

## Ensembles fractals, mesure et dimension

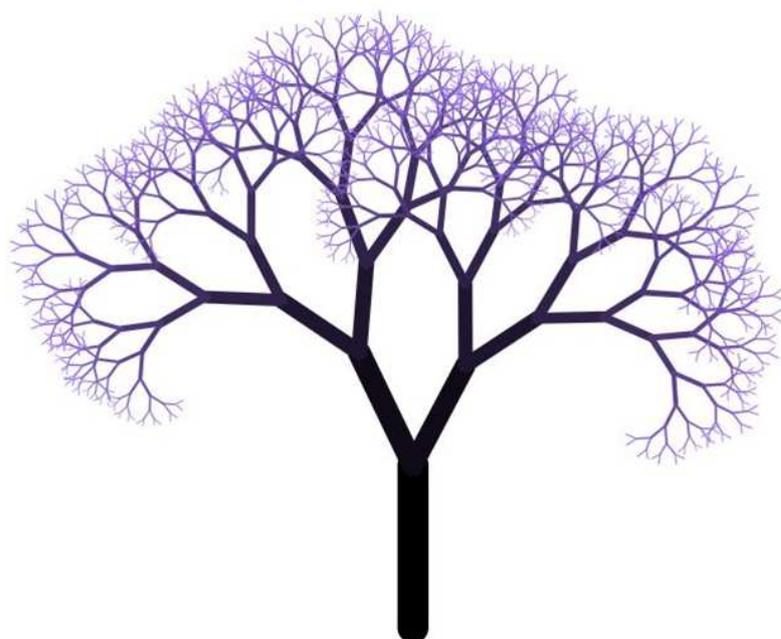
Jean-Pierre Demailly

Institut Fourier, Université de Grenoble I, France  
& Académie des Sciences de Paris

11 avril 2013

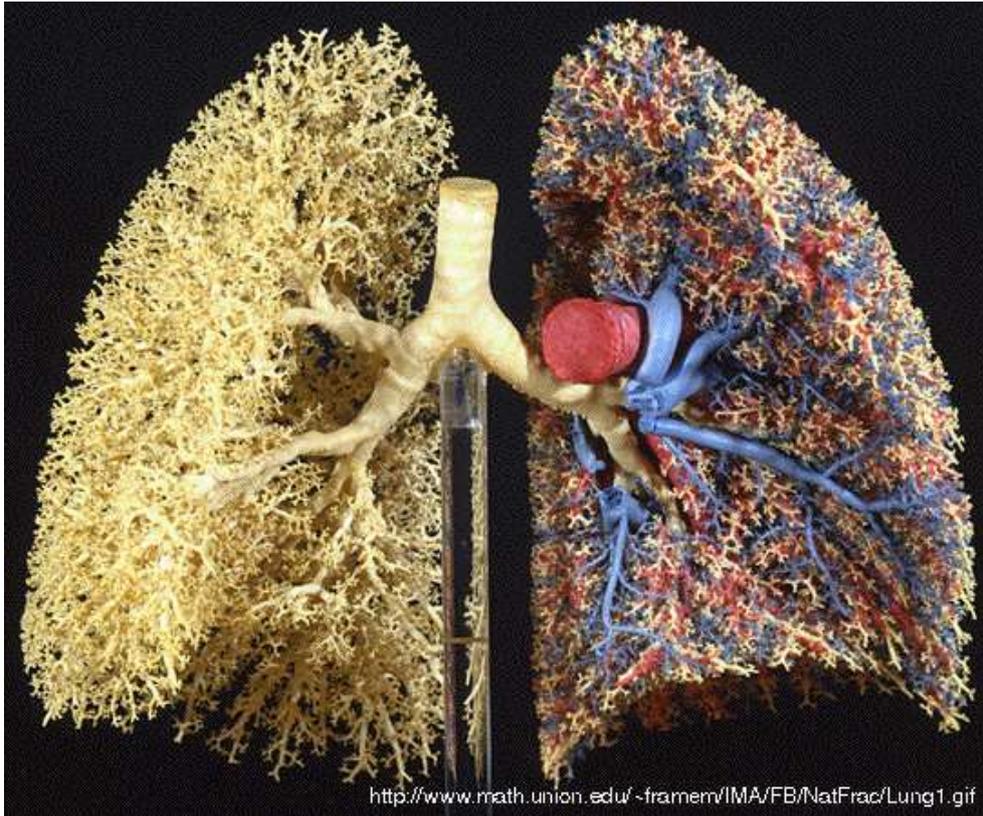
Conférence au Lycée Portes de l'Oisans, Vizille

