

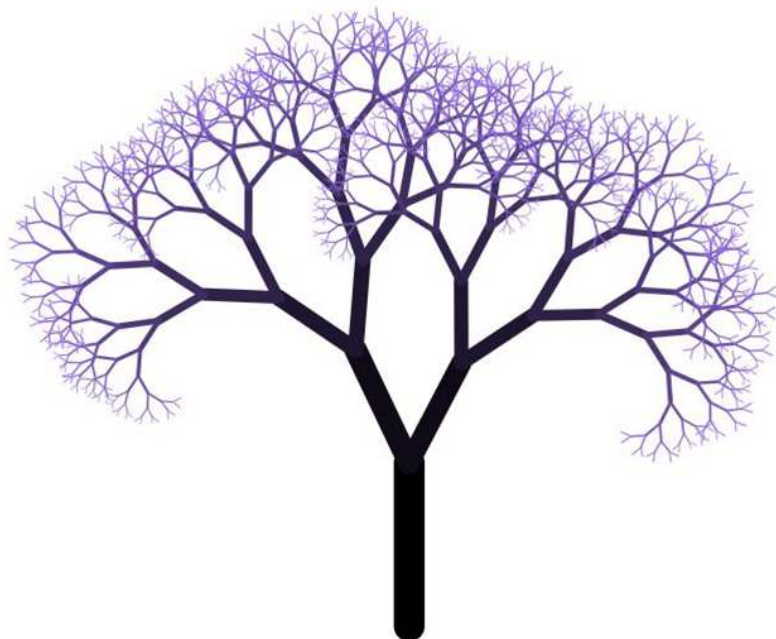
Ensembles fractals, mesure et dimension

Jean-Pierre Demailly

Institut Fourier, Université de Grenoble I, France
& Académie des Sciences de Paris

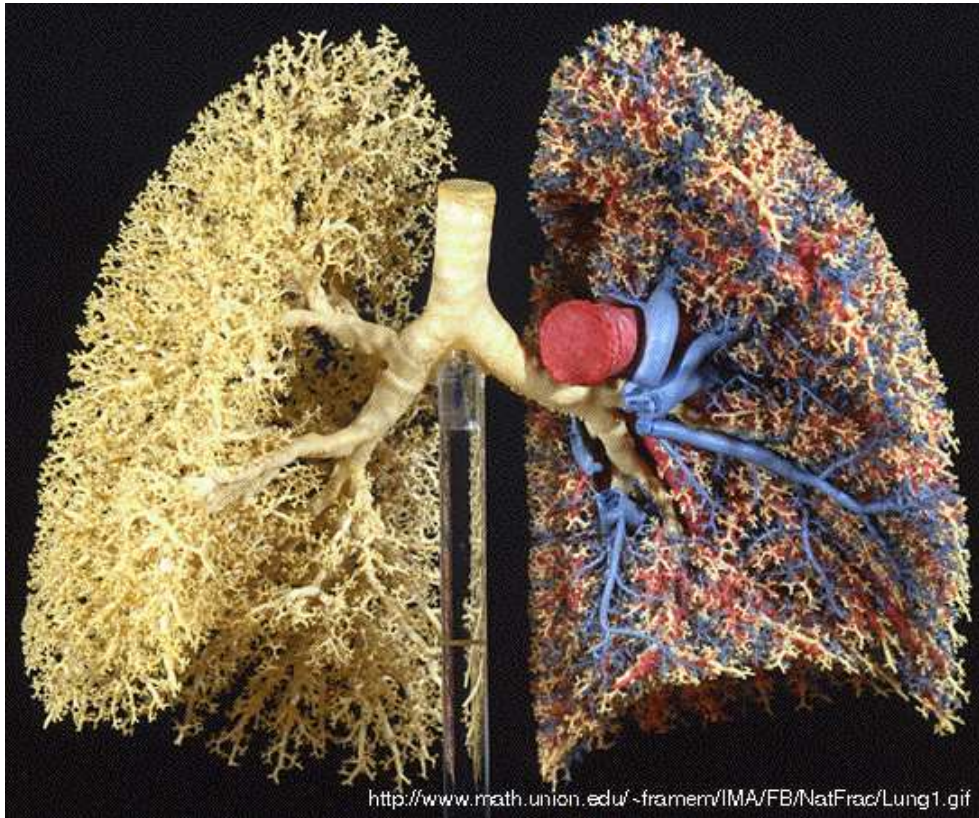
19 novembre 2012
Conférence au Lycée Champollion, Grenoble

Les fractales sont partout : arbres ...



fractale pouvant être obtenue comme un
“système de Lindenmayer”

Poumons ...



