MAJORATION STATISTIQUE DE LA COURBURE

D'UNE VARIÉTÉ ANALYTIQUE

Par Jean-Pierre DEMAILLY et Bernard GAVEAU

0 - INTRODUCTION

L'objet de ce travail est d'étudier la croissance de la courbure de Ricci d'une sous-variété analytique dans un ouvert strictement pseudoconvexe borné $\Omega \subset \mathbb{C}^n$. Une telle étude avait déjà été entreprise dans [5], [4] pour le cas des diviseurs de la boule de $\mathbb{C}^2$ ou $\mathbb{C}^3$. De manière générale, étant donné une application analytique $F = (F_1, \ldots, F_p) : \Omega \to \mathbb{C}^p$ ayant une certaine croissance, on regarde si la courbure des surfaces de niveau de F peut-être estimée. En codimension $p > 1$, on sait que la croissance de l'aire d'une surface de niveau prise isolément n'est pas reliée à la croissance de F (cf.[2]), mais que l'estimation de l'aire subsiste néanmoins en moyenne (cf.[7]). On est donc amené à étudier de même des majorations statistiques de la courbure.

Pour tout $\zeta \in \mathbb{C}^p$, on considère la surface de niveau $X_\zeta = F^{-1}(\zeta)$. La variété X_ζ sera supposée sans singularités. On munit alors X_ζ de la métrique kählérienne $\alpha = \frac{1}{4} dd^c |z|^2$ induite par la métrique euclidienne usuelle de $\mathbb{C}^n$, et on désigne par R la forme de courbure de Ricci correspondante de X_ζ (la définition précise est donnée au §3). Nous montrons le résultat suivant.

Théorème 1. Soit $\delta(z) = d(z, \partial\Omega)$ la distance de z au bord $\partial\Omega$. On suppose que $F_1, \ldots, F_p$ sont bornées. Alors pour tout entier $q = 0, 1, \ldots, n-p$ on a l'estimation

$$\int_{\zeta \in \mathbb{C}^p} d\lambda(\zeta) \int_{X_\zeta} \delta^{p+q} \, [\mathrm{Log}(1 + 1/\delta)]^{-q} \, R^q \wedge \alpha^{n-p-q} < +\infty$$

avec $d\lambda$ = mesure de Lebesgue de $\mathbb{C}^p$.

Une estimation plus générale valable pour un ordre de croissance quelconque des fonctions F_j sera énoncée dans le th. 3.6. Le th. 1 equivaut respectivement pour $q = o$, $q = 1$, $q = \dim X_\zeta = n-p$ à une majoration de l'aire, de la courbure scalaire $K = \mathrm{trace}(R)$, et de la courbure totale $\Gamma = || R^{n-p}/_{(n-p)!} ||$ de X_ζ. Lorsque q est quelconque, on a simplement une estimée des fonctions symétriques élémentaires des courbures principales de X (= valeurs propres de la forme R). La démonstration consiste essentiellement à effectuer de multiples intégrations par parties, en exploitant le fait qu'on dispose d'un bon contrôle du potentiel de la forme R. Même en codimension $p = 1$, il semble peu probable qu'on puisse obtenir une version individuelle du th. 1 (i.e. pour tout ζ, $\int_{X_\zeta} (\cdots) < +\infty$) : les résultats obtenus dans [3] indiquent que la croissance des singularités d'une hypersurface quelconque n'est pas liée à la croissance de l'équation.

Dans le dernier paragraphe, on montre que la courbure totale d'une hypersurface vérifie une équation de type Monge-Ampère, généralisant ainsi le résultat analogue de [4] dans le cas des courbes et des surfaces.

Théorème 2. Soit X une hypersurface de Ω dont la courbure totale Γ n'est identiquement nulle sur aucune composante de X. Alors Γ vérifie l'équation

$$i\partial\overline{\partial}\ \mathrm{Log}\ \Gamma = -(n+1)\ R + 2\pi[Z]$$

où $[Z]$ est le diviseur des zéros de Γ.

Cette formule pourrait s'avérer utile pour obtenir des estimées fines de Γ et de ses dérivées covariantes, en utilisant la théorie du potentiel le long de l'hypersurface X elle-même.

1. MAJORATION DE L'AIRE D'UN DIVISEUR.

Les résultats de ce paragraphe sont tout à fait classiques. Nous avons préféré cependant reproduire l'essentiel des démonstrations, d'une part pour fixer les notations, et d'autre part parce que nous aurons besoin de toute façon des éléments techniques qui interviennent ici.

Soit $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ un ouvert strictement pseudoconvexe borné de classe C^2. On sait qu'il existe une fonction $\rho \in C^2\ (\overline{\Omega})$ ayant les propriétés suivantes :

(1.1) $\rho < 0$ sur Ω ;

(1.2) $\rho = 0$, $d\rho \neq 0$ sur le bord $\partial\Omega$;

(1.3) ρ est strictement plurisousharmonique (p.s.h. en abrégé) sur $\overline{\Omega}$.

On pose $\beta = dd^c\rho = 2i\partial\overline{\partial}\rho$ où $d^c = i(\overline{\partial} - \partial)$, et pour tout $a < 0$ on définit :

$\Omega\ (a) = \{z \in \Omega\ ;\ \rho(z) < a\}$, $S(a) = \{z \in \Omega\ ;\ \rho(z) = a\}$.