### Les fractales sont partout : arbres ...



fractale pouvant être obtenue comme un  
“système de Lindenmayer”

## Poumons ...



Jean-Pierre Demailly, Lycée Portes de l'Oisans, Vizille

Ensembles fractals, mesure et dimension

## Chou broccoli Romanesco ...



Jean-Pierre Demailly, Lycée Portes de l'Oisans, Vizille

Ensembles fractals, mesure et dimension

La dimension d'un espace (ensemble de points dans lequel on se place) est classiquement le **nombre de coordonnées** nécessaires pour repérer un point de cet espace. C'est donc a priori un **nombre entier**. On va introduire ici une notion plus générale, qui conduit à des dimensions parfois non entières.

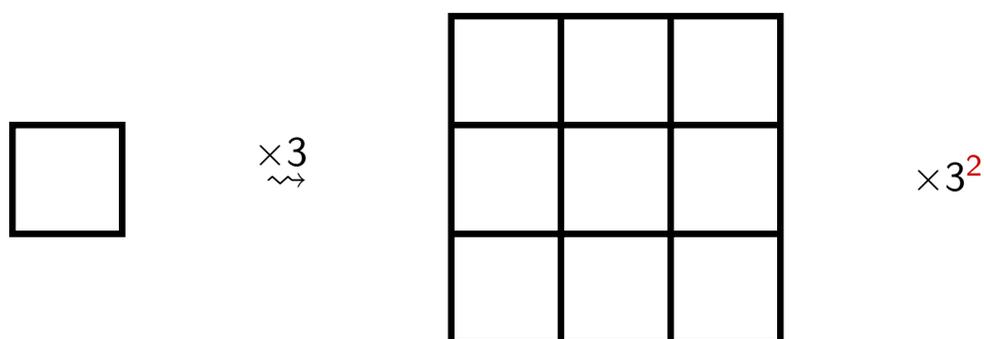
## Objet de dimension 1



Par une homothétie de rapport 3, la mesure (longueur) est multipliée par  $3 = 3^1$ , l'objet résultant contient 3 fois l'objet initial. La dimension d'un segment est 1.

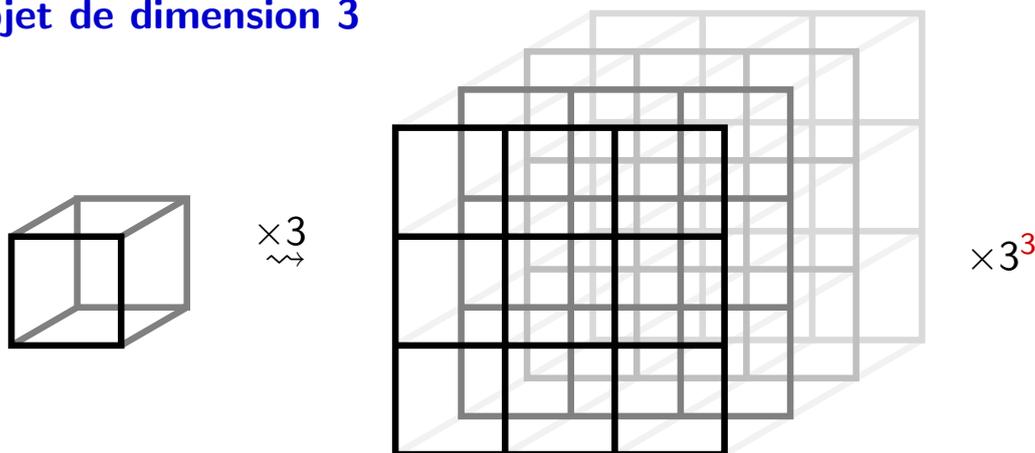
# Dimension 2 ...