Jean-Pierre Demailly, Lycée Champollion - Grenoble

Ensembles fractals, mesure et dimension

Chou broccoli Romanesco ...



Jean-Pierre Demailly, Lycée Champollion - Grenoble

Ensembles fractals, mesure et dimension

La dimension d'un espace (ensemble de points dans lequel on se place) est classiquement le **nombre de coordonnées** nécessaires pour repérer un point de cet espace. C'est donc a priori un **nombre entier**. On va introduire ici une notion plus générale, qui conduit à des dimensions parfois non entières.

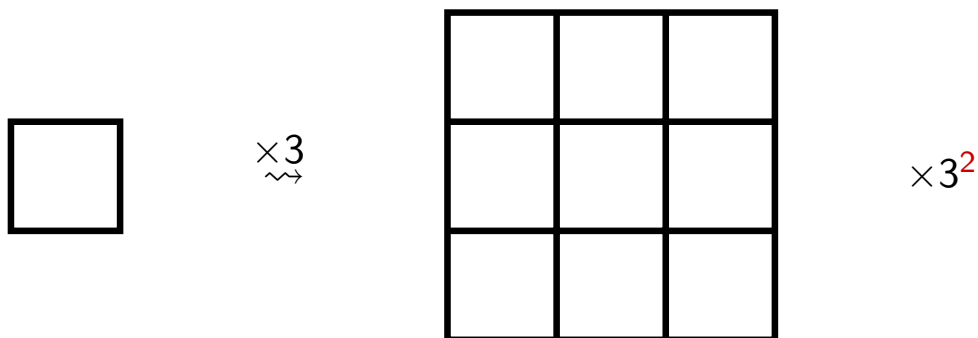
Objet de dimension 1



Par une homothétie de rapport 3, la mesure (longueur) est multipliée par $3 = 3^1$, l'objet résultant contient 3 fois l'objet initial. La dimension d'un segment est 1.

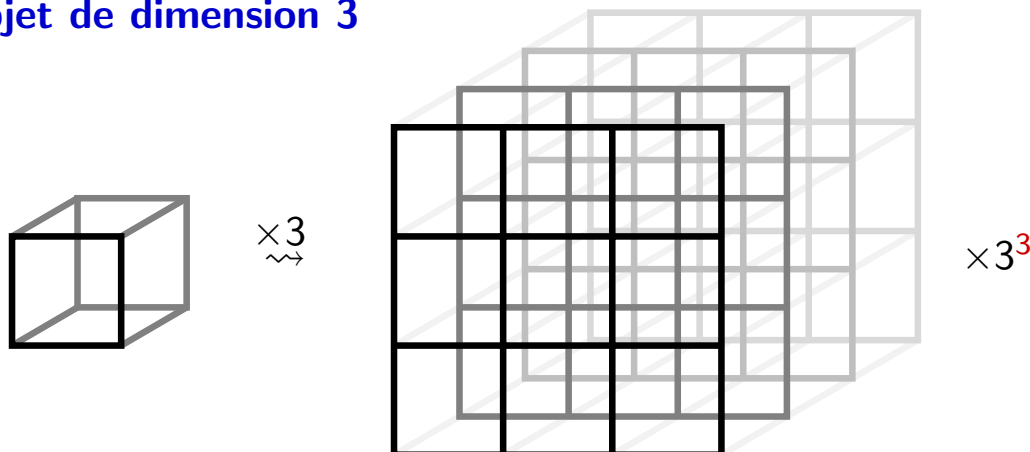
Dimension 2 ...

Objet de dimension 2



Par une homothétie de rapport 3, la mesure (aire) de l'objet est multipliée par $9 = 3^2$, l'objet résultant contient 9 fois l'objet initial. La dimension du carré est 2.

