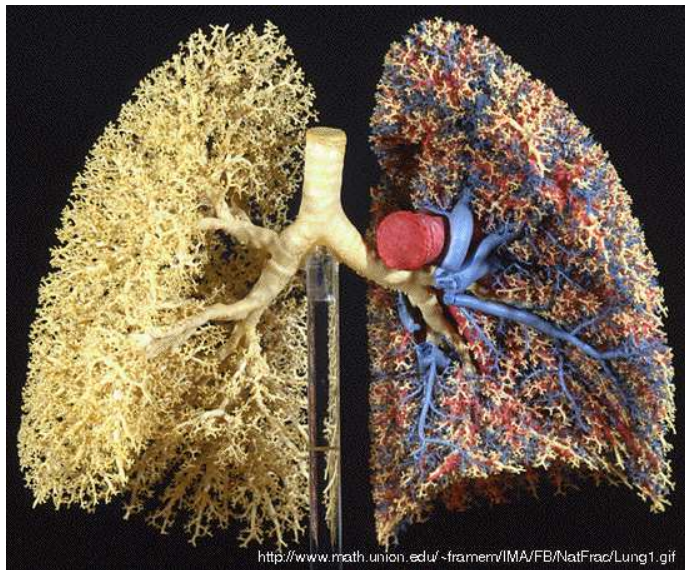
23 novembre 2012
Conférence au Lycée René Perrin, Ugine

Les fractales sont partout : arbres ...



fractale pouvant être obtenue comme un
"système de Lindenmayer"

Poumons ...



Chou broccoli Romanesco ...



Notion de dimension

La dimension d'un espace (ensemble de points dans lequel on se place) est classiquement le **nombre de coordonnées** nécessaires pour repérer un point de cet espace. C'est donc a priori un **nombre entier**. On va introduire ici une notion plus générale, qui conduit à des dimensions parfois non entières.

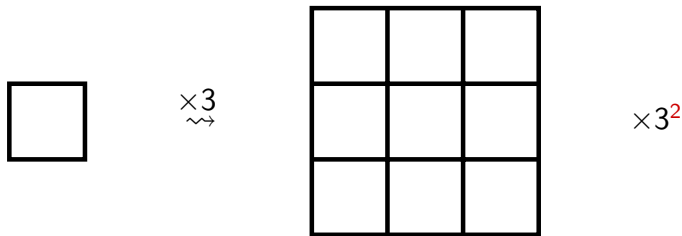
Objet de dimension 1



Par une homothétie de rapport 3, la mesure (longueur) est multipliée par $3 = 3^1$, l'objet résultant contient 3 fois l'objet initial.

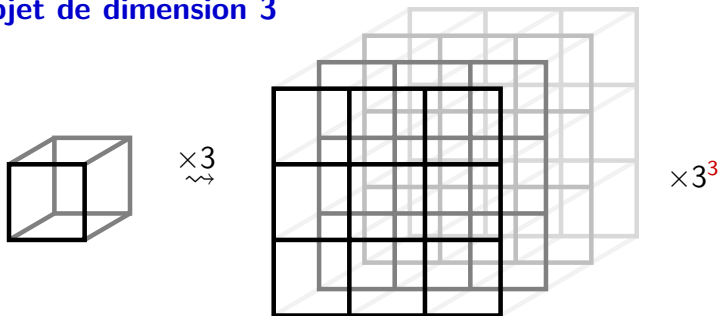
La dimension d'un segment est 1.