Soit $a_o < 0$ tel que $d\rho \neq 0$ pour $\rho \geqslant a_o$. L'ensemble $S(a)$, $a \geqslant a_o$, est donc une sous-variété compacte de classe C^2 , canoniquement orientée par la forme volume $d^c\rho \wedge \beta^{n-1}$. Dans l'intégrale du th. 1, il sera commode de remplacer la distance au bord δ par $|\rho|$ et la (1.1) forme $\alpha = \frac{1}{4}\,dd^c|z|^2$ par β (il existe en effet des constantes $C_1 > C_2 > 0$ telles que $C_2\delta \leqslant |\rho| \leqslant C_1\delta$ et $C_2\alpha \leqslant \beta \leqslant C_1\alpha$ sur $\overline{\Omega}$). Nous serons alors amenés à effectuer de multiples intégrations par parties du type suivant.

<u>Lemme 1.1.</u> Soit X une sous-variété analytique fermée de codimension p dans Ω, V une fonction p.s.h. sur X, θ une forme fermée de bidegré $(n-p-1,\ n-p-1)$ à coefficients continus sur X. On se donne une fonction $\chi :]-\infty, 0] \to \mathbb{R}$ convexe décroissante, de classe C^2 sur $]-\infty, 0[$, telle que $\chi(0) = \chi'(0) = 0$.

$$(1.4)\quad \int_X \chi(\rho)\, dd^c V \wedge \theta = -\int_X V|\chi'(\rho)|\, dd^c\rho \wedge \theta + \int_X V\chi''(\rho)\, d\rho \wedge d^c\rho \wedge \theta$$

sous réserve que les trois intégrales soient absolument convergentes.
Dans le cas particulier $X = \Omega$, $p = 0$, on obtient pour tout $a \in [a_o, 0[$:

$$(1.5)\quad \int_{\Omega(a)} (a-\rho)\, dd^c V \wedge \theta = \int_{S(a)} V d^c\rho \wedge \theta - \int_{\Omega(a)} V\, dd^c\rho \wedge \theta.$$

<u>Démonstration.</u> Pour vérifier (1.4), on commence par tronquer les intégrales en remplaçant X par $X \cap \Omega(a)$ et χ par $\chi_a(t) = \chi(t) - \chi(a) - \chi'(a)\,(t-a)$, $a < 0$, puis on passe à la limite quand $a \to 0$. Grâce aux procédés standards de régularisation, on se ramène également au cas où ρ, θ, V sont de classe C^∞. La formule (1.4) s'obtient alors à partir des identités :

$$\begin{aligned}(1.6)\quad d[\chi_a(\rho) d^c V \wedge \theta] &= \chi_a(\rho)\, dd^c V \wedge \theta + \chi_a'(\rho)\, d\rho \wedge d^c V \wedge \theta \\ &= \chi_a(\rho)\, dd^c V \wedge \theta + \chi_a'(\rho)\, dV \wedge d^c\rho \wedge \theta,\end{aligned}$$

$$(1.7)\quad d[V\chi_a'(\rho) d^c\rho \wedge \theta] = \chi_a'\, dV \wedge d^c\rho \wedge \theta + V\chi_a'(\rho)\, dd^c\rho \wedge \theta + V\chi_a''(\rho)\, d\rho \wedge d^c\rho \wedge \theta$$

en appliquant deux fois la formule de Stokes. L'égalité $d\rho \wedge d^c V \wedge \theta = dV \wedge d^c\rho \wedge \theta$ utilisée implicitement dans (1.7) se démontre en observant que la 2-forme $d\rho \wedge d^c V - dV \wedge d^c\rho$ ne contient pas de terme de bidegré $(1,1)$. Les intégrales de bord sont nulles car $\chi_a(a) = \chi_a'(a) = 0$. La vérification de (1.5) est analogue à celle de (1.4) avec $X = \Omega$ et $\chi_a(t) = a - t$, mais ici (1.7) fait apparaître l'intégrale de bord $\int_{S(a)} Vd^c\rho\wedge\theta$. □

Lemme 1.2. Soit T un courant $\geqslant 0$ fermé de bidegré $(n-p-1,\ n-p-1)$ sur X et $\chi :]-\infty,0[\longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction décroissante de classe C^1 telle que $\chi(0_-) = 0$. Alors

$$(1.8)\qquad \int_X |\chi'(\rho)|d\rho\wedge d^c\rho\wedge T = \int_X \chi(\rho)\, dd^c\rho\wedge T.$$

La démonstration est semblable à celle du lemme 1.1. On applique la formule de Stokes sur $X\cap\Omega(a)$ en écrivant

$d[\chi_a(\rho)\, d^c\rho\wedge T = \chi_a(\rho)\, dd^c\rho\wedge T + \chi'_a(\rho)\, d\rho\wedge d^c\rho\wedge T$ avec $\chi_a(t) = \chi(t)-\chi(a)$. □

Lorsque V est une fonction p.s.h., on sait que les moyennes de $V_+ = \sup(V,o)$ sur les pseudo-sphères $S(a)$ majorent les moyennes de $V_- = \sup(-V,0)$. De façon précise :

Lemme 1.3. Soit η une fonction croissante $\geqslant 0$ sur l'intervalle $[a_o,0[$. On suppose que la fonction p.s.h. V vérifie une condition de croissance au bord du type

$$\int_{S(a)} V_+\, d^c\rho\wedge\beta^{n-1} \leqslant \eta(a)\ ,\quad a\in [a_o,0[\,.$$

Alors il existe une constante $C_1 > 0$ telle que

$$(1.9)\qquad \int_{S(a)} V_-\, d^c\rho\wedge\beta^{n-1} \leqslant C_1\,(\eta(a) + ||V_-||_o)\ ,$$

où $a\in [a_o,0[$ et $||V_-||_o = \int_{\Omega(a_o)} V_-\,\beta^n$.