Objet de dimension 3

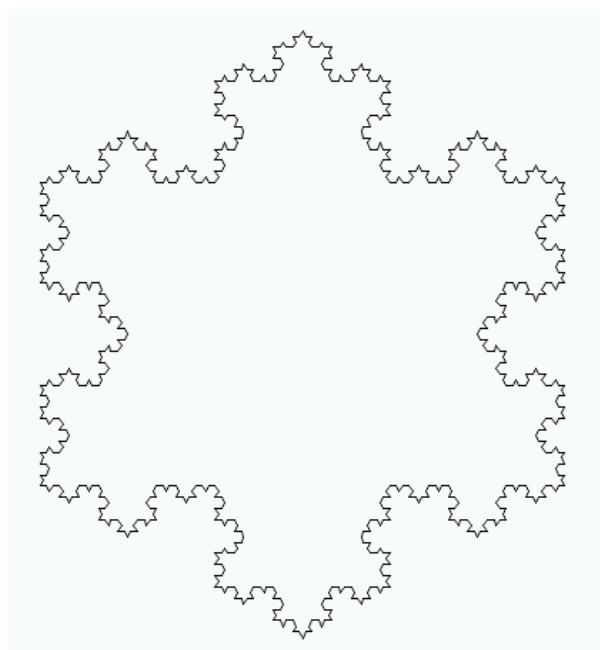
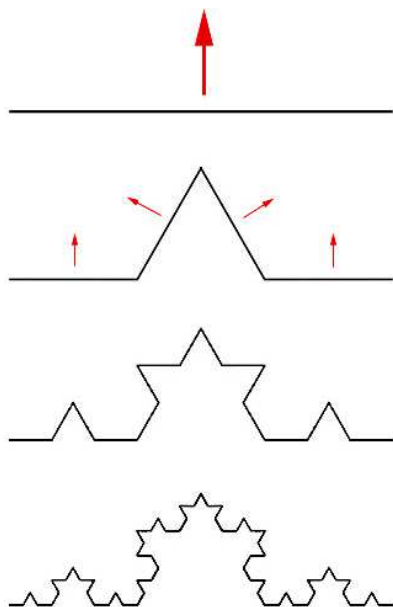


Par une homothétie de rapport 3, la mesure (volume) de l'objet est multipliée par $27 = 3^3$, l'objet résultant contient 27 fois l'objet initial. La dimension du cube est 3.

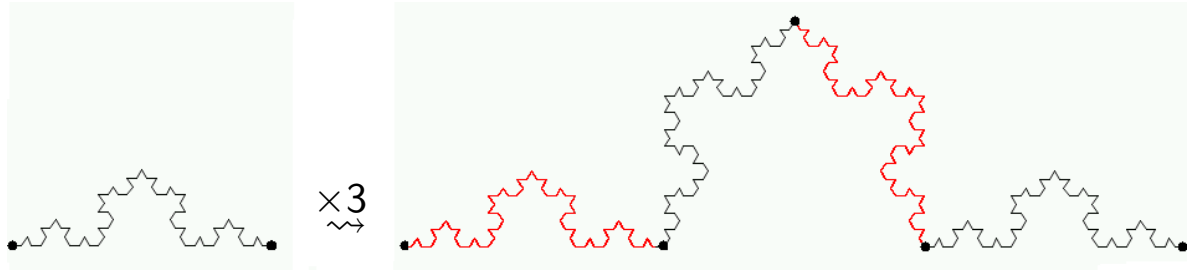
En généralisant, pour un objet de dimension d , l'effet d'une homothétie de rapport λ est de multiplier la mesure par λ^d .

Qu'en est-il d'un ensemble fractal ?

Prenons l'exemple de la courbe de Koch (ou flocon de neige) obtenue par itération du procédé ci-contre



Effet d'une homothétie de rapport 3



Par une homothétie de rapport 3, l'objet devient un objet de nature identique, contenant 4 morceaux de même taille que l'objet initial, donc de mesure 4 fois plus grande. Ceci conduit à poser

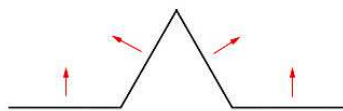
$$3^d = 4 \quad \Longrightarrow \quad d = \frac{\ln 4}{\ln 3} = 1,26185950714\dots$$

Il nous faut admettre ici que la dimension n'est pas un entier, mais un nombre compris strictement entre 1 et 2 !

