Équations de la Physique Mathématique et Géométrie algébrique

Jean-Pierre Demailly

Institut Fourier, Université de Grenoble I, France

25 novembre 2008 / Académie des Sciences de Paris

Précurseurs / XIXe siècle

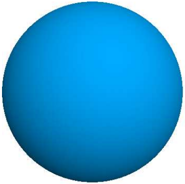
Grande floraison déjà au XIXe siècle :

- nombres complexes, arithmétique, astronomie (C.F. Gauss)
- relations profondes entre topologie, calcul différentiel et fonctions holomorphes (A. Cauchy, B. Riemann)
- formule de Green, lien avec l'électricité et le magnétisme
- existence des applications conformes / principe de Dirichlet

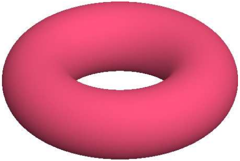
Précurseurs / XXe siècle

- H. Poincaré ($\sim$ 1900): topologie différentielle, systèmes dynamiques
- A. Einstein ($\sim$ 1915) : équations de la relativité générale
- W.V.D. Hodge (1935-1950): opérateurs elliptiques, théorie L^2 et analyse globale sur les variétés.
- K. Kodaira (1950-1960) : exploitation d'une formule de courbure fondamentale introduite par Bochner, théorèmes d'annulation.
- L. Hörmander (1960-1970) : EDP et extension de la théorie de Kodaira aux variétés pseudoconvexes.

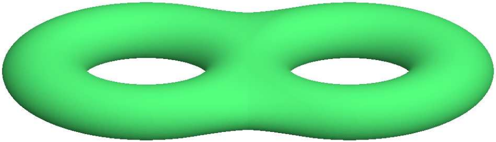
Variétés analytiques complexes



$g = 0\,,\ K_X < 0$
(courbure positive)



$g = 1\,,\ K_X = 0$
(courbure nulle)



$g > 1\,,\ K_X > 0$
(courbure négative)

- $K_X = \Lambda^n T_X^*: \quad f(z)\,dz_1 \wedge \ldots \wedge dz_n$
- Si $n = 1$, $\deg(K_X) = 2g - 2$.

Formes différentielles complexes

- Formes différentielles complexes

$$u = \sum_{|I|=p,|J|=q} u_{IJ}(z)\, dz_I \wedge d\overline{z}_J$$

$$dz_I = dz_{i_1} \wedge \ldots \wedge dz_{i_p}, \quad u_{IJ}(z) \ \text{classe}\ C^\infty.$$

- Opérateurs ∂, $\overline{\partial}$.
  On $\overline{\partial}^2 = 0$.
  On note $H^{p,q}(X, \mathbb{C})$ les groupes de cohomologie associés (cohomologie de Dolbeault).

Fibrés vectoriels holomorphes, courbure

- Soit $E \to X$ un fibré vectoriel holomorphe.
  On s'intéresse aux connexions de la forme
  $$Du \simeq du + A \wedge u \qquad \text{avec}$$
  $$u = \sum_{|I|=p, |J|=q, 1 \le \lambda \le r} u_{IJ\lambda}(z)\, dz_I \wedge d\overline{z}_J \otimes e_\lambda$$
  où A est une matrice de $(1,0)$-formes.
  comme $d = \partial + \overline{\partial}$, on a $D = D^{1,0} + D^{0,1}$ avec $D^{0,1} = \overline{\partial}$.
- **Fait fondamental.** *Si $E \to X$ est muni d'une structure hermitienne h, il existe une unique connexion D de ce type, $D = D_h$, telle que $D_h(h) = 0$. On l'appelle connexion de Chern.*
- **Formule :** $A = H^{-1}\partial H$ (H matrice de la métrique h).
- **Groupes de Dolbeault :** $H^{p,q}(X, E)$ ($\overline{\partial}$-cohomologie).
  $H^{p,0}(X, E) =$ sections holomorphes de $\Lambda^p T^*_X \otimes E$.

Courbure et théories de jauge

- **Courbure :** $D^2u = \Theta \wedge u$ où $\Theta = \overline{\partial}(H^{-1}\partial H)$
- **Théories de jauge et électromagnétisme.**
- Si $E \to X$ est de rang 1, on note $H = (e^{-\varphi})$.
  Alors
  $$\Theta = \partial\overline{\partial}\varphi = \sum_{j,k} \frac{\partial^2\varphi}{\partial z_j \partial \overline{z}_k} dz_j \wedge d\overline{z}_k.$$
- On dit que la courbure est semi-positive (et que le poids φ est plurisousharmonique) si la matrice $\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial z_j \partial \overline{z}_k}\right)$ est semi-positive.
  La plurisouharmonicité est l'analogue complexe de la convexité, caractérisée quant à elle par la condition
  $$\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_j \partial x_k}\right) \geq 0.$$