Démonstration. En choisissant pour θ la $(n-1,n-1)$- forme positive $\theta = \beta^{n-1}$ la formule (1.5) entraîne

(1.10) $\displaystyle\int_{S(a)} V_+ d^c\rho \wedge \beta^{n-1} - \int_{S(a)} V_- d^c\rho \wedge \beta \quad - \int_{\Omega(a)} V\beta^n \geqslant 0$

(1.11) $\displaystyle\int_{S(a)} V_- d^c\rho \wedge \beta^{n-1} \leqslant \eta(a) + \int_{\Omega(a)} V_- \quad \beta^n.$

Puisque $d\rho \neq 0$ pour $\rho \geqslant a_o$, il existe une constante $C_2 > 0$ telle que

(1.12) $\beta^n \leqslant C_2 \quad d\rho \wedge d^c\rho \wedge \beta^{n-1}$ sur $\Omega \setminus \Omega(a_o)$.

Posons $\lambda(a) = \displaystyle\int_{S(a)} V_- d^c\rho \wedge \beta^{n-1}$. Pour $a \geqslant a_o$, l'égalité (1.11) implique

$$\lambda(a) \leqslant \eta(a) + ||V_-||_o + C_2 \int_{\Omega(a) \setminus \Omega(a_o)} V_- d\rho \wedge d^c\rho \wedge \beta^{n-1}$$

$$= \eta(a) + ||V_-||_o + C_2 \int_{a_o}^{a} \lambda(t)\,dt.$$

Il suffit maintenant de reproduire la démonstration du lemme de Gronwall. La formule de Stokes montre que la fonction λ est continue sur $[a_o, 0[$, car $dV_- = dV_+ - dV$ est à coefficients L^1_{loc}. En posant $\Lambda(a) = e^{-C_2 a} \displaystyle\int_{a_o}^{a} \lambda(t)\,dt$, il vient :

$$\Lambda'(a) = e^{-C_2 a} (\lambda(a) - C_2 \int_{a_o}^{a} \lambda(t)\,dt) \leqslant e^{-C_2 a_o}(\eta(a) + ||V_-||_o).$$

Comme η est croissante, on obtient donc

$$\Lambda(a) \quad \leqslant \quad e^{-C_2 a_o} (a - a_o) (\eta(a) + ||V_-||_o) \ ,$$

d'où $\lambda(a) \leqslant C_1 (\eta(a) + ||V_-||_o)$ avec $C_1 = 1 + C_2|a_o| \ e^{-C_2 a_o}$. □

Certaines classes de fonctions holomorphes seront d'un intérêt tout particulier dans la suite.

<u>Définition 1.4</u>. Soit $\eta : [-\infty, 0[\to \mathbb{R}$ une fonction croissante > 0 de classe C^1.

On définit les classe $A_\eta(\Omega) \subset N_\eta(\Omega)$ de fonctions holomorphes sur Ω par les conditions suivantes :

(1.13) $F \in A_\eta(\Omega)$ si et seulement si il existe une constante $M \geqslant 0$ telle que

$$\operatorname{Log} |F(z)| \leqslant M \ \eta(\rho(z)) \quad , \quad z \in \Omega \quad ;$$

(1.14) $F \in N_\eta(\Omega)$ si et seulement si il existe une constante $m \geqslant 0$ telle que

$$\int_{S(t)} \operatorname{Log}_+ |F(z)| \ d^c \rho \wedge \beta^{n-1} \leqslant m \ \eta(t) \quad , \quad t \in [a_o, 0[.$$

On considère sur $A_\eta(\Omega)$, $N_\eta(\Omega)$ les fonctionnelles

$$(1.15) \quad \begin{cases} \phi_\eta(F) = M_\eta(F) + \| \operatorname{Log}_- |F| \, \|_o \ , \\ \varphi_\eta(F) = m_\eta(F) + \| \operatorname{Log}_- |F| \, \|_o \ , \end{cases}$$

$M_\eta(F)$ et $m_\eta(F)$ étant respectivement les plus petites constantes possibles M,m dans (1.13) et (1.14).

La classe $N_\eta(\Omega)$ correspondant à $\eta \equiv 1$ est usuellement dénommée classe de Nevanlinna (d'où la notation). Cette classe intervient de manière naturelle lorsqu'on cherche à obtenir des majorations de l'aire d'un diviseur (cf [1] , [6]).

<u>Théorème 1.5.</u> Soit $F \in N_\eta(\Omega)$ et $[Z]$ le diviseur des zéros de F. Etant donné $\varepsilon > 0$, on considère la fonction convexe de classe C^2 :

$$\chi(t) = \int_t^0 \frac{du}{\eta(u)^{1+\varepsilon}} \quad , \ t < 0.$$

Il existe des constantes $C_3(\varepsilon)$, $C_4(\varepsilon) > 0$ indépendantes de F telles que :

(1.16) Condition de Blaschke : $\displaystyle\int \chi(\rho) \ [Z] \wedge \beta^{n-1} \leqslant C_3(\varepsilon) \ \varphi_\eta(F)$;

(1.17) Condition de Malliavin : $\int \frac{1}{\eta(\rho)^{1+\varepsilon}} [Z] \wedge d\rho \wedge d^c\rho \wedge \beta^{n-2} \leqslant C_4(\varepsilon)\, \varphi_\eta(F)$.