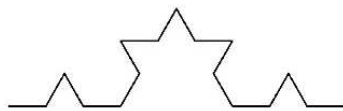
Longueur de la courbe de Koch



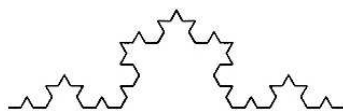
$$\ell = 1$$



$$\ell = 4 \times 1/3 = 4/3$$



$$\ell = (4/3) \times (4/3) = (4/3)^2$$

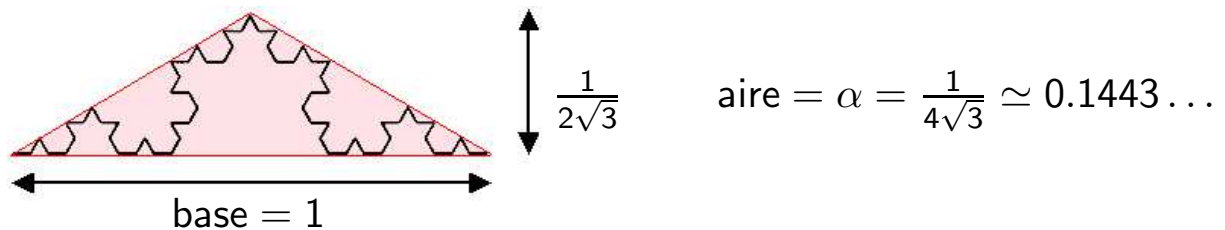


$$\ell = (4/3)^3$$

À chaque itération, la longueur est multipliée par $4/3$, donc si le segment initial est pris pour unité, la longueur de la n -ième itération est $(4/3)^n$, ce qui tend vers l'infini quand $n \rightarrow +\infty$. La longueur de la courbe de Koch est donc **infinie** !

Aire de la courbe de Koch

La courbe de Koch est entièrement contenue dans le triangle isocèle figuré ci-dessous (raisonnement par récurrence).



Par récurrence sur le nombre d'itérations, on voit que la courbe de Koch est contenue dans la réunion de 4^n triangles isocèles d'aire $\alpha/9^n$, l'aire totale $(4/9)^n \alpha$ **tend vers 0**.

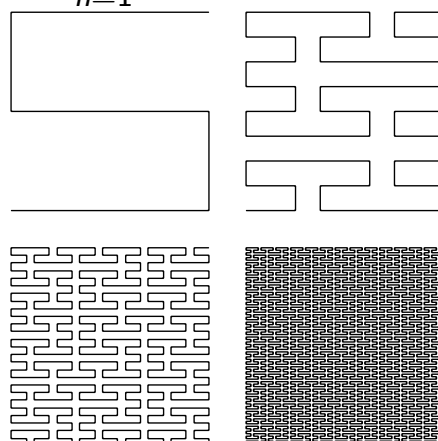
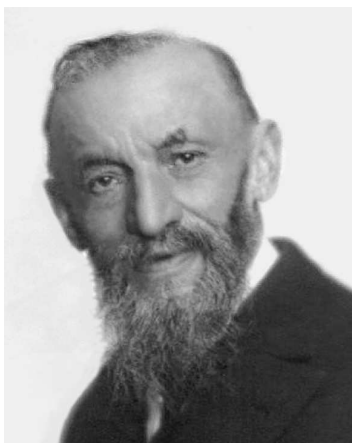
L'aire de la courbe de Koch **est donc nulle !**

La courbe de Peano

Il existe cependant des courbes continues **d'aire non nulle**, même si on les trace avec un crayon infiniment fin !