Objet de dimension 2



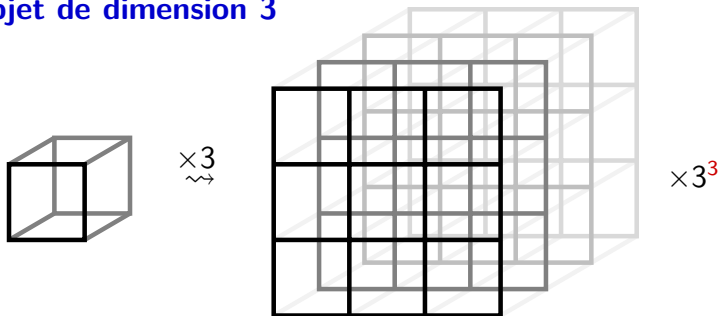
Par une homothétie de rapport 3, la mesure (aire) de l'objet est multipliée par $9 = 3^2$, l'objet résultant contient 9 fois l'objet initial. La dimension du carré est 2 .

Objet de dimension 3



Par une homothétie de rapport 3, la mesure (volume) de l'objet est multipliée par $27 = 3^3$, l'objet résultant contient 27 fois l'objet initial. La dimension du cube est 3.

Objet de dimension 3

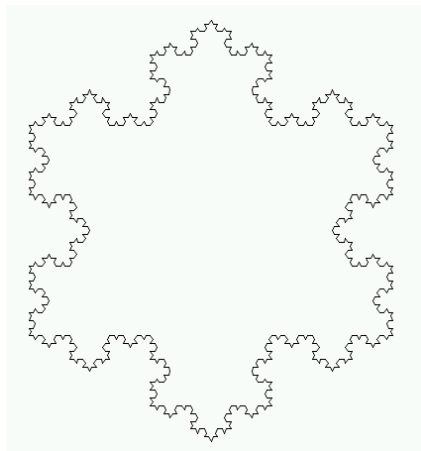
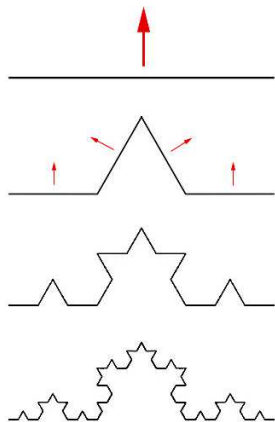


Par une homothétie de rapport 3, la mesure (volume) de l'objet est multipliée par $27 = 3^3$, l'objet résultant contient 27 fois l'objet initial. La dimension du cube est 3.

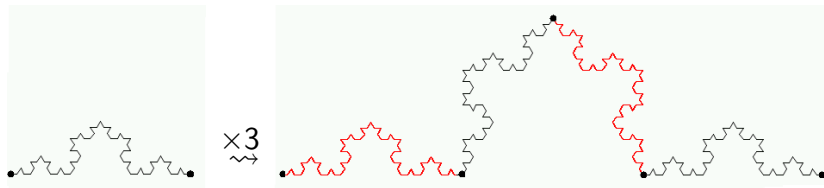
En généralisant, pour un objet de dimension d , l'effet d'une homothétie de rapport λ est de multiplier la mesure par λ^d .

Qu'en est-il d'un ensemble fractal ?

Prenons l'exemple de la courbe de Koch (ou flocon de neige) obtenue par itération du procédé ci-contre



Effet d'une homothétie de rapport 3



Par une homothétie de rapport 3, l'objet devient un objet de nature identique, contenant 4 morceaux de même taille que l'objet initial, donc de mesure 4 fois plus grande. Ceci conduit à poser

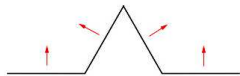
$$3^d = 4 \quad \Longrightarrow \quad d = \frac{\ln 4}{\ln 3} = 1,26185950714 \dots$$

Il nous faut admettre ici que la dimension n'est pas un entier, mais un nombre compris strictement entre 1 et 2 !