La démonstration repose essentiellement sur l'équation de Lelong-Poincaré

(1.18) $[Z] = \frac{1}{2\pi} dd^c \operatorname{Log}|F|$ et sur les formules d'intégration par parties des lemmes 1.1 et 1.2. Avec $X = \Omega$ et $T = [Z] \wedge \beta^{n-2}$ le lemme 1.2 montre que

$$\int \frac{1}{\eta(\rho)^{1+\varepsilon}} [Z] \wedge d\rho \wedge d^c\rho \wedge \beta^{n-2} = \int \chi(\rho)\ [Z] \wedge \beta^{n-1}.$$

Les conditions de Blaschke et de Malliavin sont donc équivalentes. Raisonnons d'abord dans le cas où η est non bornée, c'est-à-dire $\chi'(0) = 0$. D'après l'équation (1.18) et le lemme 1.1 (1.4) il vient :

$$2\pi \int \chi(\rho)\, [Z] \wedge \beta^{n-1} = - \int_\Omega \operatorname{Log}|F| . |\chi'(\rho)|\ dd^c\rho \wedge \beta^{n-1} + \int_\Omega \operatorname{Log}|F|\, \chi''(\rho)\ d\rho \wedge d^c\rho \wedge \beta^{n-1}$$

$$\leqslant \int_\Omega \operatorname{Log}_-|F| . |\chi'(\rho)|\ \beta^n + \int_\Omega \operatorname{Log}_+|F|\ \chi''(\rho)\ d\rho \wedge d^c\rho \wedge \beta^{n-1}. \tag{1.19}$$

L'hypothèse $F \in N_\eta(\Omega)$ entraîne que

$$\int_{S(a)} \operatorname{Log}_+ |F|\ d^c\rho \wedge \beta^{n-1} \leqslant \eta(a)\, \varphi_\eta(F) \quad , \quad a \in [a_o, 0[.$$

L'inégalité (1.10) appliquée à $V = \operatorname{Log}_+ |F|$ donne alors

$$\int_{\Omega(a_o)} \operatorname{Log}_+|F|\ \beta^n \leqslant \int_{S(a_o)} \operatorname{Log}_+|F|\ d^c\rho \wedge \beta^{n-1} \leqslant \eta(a_o)\, \varphi_\eta(F), \text{ d'où}$$

$$\int_{\Omega(a_o)} \operatorname{Log}_-|F| . |\chi'(\rho)|\ \beta^n + \int_{\Omega(a_o)} \operatorname{Log}_+ |F|\ \chi''(\rho)\ d\rho \wedge d^c\rho \wedge \beta^{n-1} \leqslant C_5\, \varphi_\eta(F). \tag{1.20}$$

D'après (1.12), les intégrales analogues sur $\Omega \setminus \Omega(a_o)$ sont majorées par :

$$\int_{\Omega \setminus \Omega(a_o)} (\mathrm{Log}_-|F| .\ C_2|\chi'(\rho)| + \mathrm{Log}_+ |F|\ \chi''(\rho))\ d\rho \wedge d^c\rho \wedge \beta^{n-1} ,$$

soit encore, grâce au théorème de Fubini, par

$$(1.21) \quad C_2 \int_{a_o}^{0} |\chi'(t)|dt \int_{S(t)} \mathrm{Log}_-|F|\ d^c \rho \wedge \beta^{n-1}$$

$$(1.22) \quad + \int_{a_o}^{0} \chi''(t)\ dt \int_{S(t)} \mathrm{Log}_+|F|\ d^c \rho \wedge \beta.$$

On a $\chi'' = -(1+\varepsilon)\eta'\ \eta^{-2-\varepsilon}$, donc (1.22) $\leqslant$ (1.23) avec

$$(1.23) = \int_{a_o}^{0} \chi''(t)dt \times \eta(t)\ \varphi_\eta(F) = \frac{1 + 1/\varepsilon}{\eta^\varepsilon(a_o)} \varphi_\eta(F) \leqslant C_6\ \varphi_\eta(F).$$

Enfin, le lemme 1.3 montre que

$$\int_{S(t)} \mathrm{Log}_-|F|\ d^c\rho \wedge \beta^{n-1} \leqslant C_1(\eta(t)\varphi_\eta(F) + ||\mathrm{Log}_-|F|\ ||_o) ,$$

donc l'intégrale (1.21) est inférieure à

$$(1.24) = C_1\ C_2 \int \frac{dt}{\eta^{1+\varepsilon}(t)} (\eta(t)\ \varphi_\eta(F) + ||\mathrm{Log}_-\ |F|\ ||_o \leqslant C_7\varphi_\eta(F).$$

La condition (1.16) résulte alors de (1.19), (1.20) et des inégalités (1.21) $\leqslant$ (1.24), (1.22) $\leqslant$ (1.23). Lorsque η est bornée, on applique (1.5) au lieu de (1.4), ce qui fait apparaître le terme de bord

$$\int_{S(a)} \mathrm{Log}\ |F|\ d^c\rho \wedge \beta^n \leqslant \eta(a)\ \varphi_\eta(F) \leqslant C_8\ \varphi_\eta\ (F).\square$$

<u>Remarque 1.6.</u> Pour $\eta \equiv 1$, on trouve la condition de Blaschke classique

$$\int |\rho|\ [Z] \wedge \beta^{n-1} < + \infty .$$

2. MAJORATION STATISTIQUE DE L'AIRE D'UNE SOUS-VARIÉTÉ.

Nous allons maintenant étudier le problème de la majoration de l'aire d'une variété intersection complète de codimension quelconque. Soit $F = (F_1, \dots, F_p) : \Omega \to \mathbb{C}^p$ une application analytique. Si $\zeta \in \mathbb{C}^p$, on note X_ζ la surface de niveau $X_\zeta = F^{-1}(\zeta)$. D'après le théorème de Sard, la variété X_ζ est sans singularités pour presque tout $\zeta \in \mathbb{C}^p$. L'estimation du théorème 1.5 n'est plus vraie en général pour chaque surface X_ζ fixée (cf. [2]), mais on a la version statistique suivante, inspirée de [7].