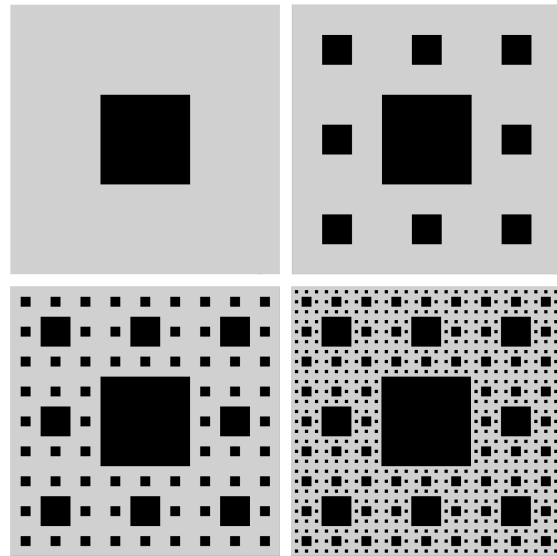
Voici une courbe imaginée en 1890 par le mathématicien italien **Giuseppe Peano** (1858-1932), en utilisant l'écriture des réels en base 3

$$[0, 1] \ni t = 0.a_1 a_2 a_3 \dots = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n 3^{-n}, \quad a_n = 0, 1, 2$$



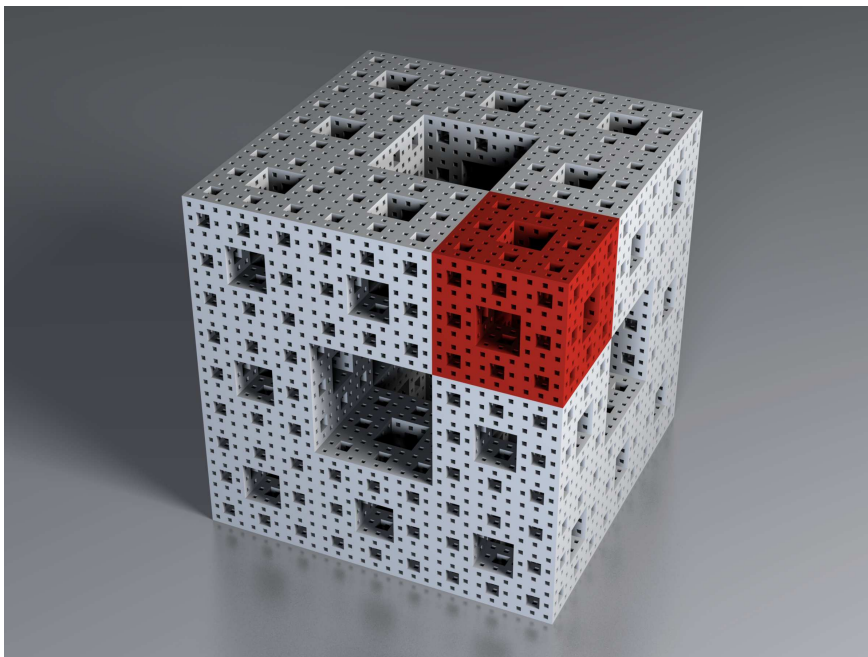
Le tapis de Sierpinski

du nom du mathématicien polonais **Wacław Sierpiński** (1882-1969).



Exercice : la dimension (partie grise) est $d = \ln(8)/\ln(3) \simeq 1,892789\dots$, l'aire est nulle.

L'éponge de Menger



Sa dimension est $d = \ln(20)/\ln(3) \simeq 2,726833\dots$
et son volume est nul.

Les notions de longueur ($d = 1$), d'aire ($d = 2$), de volume ($d = 3$) se généralisent pour d réel > 0 quelconque des mesures d -dimensionnelles introduites par Felix Hausdorff (1868-1942) – l'un des fondateurs de la topologie moderne.

Si (E, δ) est un espace muni d'une distance $\delta(x, y)$ quelconque, on définit la mesure de Hausdorff d -dimensionnelle d'une partie A de E par

$$\mathcal{H}_d(A) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathcal{H}_{d,\varepsilon}(A), \quad \mathcal{H}_{d,\varepsilon}(A) = \inf_{\text{diam } A_i \leq \varepsilon} \sum_i (\text{diam } A_i)^d$$

où $\mathcal{H}_{d,\varepsilon}(A)$ est la borne inférieure des sommes $\sum_i (\text{diam } A_i)^d$ étendue à toutes les partitions dénombrables $A = \bigcup A_i$ avec $\text{diam } A_i \leq \varepsilon$.