Variétés hermitiennes et kählériennes

- **Variétés hermitiennes.** Soit
$$\omega = i \sum_{1\le j,k\le n} \omega_{j,k} dz_j \wedge d\overline{z}_k$$
une $(1,1)$-forme, (ω_{jk}) matrice définie positive,
vue comme métrique riemannienne de type hermitien
$$ds^2 = \|\xi\|_h^2 = \sum_{1\le j,k\le n} \omega_{j,k}(z)\xi_j\overline{\xi}_k, \qquad \xi \in T_{X,z}.$$
- La métrique ω est dite kählérienne si $d\omega = 0$
(structure à la fois hermitienne et symplectique).
- **Très beaux exemples:**
  – Tores complexes $X = \mathbb{C}^n/\Lambda$.
  – Espace projectif et variétés projectives
$$\omega_{\mathrm{FS}} = i\partial\overline{\partial}\log(1+|z|^2) > 0 \qquad \text{(Fubini-Study).}$$

Théorie L^2, formes harmoniques

- Étant donné (X,ω) et un fibré $E \to X$ muni de h, on considère la norme L^2 globale

$$\|u\|^2_{\omega,h} = \int_X |u|^2_{\omega,h} dV_\omega.$$

- Opérateurs de Laplace-Beltrami complexe :

$$\Delta = D^{1,0}D^{1,0\,*} + D^{1,0\,*}D^{1,0}$$

$$\overline{\Delta} = D^{0,1}D^{0,1\,*} + D^{0,1\,*}D^{0,1} = \overline{\partial}\overline{\partial}^* + \overline{\partial}^*\overline{\partial}.$$

- **Théorie de Hodge.** Sur le fibré trivial $E = X \times \mathbb{C}$ avec courbure nulle, si de plus on a $d\omega = 0$, alors $\overline{\Delta} = \Delta$.
- **Conséquence : décomposition de Hodge**

$$H^k_{\mathrm{DR}}(X,\mathbb{C}) = \bigoplus_{p+q=k} H^{p,q}(X,\mathbb{C}).$$

Formule de Bochner-Kodaira-Nakano

- **Formule BKN (1953-1955).** En supposant $d\omega = 0$, on a pour $u \in C^\infty_c(X, \Lambda^{p,q} T^*_X \otimes E)$:
$$\overline{\Delta} = \Delta + A^{p,q}_{E,h,\omega}$$
où $A^{p,q}_{E,h,\omega}$ est un tenseur qui dépend principalement de la courbure $\Theta_{E,h}$ de (E,h) et (moins essentiellement) de la métrique kählérienne ω.
-
$$\begin{aligned}\langle\langle u, \overline{\Delta} u\rangle\rangle &= \|D^{0,1}u\|^2 + \|D^{0,1\,*}u\|^2 \\ &= \|D^{1,0}u\|^2 + \|D^{1,0\,*}u\|^2 + \int_X \langle u, A^{p,q}_{E,h,\omega}u\rangle\, dV_\omega \\ &\geq \int_X \langle u, A^{p,q}_{E,h,\omega}u\rangle\, dV_\omega.\end{aligned}$$
- **Corollaire (Kodaira).** *Si X est compacte, si E est de rang 1 et si la courbure de E est positive, alors $H^{p,q}(X,E) = 0$ pour $p+q > n = \dim X$.*

Généralisations

- **Cas de variétés non compactes, pseudoconvexes :** $\sim$ 1965 Kohn, Hörmander, Andreotti, Vesentini
- **Cas de métriques présentant des singularités :**

$$h(z) = \frac{1}{(\sum |g_j|^2)^c}, \qquad \varphi(z) = c \log \sum |g_j|^2$$

avec g_j holomorphe (Bombieri 1970).

- **Théorème ([D], 1982).** Estimations L^2 sur une variété kählérienne complète, en présence de singularités quelconques : *si la courbure du fibré E est "positive au sens de Nakano", on peut résoudre $\overline{\partial} u = v$ en tout bidegré (n, q), $q \geq 1$, avec estimation de la forme*

$$\int_X |u|^2 e^{-\varphi} dV_\omega \leq \int_X \frac{1}{\lambda_1 + \ldots + \lambda_q} |v|^2 e^{-\varphi} dV_\omega$$

où $\lambda_1, \ldots, \lambda_q$ sont les valeurs propres de courbure.

Généralisations (suite)

- **"Faisceaux multiplicateurs"**
  Si φ est une fonction plurisusharmonique présentant des singularités quelconques, l'ensemble $\mathcal{I}(\varphi)$ des germes de fonctions holomorphes f telles que $\int |f|^2 e^{-\varphi} < +\infty$ constitue un faisceau cohérent. (A. Nadel, [D], $\sim$ 1989).