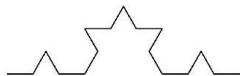
Longueur de la courbe de Koch



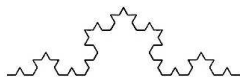
$$\ell = 1$$



$$\ell = 4 \times 1/3 = 4/3$$



$$\ell = (4/3) \times (4/3) = (4/3)^2$$

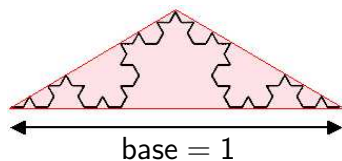


$$\ell = (4/3)^3$$

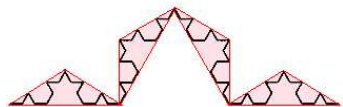
À chaque itération, la longueur est multipliée par $4/3$, donc si le segment initial est pris pour unité, la longueur de la n -ième itération est $(4/3)^n$, ce qui tend vers l'infini quand $n \rightarrow +\infty$. La longueur de la courbe de Koch est donc **infinie** !

Aire de la courbe de Koch

La courbe de Koch est entièrement contenue dans le triangle isocèle figuré ci-dessous (raisonnement par récurrence).



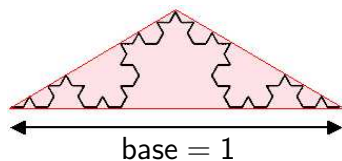
$$\text{aire} = \alpha = \frac{1}{4\sqrt{3}} \simeq 0.1443\dots$$



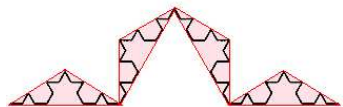
$$\text{aire} = 4 \times \frac{\alpha}{9} = \frac{4}{9}\alpha$$

Aire de la courbe de Koch

La courbe de Koch est entièrement contenue dans le triangle isocèle figuré ci-dessous (raisonnement par récurrence).



$$\text{aire} = \alpha = \frac{1}{4\sqrt{3}} \simeq 0.1443\dots$$

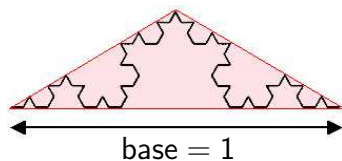


$$\text{aire} = 4 \times \frac{\alpha}{9} = \frac{4}{9}\alpha$$

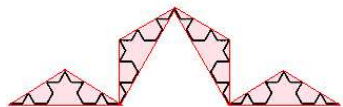
Par récurrence sur le nombre d'itérations, on voit que la courbe de Koch est contenue dans la réunion de 4^n triangles isocèles d'aire $\alpha/9^n$, l'aire totale $(4/9)^n\alpha$ **tend vers 0**.

Aire de la courbe de Koch

La courbe de Koch est entièrement contenue dans le triangle isocèle figuré ci-dessous (raisonnement par récurrence).



$$\text{aire} = \alpha = \frac{1}{4\sqrt{3}} \simeq 0.1443\dots$$



$$\text{aire} = 4 \times \frac{\alpha}{9} = \frac{4}{9}\alpha$$

Par récurrence sur le nombre d'itérations, on voit que la courbe de Koch est contenue dans la réunion de 4^n triangles isocèles d'aire $\alpha/9^n$, l'aire totale $(4/9)^n\alpha$ **tend vers 0**.

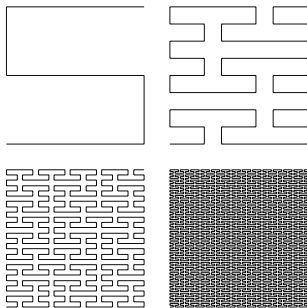
L'aire de la courbe de Koch **est donc nulle !**

La courbe de Peano

Il existe cependant des courbes continues **d'aire non nulle**, même si on les trace avec un crayon infiniment fin !

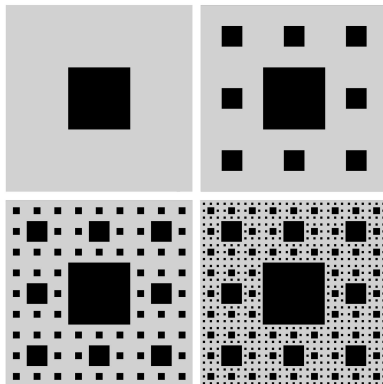
Voici une courbe imaginée en 1890 par le mathématicien italien **Giuseppe Peano** (1858-1932), en utilisant l'écriture des réels en base 3

$$[0, 1] \ni t = 0.a_1a_2a_3\dots = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n 3^{-n}, \quad a_n = 0, 1, 2$$