Dimension de Hausdorff



Félix Hausdorff (1868-1942)

Définition.

Si (E, δ) est un espace métrique et A une partie de E , on dit que A est de dimension de Hausdorff égale à d_0 si on a

$$\mathcal{H}_d(A) = +\infty \text{ pour } d < d_0 \text{ et } \mathcal{H}_d(A) = 0 \text{ pour } d > d_0.$$

L'une des façons physiquement naturelle d'obtenir des fractales est de considérer un **système dynamique**.

D'un point de vue mathématique, on a un espace X (système physique) et une fonction $f : X \rightarrow X$ qui décrit une évolution élémentaire de X , se répétant à l'identique dans le temps (ici on simplifie...).

On étudie l'évolution des points par itération de f . Autrement dit, étant donné un point initial x_0 , on regarde la suite définie par la relation de récurrence $x_{n+1} = f(x_n)$, c'est-à-dire encore ce qu'on appelle l'orbite de x_0 sous l'action des composées successives

$$f^{[n]} = f \circ f \circ \dots \circ f : X \rightarrow X, \quad x_n = f^{[n]}(x_0).$$

En mathématiques, on cherche toujours à étudier d'abord les situations intéressantes les plus simples possibles.

Cas d'un trinôme complexe du second degré

L'une de ces situations-modèle consiste à regarder dans le plan complexe \mathbb{C} la transformation quadratique

$$P_c : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, \quad P_c(z) = z^2 + c \quad \text{où } c \text{ est un paramètre.}$$

On considère ici l'orbite $z_n = P_c^{[n]}(z_0)$ d'un point $z_0 \in \mathbb{C}$ donné. On notera que $P_c^{[2]}(z) = (z^2 + c)^2 + c$ est un polynôme de degré 4 ; de manière générale, $P_c^{[n]}$ est un polynôme de degré 2^n .

On introduit par définition :

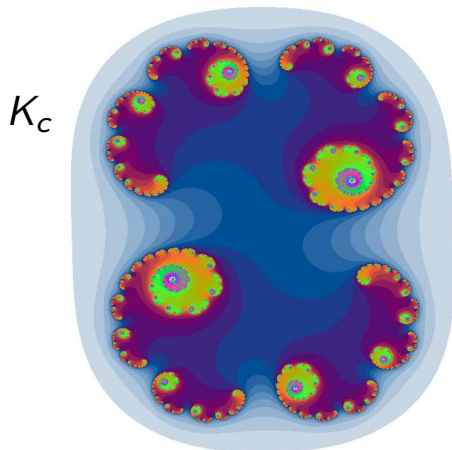
Ensemble de Julia de P_c .

On appelle ensemble de Julia rempli K_c l'ensemble des points initiaux z_0 tels que la suite (z_n) reste bornée, et ensemble de Julia le bord $J_c = \partial K_c$ de l'ensemble de Julia rempli K_c .

Ensemble de Julia

Si $c = 0$, on a simplement $P_0^{[n]}(z) = z^{2^n}$ et on voit aussitôt que K_0 consiste en le disque unité fermé $|z| \leq 1$ (donc J_0 est le cercle unité).

Pour toute autre valeur $c \neq 0$ on obtient un ensemble fractal. Voici par exemple une image de J_c et K_c pour la valeur $c = 0,328075517 + 0,022051744 i$ du paramètre :