Théorème 2.1. Soient $F_1 \in N_{\eta_1}(\Omega)$, $F_2 \in A_{\eta_2}(\Omega), \dots, F_p \in A_{\eta_p}(\Omega)$ ($\eta_1, \dots, \eta_p \in \mathscr{C}^1(]-\infty,0[$ étant des fonctions croissantes > 0).

Pour tout $\varepsilon > 0$ on pose

$$\chi_p(t) = \frac{1}{(p-1)!} \int_t^0 \frac{(u-t)^{p-1}\, du}{(\eta_1^{1+\varepsilon}\eta_2 \dots \eta_p)(u)}, \quad t \leqslant 0.$$

Il existe une constante $C(p,\varepsilon) > 0$ telle que

$$(2.1) \qquad \int_{\zeta \in \mathbb{C}^p} (1+|\zeta|^2)^{-p-\varepsilon}\, d\lambda(\zeta) \int_{X_\zeta} \chi_p(\rho)\, \beta^{n-p} \leqslant C(p,\varepsilon) \quad B(F)$$

avec $B(F) = (1 + m_{\eta_1}(F_1)) \prod_{j=2}^{p} (1+M_{\eta_j}(F_j))$, cf. définition 1.4.

Démonstration. Par récurrence sur p. Considérons d'abord le cas $p = 1$, $\eta = \eta_1$, $F = F_1$, l'hypersurface X_ζ étant définie par $F - \zeta = 0$. D'après le théorème 1.5, il suffit de vérifier :

$$(2.2) \qquad \int_{\zeta \in \mathbb{C}} (1 + |\zeta|^2)^{-1-\varepsilon} \varphi_\eta(F-\zeta)\, d\lambda(\zeta) \leqslant C_1(\varepsilon)\ (1 + \varphi_\eta(F)).$$

Par définition, $\varphi_\eta(F) = m_\eta(F) + \| \mathrm{Log}_- |F| \|_0$ où $m_\eta(F)$ est la plus petite constante m qui intervient dans (1.14). Puisque $\mathrm{Log}_+(x+y) \leqslant \mathrm{Log}_+ x + \mathrm{Log}_+ y + \mathrm{Log} 2$ si $x, y \geqslant 0$, il vient

$$m_\eta(F - \zeta) \leqslant m_\eta(F) + C_2(1 + \mathrm{Log}_+|\zeta|) ,$$

$$\int_{\zeta \in \mathbb{C}} (1 + |\zeta|^2)^{-1-\varepsilon} \, m_\eta(F - \zeta) \, d\lambda(\zeta) \leqslant C_3(\varepsilon) \, (1 + m_\eta(F)).$$

En majorant brutalement $(1 + |\zeta|^2)^{-1-\varepsilon}$ par 1, on trouve d'autre part

$$(2.3) \qquad \int_{\zeta \in \mathbb{C}} (1 + |\zeta|^2)^{-1-\varepsilon} \, \mathrm{Log}_-|a - \zeta| \, d\lambda(\zeta) \leqslant C_4 = \int_{|\zeta| < 1} \mathrm{Log} \frac{1}{|\zeta|} \, d\lambda(\zeta),$$

d'où $\displaystyle\int_{\zeta \in \mathbb{C}} (1 + |\zeta|^2)^{-1-\varepsilon} \, \| \mathrm{Log}_- |F - \zeta| \, \|_0 \leqslant C_4 \int_{\Omega(a_0)} \beta^n.$

(2.2) résulte immédiatement de là. Supposons maintenant le théorème démontré pour $p - 1$ (avec $p \geqslant 2$). Posons $\zeta' = (\zeta_1, \ldots, \zeta_{p-1})$, $\zeta = (\zeta', \zeta_p)$, $F' = (F_1, \ldots F_{p-1})$, $X_{\zeta'} = F'^{-1}(\zeta')$. Après remplacement de ε par $\varepsilon/2$, l'hypothèse de récurrence montre que

$$(2.4) \qquad \int_{\zeta' \in \mathbb{C}^{p-1}} (1 + |\zeta'|^2)^{-p+1-\varepsilon/2} \, d\lambda(\zeta') \int_{X_{\zeta'}} \chi_{p-1}(\rho) \, \beta^{n-p+1} \leqslant C_5(\varepsilon) \, B(F').$$

Un calcul immédiat donne :

$$\chi'_1(t) = \frac{-1}{\eta_1^{1+\varepsilon}(t)} \quad , \quad \chi'_p(t) = \frac{-1}{(p-2)!} \int_t^0 \frac{(u-t)^{p-2} \, du}{(\eta_1^{1+\varepsilon} \eta_2 \ldots \eta_p)(u)} \quad , \quad p \geqslant 2 \; ;$$

$$\chi''_2(t) = \frac{1}{(\eta_1^{1+\varepsilon} \eta_2)(t)} \quad , \quad \chi''(t) = \frac{1}{(p-3)!} \int_t^0 \frac{(u-t)^{p-3} \, du}{(\eta_1^{1+\varepsilon} \eta_2 \ldots \eta_p)(u)} \quad , \quad p \geqslant 3 \, .$$

On en déduit pour $p \geqslant 2$ les inégalités

$$(2.5) \quad \begin{cases} |\chi'_p(t)| \leqslant C_6 \, \chi_{p-1}(t) \quad \text{si} \quad t \in [\mathrm{Inf}\rho, 0] \, , \\ \chi''_p(t) \, \eta_p(t) \leqslant |\chi'_{p-1}(t)| \, . \end{cases}$$

Choisissons ζ' tel que $X_{\zeta'}$ soit sans singularités, et ζ_p valeur non critique de la restriction de F_p à X_p. Appliquons le lemme 1.1 (1.4) à $X = X_{\zeta'}$, $V = \frac{1}{2\pi} \operatorname{Log} |F_p - \zeta_p|$, $\Theta = \beta^{n-p}$.