## Objet de dimension 2



Par une homothétie de rapport 3, la mesure (aire) de l'objet est multipliée par  $9 = 3^2$ , l'objet résultant contient 9 fois l'objet initial. La dimension du carré est 2.

### Objet de dimension 3

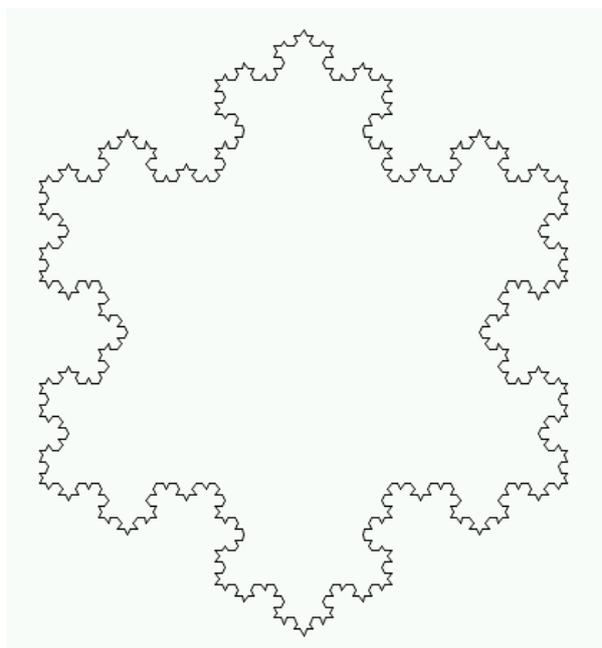
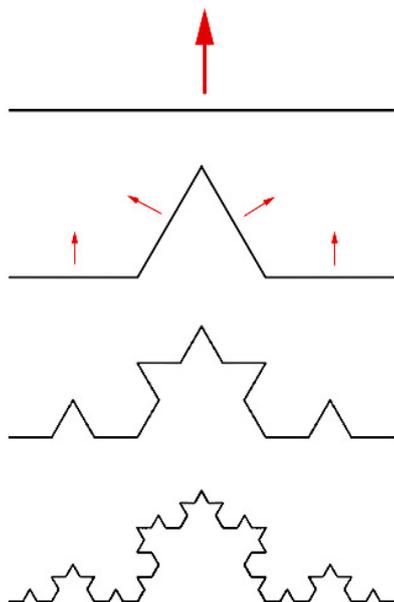


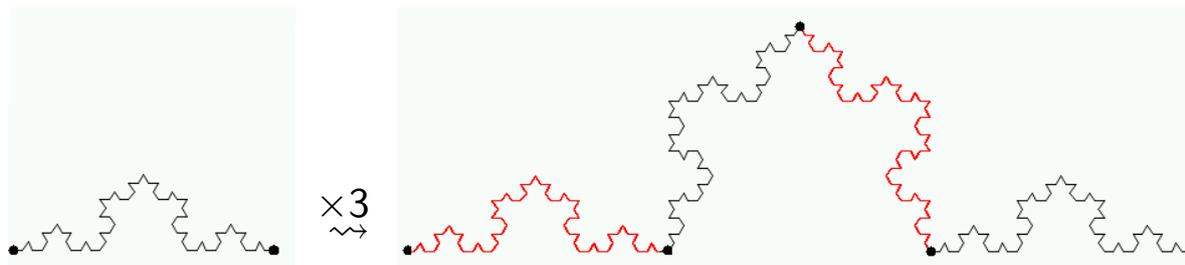
Par une homothétie de rapport 3, la mesure (volume) de l'objet est multipliée par  $27 = 3^3$ , l'objet résultant contient 27 fois l'objet initial. La dimension du cube est 3.