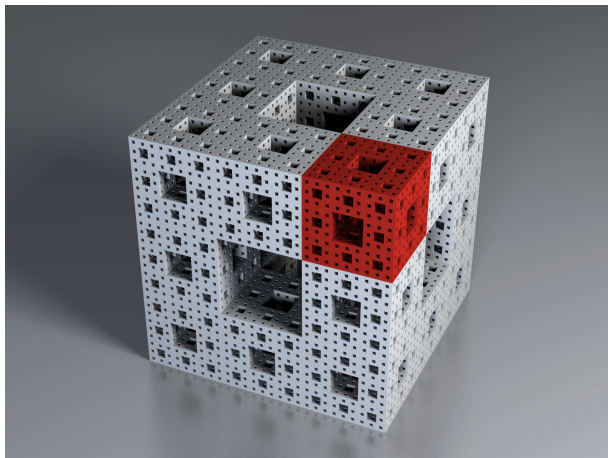
Le tapis de Sierpinski

du nom du mathématicien polonais **Wacław Sierpiński**
(1882-1969).



Exercice : la dimension (partie grise) est
 $d = \ln(8)/\ln(3) \simeq 1,892789\dots$, l'aire est nulle.

L'éponge de Menger



Sa dimension est $d = \ln(20)/\ln(3) \simeq 2,726833\dots$
et son volume est nul.

Mesure d -dimensionnelle de Hausdorff

Les notions de longueur ($d = 1$), d'aire ($d = 2$), de volume ($d = 3$) se généralisent pour d réel > 0 quelconque des mesures d -dimensionnelles introduites par Felix Hausdorff (1868-1942) – l'un des fondateurs de la topologie moderne. Si (E, δ) est un espace muni d'une distance $\delta(x, y)$ quelconque, on définit la mesure de Hausdorff d -dimensionnelle d'une partie A de E par

$$\mathcal{H}_d(A) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathcal{H}_{d,\varepsilon}(A), \quad \mathcal{H}_{d,\varepsilon}(A) = \inf_{\text{diam } A_i \leq \varepsilon} \sum_i (\text{diam } A_i)^d$$

où $\mathcal{H}_{d,\varepsilon}(A)$ est la borne inférieure des sommes $\sum_i (\text{diam } A_i)^d$ étendue à toutes les partitions dénombrables $A = \bigcup A_i$ avec $\text{diam } A_i \leq \varepsilon$.

Dimension de Hausdorff



Félix Hausdorff (1868-1942)

Définition.

Si (E, δ) est un espace métrique et A une partie de E , on dit que A est de dimension de Hausdorff égale à d_0 si on a

$$\mathcal{H}_d(A) = +\infty \text{ pour } d < d_0 \quad \text{et} \quad \mathcal{H}_d(A) = 0 \text{ pour } d > d_0.$$

Notion de système dynamique discret

L'une des façons physiquement naturelle d'obtenir des fractales est de considérer un **système dynamique**.

Notion de système dynamique discret

L'une des façons physiquement naturelle d'obtenir des fractales est de considérer un **système dynamique**.

D'un point de vue mathématique, on a un espace X (système physique) et une fonction $f : X \rightarrow X$ qui décrit une évolution élémentaire de X , se répétant à l'identique dans le temps (ici on simplifie...).

Notion de système dynamique discret

L'une des façons physiquement naturelle d'obtenir des fractales est de considérer un **système dynamique**.

D'un point de vue mathématique, on a un espace X (système physique) et une fonction $f : X \rightarrow X$ qui décrit une évolution élémentaire de X , se répétant à l'identique dans le temps (ici on simplifie...).