L'équation de Lelong-Poincaré $dd^c V = [X_\zeta]$ considérée sur $X_{\zeta'}$ implique

$$(2.6) \qquad \int_{X_\zeta} \chi_p(\rho)\, \beta^{n-p} = - \int_{X_{\zeta'}} V|\chi_p'(\rho)|\, \beta^{n-p+1} + \int_{X_{\zeta'}} V\chi_p''(\rho)\, d\rho \wedge d^c\rho \wedge \beta^{n-p}$$

$$\leqslant \int_{X_{\zeta'}} \operatorname{Log}_- |F_p - \zeta_p| \cdot |\chi_p'(\rho)|\, \beta^{n-p+1} + \int_{X_{\zeta'}} \operatorname{Log}_+ |F_p - \zeta_p| \cdot \chi_p''(\rho)\, d\rho \wedge d^c\rho \wedge \beta^{n-p}.$$

Comme ci-dessus on voit que

$$\operatorname{Log}_+ |F_p - \zeta_p| \leqslant C_7 (M_{\eta_p}(F_p) + 1 + \operatorname{Log}_+ |\zeta_p|)\, \eta_p(\rho) \ ;$$

les inégalités (2.5) donnent donc la majoration

$$(2.7) \quad \begin{cases} C_6 \displaystyle\int_{X_{\zeta'}} \operatorname{Log}_- |F_p - \zeta_p|\, \chi_{p-1}(\rho)\, \beta^{n-p+1} \\ + C_7\, (M_{\eta_p}(F_p) + 1 + \operatorname{Log}_+ |\zeta_p|) \displaystyle\int_{X_{\zeta'}} |\chi'_{p-1}(\rho)|\, d\rho \wedge d^c\rho \wedge \beta^{n-p}. \end{cases}$$

D'après le lemme 1.2, on a :

$$(2.8) \qquad \int_{X_{\zeta'}} |\chi_{p-1}'(\rho)|\, d\rho \wedge d^c\rho \wedge \beta^{n-p} = \int_{X_{\zeta'}} \chi_{p-1}(\rho)\, \beta^{n-p+1}.$$

On intègre maintenant (2.6) avec le poids $(1+|\zeta|^2)^{-p-\varepsilon}$, qu'on majore par $(1 + |\zeta'|^2)^{-p+1-\varepsilon/2}\ (1 + |\zeta_p|^2)^{-1-\varepsilon/2}$. Si l'on tient compte de (2.3), (2.4), (2.8) et (2.6) $\leqslant$ (2.7) , on obtient finalement l'inégalité attendue (2.1). □

Posons $\eta_\varepsilon(t) = (\eta_1^{1+\varepsilon}\, \eta_2 \dots \eta_p)\, ((1-\varepsilon)t)$. Des minorations triviales donnent $\chi_p(t) \geqslant \varepsilon^p\, |t|^p/p!\, \eta_\varepsilon(t)$, $\chi_p'(t) \geqslant \varepsilon^{p-1}\, |t|^{p-1}/(p-1)!\, \eta_\varepsilon(t)$.
Une nouvelle application du lemme 1.2 permet d'énoncer :

Corollaire 2.2. Sous les hypothèses du théorème 2.1 on a

$$(2.9) \qquad \int_{\zeta \in \mathbb{C}^p} (1 + |\zeta|^2)^{-p-\varepsilon} \int_{X_\zeta} |\rho|^p \ \eta_\varepsilon(\rho)^{-1} \ \beta^{n-p} < +\infty ,$$

$$(2.10) \qquad \int_{\zeta \in \mathbb{C}^p} (1 + |\zeta|^2)^{-p-\varepsilon} \int_{X_\zeta} |\rho|^{p-1} \eta_\varepsilon(\rho)^{-1} \ d\rho \wedge d^c\rho \wedge \beta^{n-p-1} < +\infty.$$

Cas particuliers :

(2.11) les fonctions F_j sont bornées et $\eta_\varepsilon(t) \equiv 1$.

(2.12) Les fonctions F_j sont à croissance polynomiale au bord ,

(i.e. $\mathrm{Log}|F_j| \leqslant C_j \ \mathrm{Log}(1 + 1/|\rho|))$; $\eta_\varepsilon(t) = [\mathrm{Log}(1+1/|t|)]^{p+\varepsilon}$.

(2.13) Les fonctions F_j sont d'ordre fini $\tau \geqslant 0$, i.e. pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $C(\varepsilon) > 0$ telle que $\mathrm{Log}|F_j| \leqslant C(\varepsilon)|\rho|^{-\tau-\varepsilon}$; on peut prendre alors $\eta_\varepsilon(t) = |t|^{-p\tau-\varepsilon}$ et $\chi_p(\rho) = |\rho|^{p(1+\tau)+\varepsilon}$.