- **Théorème.** *Si la courbure d'un fibré en droites $(E, h = e^{-\varphi})$ est strictement positive, on a*

$$H^{n,q}(X, E \otimes \mathcal{I}(\varphi)) = H^{0,q}(X, K_X \otimes E \otimes \mathcal{I}(\varphi)) = 0.$$

- **Cas de métriques non kählériennes ($d\omega \neq 0$) :**
  il apparaît des "termes de torsion", qui sont explicitables et peuvent être réorganisés comme perturbation de la courbure ([D], 1984).

Inégalités de Morse holomorphes

- On cherche à évaluer asymptotiquement quand $k \to +\infty$ les groupes de cohomologie
$$H^{p,q}(X, E^{\otimes k})$$
où (E, h) est un fibré holomorphe hermitien.
- Lorsque $X = \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ et $E = \mathcal{O}(1)$ (fibré en droites tautologique), on a
$$H^{0,0}(X, E^{\otimes k}) = \text{polynômes homogènes de degré } k \text{ sur } \mathbb{C}^{n+1}$$
- **Observation.** La courbure de $(E^{\otimes k}, h^{\otimes k}) = (E^{\otimes k}, e^{-k\varphi})$ est $k\times$ courbure de E.
Localement le laplacien antiholomorphe $\overline{\Delta}$
peut se réduit à une somme directe de modèles approchés unidimensionnels de la forme $\dfrac{-d^2u}{dx^2} + (kx)^2 u$
("oscillateur harmonique")

Inégalités de Morse holomorphes (suite)

- On peut faire la théorie spectrale locale :

$$x = \frac{1}{\sqrt{k}}\xi \quad \Longrightarrow \quad \frac{-d^2u}{dx^2} + (kx)^2 u \longmapsto k\Big(\frac{-d^2u}{d\xi^2} + \xi^2 u\Big)$$

Phénomène de “localisation” dans les longueurs d'onde de taille $\sim 1/\sqrt{k}$.

- **Théorème.** ([D], 1985) *Si $h = e^{-\varphi}$, on a*

$$H^{0,q}(X, E^{\otimes k}) \leq \frac{k^n}{n!}\int_{X(E,h,q)} \Big(\frac{i}{2\pi}\partial\overline{\partial}\varphi\Big)^n + o(k^n)$$

où $X(E,h,q)$ désigne l'ouvert où la courbure $\partial\overline{\partial}\varphi$ de E est de signature $(n-q,q)$.

- **Théorème** (Thèse Bonavero 1996)
Résultat analogue pour

$$H^{0,q}(X, E^{\otimes k} \otimes \mathcal{I}(k\varphi))$$

Équations d'Einstein

- **Courbure de Ricci** Si $\omega = i\sum_{j,k}\omega_{jk}(z)dz_j \wedge d\bar{z}_k$,
$$\mathrm{Ricci}_\omega = -\frac{i}{2\pi}\partial\bar\partial \log\det(\omega_{jk}).$$
- **Équations de "Kähler-Einstein"**
$$\mathrm{Ricci}_\omega = \lambda\omega$$
où λ constante réelle.
Cas $\lambda < 0$: importants travaux de Th. Aubin (existence si $c_1(X) < 0$, solution unique, 1976)
- Très nombreux travaux depuis: Yau, Siu, Tian, Nadel, ...
- **Cas $\lambda > 0$:** suppose $K_X^{-1} > 0$ ("X variété de Fano")
La solution n'existe pas toujours. Si elle existe, elle est unique modulo $\mathrm{Aut}(X)$ (Bando-Mabuchi, 1985).

Équations d'Einstein (suite)

- Dans le cas $\lambda > 0$, ce qui empêche l'existence est l'apparition de singularités logarithmiques dans le potentiel de $\omega = \omega_0 + i\partial\overline{\partial}\varphi$.
- **Théorème** (Demailly-Kollár, 1996-2000)
  L'intégrale $\varphi \mapsto \int_K e^{-\varphi}$ est continue pour la topologie de la convergence faible, dans la région où $\int_K e^{-(1+\varepsilon)\varphi} < +\infty$.
  Il en résulte un théorème d'existence de métriques Kähler-Einstein qui a donné lieu à de très nombreux calculs (par exemple, variétés à singularités quotients).
- **Création de "trous noirs"** (Demailly-Paun, 2000-2008)
  Équations de Monge-Ampère de la forme

$$(\omega_0 + i\partial\overline{\partial}\varphi)^n = f + \sum c_j \delta_{x_j}$$

Conséquence: structure du cône de Kähler ...