On étudie l'évolution des points par itération de f . Autrement dit, étant donné un point initial x_0 , on regarde la suite définie par la relation de récurrence $x_{n+1} = f(x_n)$, c'est-à-dire encore ce qu'on appelle l'orbite de x_0 sous l'action des composées successives

$$f^{[n]} = f \circ f \circ \dots \circ f : X \rightarrow X, \quad x_n = f^{[n]}(x_0).$$

En mathématiques, on cherche toujours à étudier d'abord les situations intéressantes les plus simples possibles.

Cas d'un trinôme complexe du second degré

L'une de ces situations-modèle consiste à regarder dans le plan complexe \mathbb{C} la transformation quadratique

$$P_c : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, \quad P_c(z) = z^2 + c \quad \text{où } c \text{ est un paramètre.}$$

On considère ici l'orbite $z_n = P_c^{[n]}(z_0)$ d'un point $z_0 \in \mathbb{C}$ donné. On notera que $P_c^{[2]}(z) = (z^2 + c)^2 + c$ est un polynôme de degré 4 ; de manière générale, $P_c^{[n]}$ est un polynôme de degré 2^n .

Cas d'un trinôme complexe du second degré

L'une de ces situations-modèle consiste à regarder dans le plan complexe \mathbb{C} la transformation quadratique

$$P_c : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, \quad P_c(z) = z^2 + c \quad \text{où } c \text{ est un paramètre.}$$

On considère ici l'orbite $z_n = P_c^{[n]}(z_0)$ d'un point $z_0 \in \mathbb{C}$ donné. On notera que $P_c^{[2]}(z) = (z^2 + c)^2 + c$ est un polynôme de degré 4 ; de manière générale, $P_c^{[n]}$ est un polynôme de degré 2^n .

On introduit par définition :

Ensemble de Julia de P_c .

On appelle ensemble de Julia rempli K_c l'ensemble des points initiaux z_0 tels que la suite (z_n) reste bornée, et ensemble de Julia le bord $J_c = \partial K_c$ de l'ensemble de Julia rempli K_c .

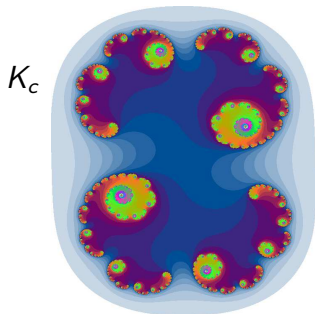
Ensemble de Julia

Si $c = 0$, on a simplement $P_0^{[n]}(z) = z^{2^n}$ et on voit aussitôt que K_0 consiste en le disque unité fermé $|z| \leq 1$ (donc J_0 est le cercle unité).

Ensemble de Julia

Si $c = 0$, on a simplement $P_0^{[n]}(z) = z^{2^n}$ et on voit aussitôt que K_0 consiste en le disque unité fermé $|z| \leq 1$ (donc J_0 est le cercle unité).

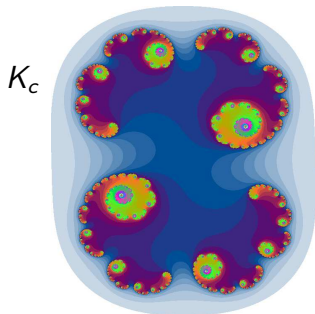
Pour toute autre valeur $c \neq 0$ on obtient un ensemble fractal. Voici par exemple une image de J_c et K_c pour la valeur $c = 0,328075517 + 0,022051744 i$ du paramètre :



Ensemble de Julia

Si $c = 0$, on a simplement $P_0^{[n]}(z) = z^{2^n}$ et on voit aussitôt que K_0 consiste en le disque unité fermé $|z| \leq 1$ (donc J_0 est le cercle unité).