3. INTÉGRALES DE COURBURE

Soit X une sous-variété analytique de dimension d dans l'ouvert $\Omega(\Omega \subset\subset \mathbb{C}^n$ strictement pseudoconvexe). On désigne par TX le fibré tangent à X.

Définition 3.1. TX étant muni de la métrique euclidienne standard $\alpha = \frac{1}{4} dd^c |z|^2$, on appellera forme de courbure de Ricci de (X,α) la forme de courbure du fibré canonique $\Lambda^d T^\star X$:

$$R = i\, c\, (\Lambda^d T^\star X) = -\, i\, c(\Lambda^d TX).$$

Cette définition diffère des conventions usuelles, suivant lesquelles $R = i\, c\, (\Lambda^d TX)$. Le choix que nous avons fait sera commode parce que $i\, c(\Lambda^d T^\star X)$ est toujours une $(1,1)$-forme $\geqslant 0$, comme le montre le calcul explicite suivant.

Lemme 3.2. On suppose que X est définie par le système d'équations $F = (F_1,\ldots,F_p) = (0,\ldots,0)$ et que l'application linéaire tangente dF est surjective en tout point de X (on a donc $d = \dim X = n - p$). Pour tout multi-indice croissant $L = \{l_1,\ldots,l_p\} \subset \{1,2,\ldots,n\}$, on pose :

$$J_L(F) = \text{dét} \left[\frac{\partial F_j}{\partial z_{l_k}} \right]_{1 \leqslant j\,,\, k \leqslant p} ,$$

$$J(F) = \Big(\sum_{|L|=p} |J_L(F)|^2 \Big)^{1/2} > 0.$$

Alors on a les formules suivantes :

(3.1) $\quad \| F^\star(d\lambda) \| = J(F)^2 ,$

où $d\lambda$ est la (p,p)-forme associée à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{C}^p$;

(3.2) $\quad R = [\, dd^c \operatorname{Log} J(F)]_{|X}$ (restriction de $dd^c \operatorname{Log} J(F)$ à X).

Preuve de (3.1). Soient $(\zeta_1,\ldots,\zeta_p)$, $(z_1,\ldots,z_n)$ des coordonnées orthonormées sur $\mathbb{C}^p$ et $\mathbb{C}^n$. On a

$$d\lambda = 2^{-p}\, i^{p^2}\, d\zeta_1 \wedge\ldots\wedge d\zeta_p \wedge d\overline{\zeta}_1 \wedge\ldots\wedge d\overline{\zeta}_p ,$$

(3.3) $\quad F^\star(d\zeta_1 \wedge\ldots\wedge d\zeta_p) = \sum_{|L|} J_L(F)\, dz_L .$

La formule (3.1) résulte immédiatement de là.

Preuve de (3.2). Pour tout multi-indice L de longueur p, l'égalité (3.3) implique

$$F^\star(d\zeta_1 \wedge\ldots\wedge d\zeta_p) \wedge dz_{\complement L} = \pm\, J_L(F)\, dz_1 \wedge\ldots\wedge dz_n ,$$

$\pm$ étant la signature de la permutation qui réordonne $L \cup \complement L$ en $1,2,\ldots,n$. Fixons $z^\circ \in X$ et un multi-indice M, $|M| = p$, tel que $J_M(F) \neq 0$ au voisinage de z°. Puisque $dz_{\complement L}$ et $dz_{\complement M}$ sont des formes holomorphes de degré maximal $d = n-p$ sur X, on trouve

$$dz_{\complement L} = \pm \frac{J_L(F)}{J_M(F)} dz_{\complement M} \quad \text{(en restriction à TX), et}$$

$$\frac{\alpha^d}{d!} = \sum_{|L|=p} 2^{-p} i^{p^2} dz_{\complement L} \wedge d\bar{z}_{\complement L} = \frac{J(F)^2}{|J_M(F)|^2} 2^{-p} i^{p^2} dz_{\complement M} \wedge d\bar{z}_{\complement M} .$$

Il vient donc $\|dz_{\complement M}\| = 2^{p/2} |J_M(F)|/J(F)$; la forme de courbure de $\Lambda^d T^\star X$ est alors donnée classiquement par

$$R = i\, c\, (\Lambda^d T^\star X) = dd^c \operatorname{Log} \frac{1}{\|dz_{\complement M}\|} = dd^c \operatorname{Log} J(F) \quad ,$$

car $J_M(F)$ est une fonction holomorphe non nulle. □

Nous pouvons maintenant énoncer le résultat essentiel de ce travail.

<u>Théorème 3.3.</u> Soit $F = (F_1,\ldots,F_p) : \Omega \to \mathbb{C}^p$ une application holomorphe, avec $F_1 \in N_{\eta_1}(\Omega)$, $F_2 \in A_{\eta_2}(\Omega),\ldots,F_p \in A_{\eta_p}(\Omega)$. On suppose que $\operatorname{Log} J(F) \leqslant \mu(\rho)$ sur Ω, avec une fonction $\mu \in \mathcal{C}^1(]-\infty,0[$ croissante > 0. Quel que soit $\varepsilon > 0$, on pose :

$$\chi_{p,q}(t) = \frac{1}{(p+q-1)!} \int_t^0 \frac{(u-t)^{p+q-1}\, du}{\eta_1^{1+\varepsilon}\, \eta_2 \ldots \eta_p\, \mu^q(u)} .$$

Pour tout entier $q = 0,1,\ldots,n-p$, la courbure de Ricci des surfaces de niveau $X_\zeta = F^{-1}(\zeta)$ vérifie l'estimation

$$(3.4) \qquad \int_{\zeta \in \mathbb{C}^p} (1+|\zeta|^2)^{-p-\varepsilon}\, d\lambda(\zeta) \int_{X_\zeta} \chi_{p,q}(\rho)\, R^q \wedge \beta^{n-p-q} < +\infty.$$

<u>Démonstration</u>. Par récurrence sur q. Pour $q = 0$ l'inégalité (3.4) résulte de (2.1). Nous aurons besoin des lemmes techniques suivants au cours de l'étape de récurrence.