En généralisant, pour un objet de dimension  $d$ , l'effet d'une homothétie de rapport  $\lambda$  est de multiplier la mesure par  $\lambda^d$ .

### Qu'en est-il d'un ensemble fractal ?

Prenons l'exemple de la courbe de Koch (ou flocon de neige) obtenue par itération du procédé ci-contre





Par une homothétie de rapport 3, l'objet devient un objet de nature identique, contenant 4 morceaux de même taille que l'objet initial, donc de mesure 4 fois plus grande. Ceci conduit à poser

$$3^d = 4 \implies d = \log_3(4) = 1,26185950714 \dots$$

Il nous faut admettre ici que la dimension n'est pas un entier, mais un nombre compris strictement entre 1 et 2 !

## Définition des logarithmes

- **En base 10**

On a  $10^3 = 1000$  : on écrit  $\log_{10}(1000) = 3$

On a  $10^4 = 10000$  : on écrit  $\log_{10}(10000) = 4$

On a  $10^{-2} = 0,01$  : on écrit  $\log_{10}(0,01) = -2$

- **En base  $a$**

Si  $a^p = x$ , on écrit  $\log_a(x) = p$ .

Si  $a^q = y$ , alors  $xy = a^p \times a^q = a^{p+q}$ , donc :

$$\log_a(xy) = p + q = \log_a(x) + \log_a(y).$$

En particulier  $\log_a(x^2) = \log_a(xx) = 2 \log_a(x)$

$$\log_a(x^p) = \log_a(xx \dots x) = p \log_a(x).$$

- On a  $\log_a(\sqrt{x}) = \frac{1}{2} \log_a(x)$ , plus généralement  $\log_a(\sqrt[p]{x}) = \frac{1}{p} \log_a(x)$ .

# Définition des logarithmes (suite)

On a

$$(x^p)^q = x^p \times \dots \times x^p \text{ (} q \text{ fois)} = x^{pq}.$$

Donc  $(x^{1/p})^p = x^{(1/p) \times p} = x^1 = x$ , c'est-à-dire

$$x^{1/p} = \sqrt[p]{x}.$$

On calcule ainsi

$$3^{0.5} = 3^{1/2} = \sqrt{3} \simeq 1,732,$$

$$3^{0.25} = 3^{1/4} = \sqrt[4]{3} = \sqrt{\sqrt{3}} \simeq 1,316,$$

$$3^{1.25} = 3^1 \times 3^{0.25} \simeq 3 \times 1,316 = 3,948.$$

On en conclut que  $\log_3(4)$  est un peu supérieur à 1,25. En fait  $\log_3(4) = 1,26185950714 \dots$

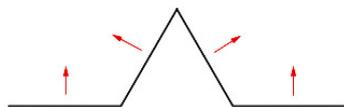
Formule générale avec les calculettes :

$$\log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}.$$

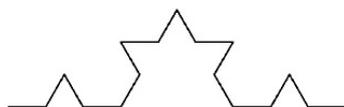
## Longueur de la courbe de Koch



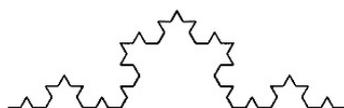
$$\ell = 1$$



$$\ell = 4 \times 1/3 = 4/3$$



$$\ell = (4/3) \times (4/3) = (4/3)^2$$

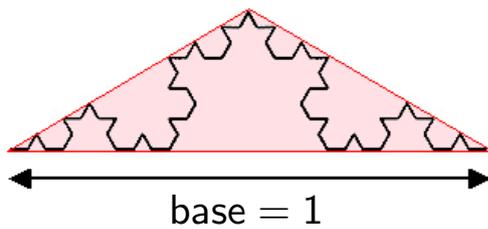


$$\ell = (4/3)^3$$

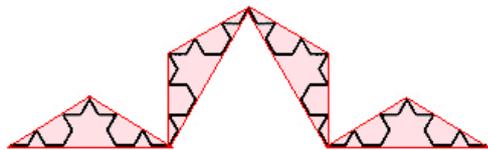
À chaque itération, la longueur est multipliée par  $4/3$ , donc si le segment initial est pris pour unité, la longueur de la  $n$ -ième itération est  $(4/3)^n$ , ce qui tend vers l'infini quand  $n \rightarrow +\infty$ . La longueur de la courbe de Koch est donc **infinie** !