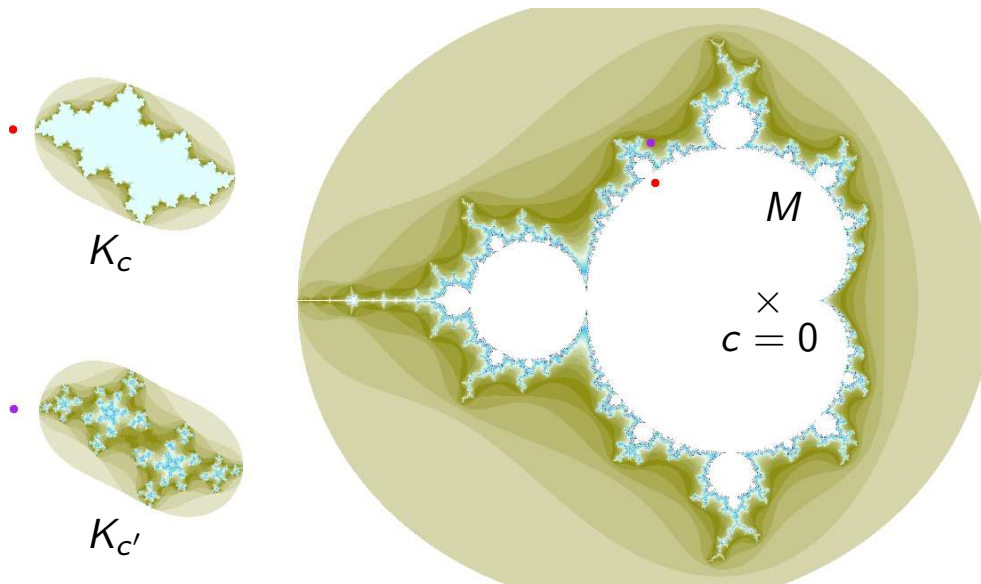
Gaston Julia
(1893-1978)

Ensemble de Mandelbrot

Mathématicien franco-américain **Benoît Mandelbrot** (1924-2010).

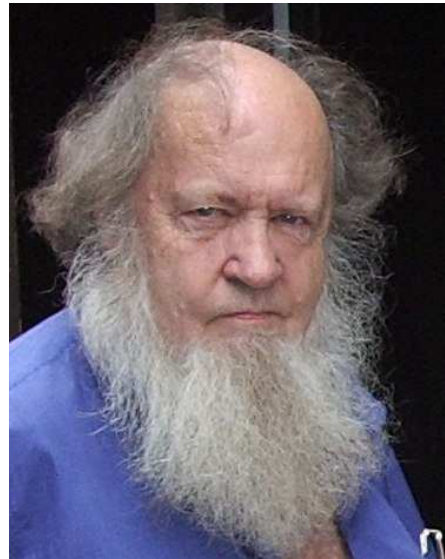
Ensemble de Mandelbrot

C'est l'ensemble M des valeurs complexes c du paramètre telles que l'ensemble de Julia K_c associé à P_c soit connexe.





Benoît Mandelbrot (1924-2010)



Adrien Douady (1935-2006)

Un ensemble fractal de dimension 3 :
le Mandelbulbe de degré $p = 8$



L'équation du Mandelbulbe de degré p

White et Nylander ont donné la formule suivante en coordonnées sphériques dans \mathbb{R}^3

$$\langle x, y, z \rangle^p = r^p \langle \cos(p\theta) \cos(p\phi), \sin(p\theta) \cos(p\phi), \sin(p\phi) \rangle$$

$$\text{où } \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \theta = \arctan(y/x) \\ \text{et } \phi = \arctan(z/\sqrt{x^2 + y^2}) = \arcsin(z/r). \end{cases}$$

pour la p -ième puissance du nombre hypercomplexe 3D.

Comme pour l'ensemble de Mandelbrot plan, on regarde les domaines de convergences des suites obtenues par itération de $w \mapsto w^p + c$ où w et c sont des nombres "hypercomplexes" $w = \langle x, y, z \rangle$ dans \mathbb{R}^3 et $w \mapsto w^p$ l'application définie ci-dessus

<http://www.skytopia.com/project/fractal/2mandelbulb.html>

Logiciels / références utilisés

- Logiciel de présentation : **L^AT_EX Beamer**
texlive : <http://www.tug.org/texlive/>
- Systèmes de Lindenmayer :
lsysexp : <http://www.sourceforge.org/Graphics/Fractals/lsysexp-latest.tar.gz>
xfractint : <http://www.fractint.org/ftp/current>
- Fractales :
xfractint et
xaos : <http://wmi.math.u-szeged.hu/xaos/doku.php>
mandelbulber : <http://sourceforge.net/projects/mandelbulber/>
- Images et photographies : **Wikipedia**