Pour toute autre valeur $c \neq 0$ on obtient un ensemble fractal. Voici par exemple une image de J_c et K_c pour la valeur $c = 0,328075517 + 0,022051744 i$ du paramètre :



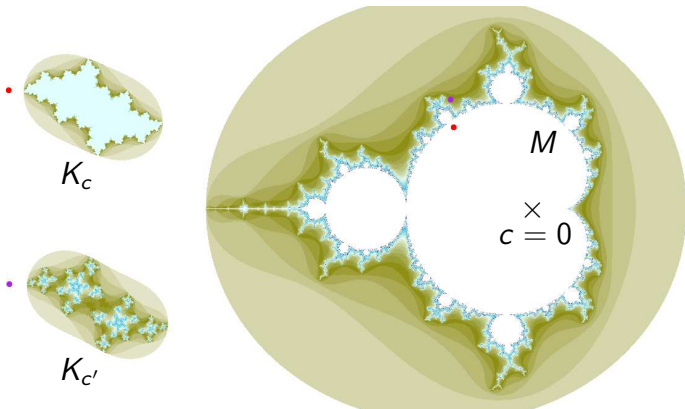
Gaston Julia
(1893-1978)

Ensemble de Mandelbrot

Mathématicien franco-américain **Benoît Mandelbrot** (1924-2010).

Ensemble de Mandelbrot

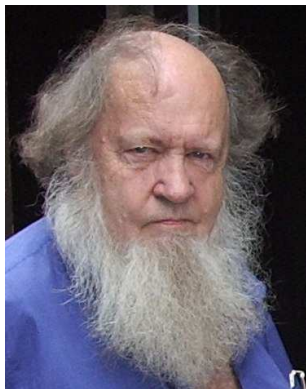
C'est l'ensemble M des valeurs complexes c du paramètre telles que l'ensemble de Julia K_c associé à P_c soit connexe.



Dynamiciens célèbres ...



Benoît Mandelbrot (1924-2010)



Adrien Douady (1935-2006)

Un ensemble fractal de dimension 3 : le Mandelbulbe de degré $p = 8$



L'équation du Mandelbulbe de degré p

White et Nylander ont donné la formule suivante en coordonnées sphériques dans \mathbb{R}^3

$$\langle x, y, z \rangle^p = r^p \langle \cos(p\theta) \cos(p\phi), \sin(p\theta) \cos(p\phi), \sin(p\phi) \rangle$$

$$\text{où } \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \theta = \arctan(y/x) \\ \text{et } \phi = \arctan(z/\sqrt{x^2 + y^2}) = \arcsin(z/r). \end{cases}$$

pour la p -ième puissance du nombre hypercomplexe 3D.

L'équation du Mandelbulbe de degré p

White et Nylander ont donné la formule suivante en coordonnées sphériques dans \mathbb{R}^3

$$\langle x, y, z \rangle^p = r^p \langle \cos(p\theta) \cos(p\phi), \sin(p\theta) \cos(p\phi), \sin(p\phi) \rangle$$

$$\text{où } \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \theta = \arctan(y/x) \\ \text{et } \phi = \arctan(z/\sqrt{x^2 + y^2}) = \arcsin(z/r). \end{cases}$$

pour la p -ième puissance du nombre hypercomplexe 3D.

Comme pour l'ensemble de Mandelbrot plan, on regarde les domaines de convergences des suites obtenues par itération de $w \mapsto w^p + c$ où w et c sont des nombres "hypercomplexes" $w = \langle x, y, z \rangle$ dans \mathbb{R}^3 et $w \mapsto w^p$ l'application définie ci-dessus

<http://www.skytopia.com/project/fractal/2mandelbulb.html>

- Logiciel de présentation : **L^AT_EX Beamer**
texlive : <http://www.tug.org/texlive/>
- Systèmes de Lindenmayer :
lsysexp : <http://www.sourceforge.org/Graphics/Fractals/lsysexp-latest.tar.gz>
xfraactint : <http://www.fractint.org/ftp/current>
- Fractales :
xfraactint et
xaos : <http://wmi.math.u-szeged.hu/xaos/doku.php>
mandelbulber : <http://sourceforge.net/projects/mandelbulber/>
- Images et photographies : **Wikipedia**