# Aire de la courbe de Koch

La courbe de Koch est entièrement contenue dans le triangle isocèle figuré ci-dessous (raisonnement par récurrence).



$$\text{aire} = \alpha = \frac{1}{4\sqrt{3}} \simeq 0.1443\dots$$



$$\text{aire} = 4 \times \frac{\alpha}{9} = \frac{4}{9}\alpha$$

Par récurrence sur le nombre d'itérations, on voit que la courbe de Koch est contenue dans la réunion de  $4^n$  triangles isocèles d'aire  $\alpha/9^n$ , l'aire totale  $(4/9)^n\alpha$  **tend vers 0**.

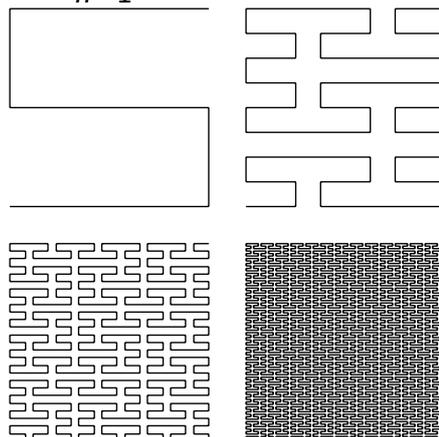
L'aire de la courbe de Koch **est donc nulle !**

# La courbe de Peano

Il existe cependant des courbes continues **d'aire non nulle**, même si on les trace avec un crayon infiniment fin !

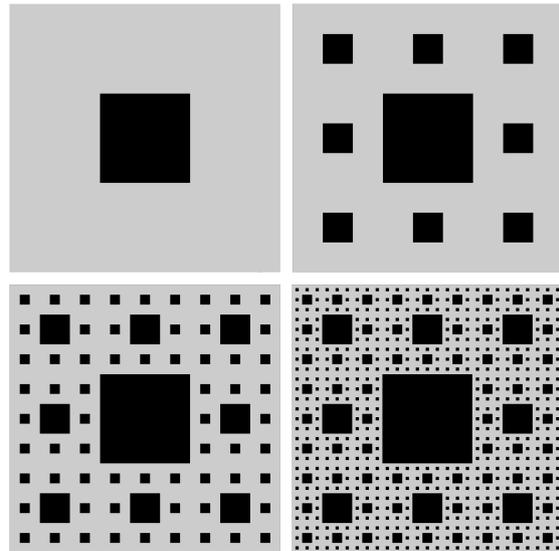
Voici une courbe imaginée en 1890 par le mathématicien italien **Giuseppe Peano** (1858-1932), en utilisant l'écriture des réels en base 3

$$[0, 1] \ni t = 0.a_1a_2a_3\dots = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n 3^{-n}, \quad a_n = 0, 1, 2$$



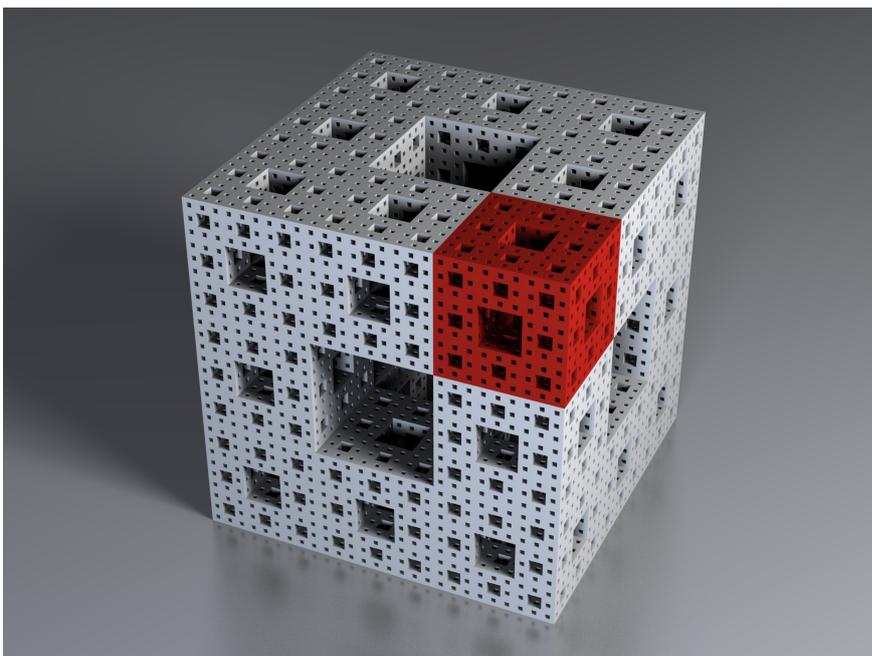
# Le tapis de Sierpinski

du nom du mathématicien polonais **Wacław Sierpiński** (1882-1969).

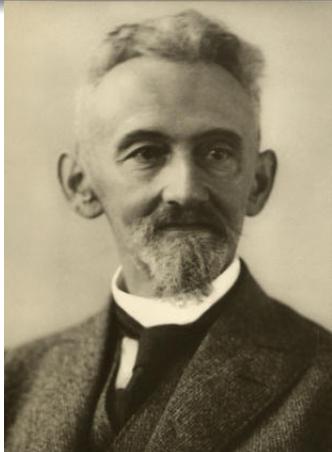


**Exercice** : la dimension (partie grise) est  $d = \log_3(8) \simeq 1,892789\dots$ , l'aire est nulle.

# L'éponge de Menger



Sa dimension est  $d = \log_3(20) \simeq 2,726833\dots$   
et son volume est nul.



Félix Hausdorff (1868-1942)

fondateur de la  
topologie moderne

Les notions de longueur ( $d = 1$ ), d'aire ( $d = 2$ ), de volume ( $d = 3$ ) se généralisent en dimension  $d > 0$  quelconque : on définit la mesure de Hausdorff  $d$ -dimensionnelle d'une partie  $A$  de l'espace par

$$\mathcal{H}_d(A) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathcal{H}_{d,\varepsilon}(A), \quad \mathcal{H}_{d,\varepsilon}(A) = \inf \sum_i (\text{diam } A_i)^d$$

où  $A = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i$  avec  $\text{diam } A_i \leq \varepsilon$ .

## Nombres complexes

Dans  $\mathbb{R}$ ,  $-1$  n'a pas de racine carrée,  
car  $x^2 \geq 0$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ .

Alors les mathématiciens du 16ème siècle en ont inventé une !! On définit  $i = \sqrt{-1}$  ( $i \notin \mathbb{R}$ ), et on a donc  $i \times i = -1$ .

On calcule facilement avec les complexes :

- Addition/soustraction

$$(-2,5 + 3i) - (4 + 5i) = -6,5 - 2i$$

- Multiplication

$$\begin{aligned} (2 + 3i)(5 + 7i) &= 2 \times 5 + 3i \times 5 + 2 \times 7i + 3i \times 7i \\ &= 10 + 15i + 14i + 21i^2 = 10 + 29i - 21 \\ &= -11 + 29i \end{aligned}$$

On note  $\mathbb{C}$  l'ensemble des nombres complexes.

# Itération d'un polynôme du second degré dans $\mathbb{C}$

Dans le plan complexe  $\mathbb{C}$ , on regarde la fonction polynôme

$$P_c : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, \quad P_c(z) = z^2 + c \quad \text{où } c \text{ est un paramètre,}$$

par exemple  $c = 0,3 + 0,4i$ .

On prend un point  $z_0 \in \mathbb{C}$  quelconque, et on calcule les "itérés"

$$z_1 = z_0^2 + c$$

$$z_2 = z_1^2 + c$$

...

$$z_{n+1} = z_n^2 + c$$

Par exemple, si  $c = 0$ , on a

$$z_1 = z_0^2, \quad z_2 = z_1^2 = z_0^4, \quad z_3 = z_2^2 = z_0^8, \quad \dots, \quad z_n = z_0^{2^n}.$$

Si  $z_0$  est petit,  $z_0^{2^n}$  devient de plus en plus petit, tandis que si  $z_0$  est grand,  $z_0^{2^n}$  devient de plus en plus grand.

## Ensemble de Julia

On introduit par définition :

**Ensemble de Julia de  $P_c$ .**

*On appelle ensemble de Julia rempli  $K_c$  l'ensemble des points initiaux  $z_0$  tels que la suite  $(z_n)$  reste bornée, et ensemble de Julia le bord  $J_c = \partial K_c$  de l'ensemble de Julia rempli  $K_c$ .*

Si  $z = x + iy \in \mathbb{C}$ , on pose  $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ , et on montre que

$$|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|.$$

Si  $c = 0$ , on a simplement  $z_n = z_0^{2^n}$ , donc  $|z_n| = |z_0|^{2^n}$ .

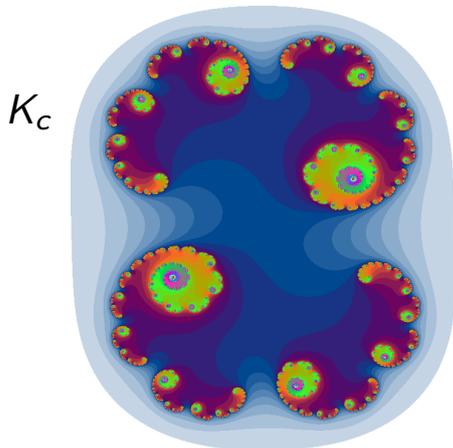
Si  $|z_0| < 1$ , on a  $|z_0^{2^n}| \rightarrow 0$  quand  $n \rightarrow +\infty$ ,

Si  $|z_0| > 1$ , on a  $|z_0^{2^n}| \rightarrow \infty$  quand  $n \rightarrow +\infty$ ,

On voit que  $K_0$  consiste en le disque unité fermé  $|z| \leq 1$ , et que  $J_0$  est le cercle unité.

# Ensemble de Julia (suite)

Pour toute valeur complexe  $c \neq 0$  on obtient en fait un ensemble fractal. Voici par exemple une image de  $J_c$  et  $K_c$  pour la valeur  $c = 0,328075517 + 0,022051744 i$  du paramètre :



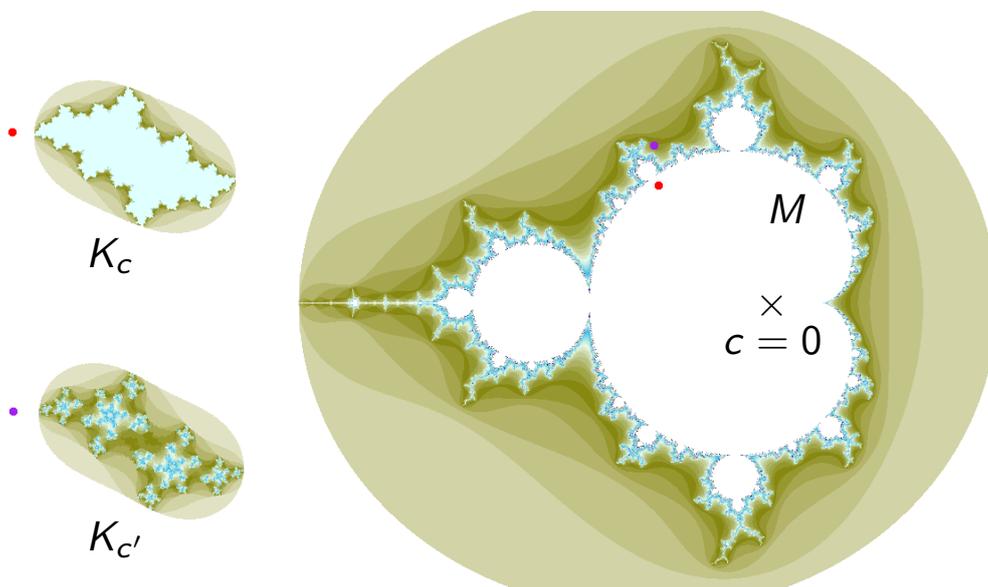
Gaston Julia  
(1893-1978)

# Ensemble de Mandelbrot

Mathématicien franco-américain **Benoît Mandelbrot** (1924-2010).

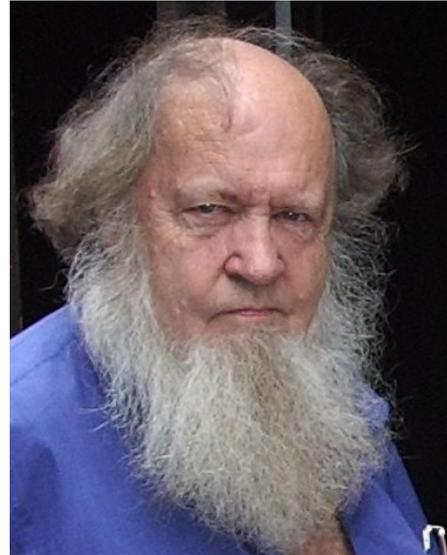
## Ensemble de Mandelbrot

*C'est l'ensemble  $M$  des valeurs complexes  $c$  du paramètre telles que l'ensemble de Julia  $K_c$  associé à  $P_c$  soit connexe.*





Benoît Mandelbrot (1924-2010)



Adrien Douady (1935-2006)

Un ensemble fractal de dimension 3 :  
le Mandelbulbe de degré  $p = 8$



# L'équation du Mandelbulbe de degré $p$

White et Nylander ont donné la formule suivante en coordonnées sphériques dans  $\mathbb{R}^3$

$$\langle x, y, z \rangle^p = r^p \langle \cos(p\theta) \cos(p\phi), \sin(p\theta) \cos(p\phi), \sin(p\phi) \rangle$$

$$\text{où } \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \theta = \arctan(y/x) \\ \text{et } \phi = \arctan(z/\sqrt{x^2 + y^2}) = \arcsin(z/r). \end{cases}$$

pour la  $p$ -ième puissance du nombre hypercomplexe 3D.

Comme pour l'ensemble de Mandelbrot plan, on regarde les domaines de convergences des suites obtenues par itération de  $w \mapsto w^p + c$  où  $w$  et  $c$  sont des nombres "hypercomplexes"  $w = \langle x, y, z \rangle$  dans  $\mathbb{R}^3$  et  $w \mapsto w^p$  l'application définie ci-dessus

<http://www.skytopia.com/project/fractal/2mandelbulb.html>

## Logiciels / références utilisés

- Logiciel de présentation : **L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X Beamer**  
**texlive** : <http://www.tug.org/texlive/>
- Systèmes de Lindenmayer :  
**lsysexp** : <http://www.sourceforge.org/Graphics/Fractals/lsysexp-latest.tar.gz>  
**xfractint** : <http://www.fractint.org/ftp/current>
- Fractales :  
**xfractint** et  
**xaos** : <http://wmi.math.u-szeged.hu/xaos/doku.php>  
**mandelbulber** : <http://sourceforge.net/projects/mandelbulber/>
- Images et photographies : **Wikipedia**