Lemme 3.4. Soit $V \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ une fonction p.s.h. telle que $0 \leqslant V \leqslant \mu(\rho)$ sur Ω. Pour tout entier $k = 1,\dots,n$ et tout $\varepsilon > 0$, on définit des fonctions convexes $\Psi_k :]-\infty,0[\to \mathbb{R}$ par $\Psi_k(t) = \frac{1}{(k-1)!} \int_t^0 |u-t| \; \mu(u)^{-k-\varepsilon} \, du$.
Alors :

$$\int_\Omega \Psi_k(\rho) \, (dd^c V)^k \wedge \beta^{n-k} \leqslant (1 + \tfrac{1}{\varepsilon}) \int_\Omega \mu(\rho)^{-\varepsilon} \; \beta^n .$$

Preuve : Il n'est pas restrictif de supposer μ non bornée ; lorsque μ est bornée, on peut toujours écrire μ comme limite décroissante de fonctions non bornées et passer à la limite dans les inégalités. On raisonne alors par récurrence sur k. Des calculs élémentaires donnent :

$$\Psi_1'(t) = -\mu(t)^{-1-\varepsilon}, \quad \Psi'_k(t) = -\frac{1}{(k-2)!} \int_t^0 |u-t|^{k-2} \; \mu(u)^{-k-\varepsilon} \, du \quad \text{si } k \geqslant 2 ,$$

$$\Psi_1''(t) = (1+\varepsilon)\, \mu'(t)\, \mu(t)^{-2-\varepsilon} , \quad \Psi_2''(t) = \mu(t)^{-2-\varepsilon} ,$$

$$\Psi_k''(t) = \frac{1}{(k-3)!} \int_t^0 |u-t|^{k-3} \; \mu(u)^{-k-\varepsilon} \, du \quad \text{si } k \geqslant 3.$$

On en déduit :

$$(3.5) \qquad \Psi_1''(t)\, \mu(t) = (1 + \tfrac{1}{\varepsilon}) \frac{d}{dt} (-\mu^{-\varepsilon})$$

$$(3.6) \qquad \Psi_k''(t)\, \mu(t) \leqslant |\Psi_{k-1}'(t)| \quad \text{pour } k \geqslant 2.$$

Le lemme 1.1 (1.4) appliqué à $\Theta = (dd^c V)^{k-1} \wedge \beta^{n-k}$ entraîne pour tout $k \geqslant 1$:

$$\int_\Omega \Psi_k(\rho)\, (dd^c V)^k \wedge \beta^{n-k} = -\int_\Omega V \, |\Psi_k'(\rho)| \, (dd^c V)^{k-1} \wedge \beta^{n-k+1}$$
$$+ \int_\Omega V \, \Psi_k''(\rho) \, (dd^c V)^{k-1} \wedge d\rho \wedge d^c\rho \wedge \beta^{n-k}$$

$$\leqslant \int_\Omega \Psi_k''(\rho)\, \mu(\rho)\, (dd^c V)^{k-1} \wedge d\rho \wedge d^c\rho \wedge \beta^{n-k}.$$

Si $k = 1$, (3.5) donne le majorant

$$(1+\frac{1}{\varepsilon}) \int_\Omega d(-\mu(\rho)^{-\varepsilon}) \quad d^c\rho \wedge \beta^{n-1} = (1+\frac{1}{\varepsilon}) \int_\Omega \mu(\rho)^{-\varepsilon} \quad \beta^n ,$$

compte tenu de la formule de Stokes et de ce que $\lim\limits_{\rho\to 0} \mu(\rho)^{-\varepsilon} = 0$.

Si $k \geqslant 2$, (3.6) implique

$$\int_\Omega \Psi_k(\rho) \ (dd^cV)^k \wedge \beta^{n-k} \leqslant \int_\Omega |\Psi'_{k-1}(\rho)| \ (dd^cV)^{k-1} \wedge d\rho \wedge d^c\rho \wedge \beta^{n-k},$$

et l'intégrale de droite est égale à $\int_\Omega \Psi_{k-1}(\rho) \ (dd^cV)^{k-1} \wedge \beta^{n-k+1}$ grâce au lemme 1.2. □

Lemme 3.5. Soit V une fonction p.s.h. telle que $V \leqslant \mu(\rho)$ sur Ω. On suppose que V est de classe C^2 sur un ouvert $\Omega' \subset \Omega$. Soit Ψ_k comme dans le lemme 3.4 si $k \geqslant 1$ et $\Psi_o \equiv 1$. Alors pour tout $\varepsilon > 0$ et tout entier $k \geqslant 0$, il existe une constante $C \geqslant 0$ indépendante de V et Ω', telle que

$$\int_{\Omega' \cap \{V<0\}} \Psi_k(\rho) \ e^V \ (dd^cV)^k \wedge \beta^{n-k} \leqslant C < +\infty.$$

Preuve. Pour $k \geqslant 1$, soit γ la fonction convexe > 0 définie par $\alpha(t) = e^{t/k}$ si $t \leqslant 0$ et $\gamma(t) = 1 + {}^{t}/_{k}$ si $t \geqslant 0$.
La fonction p.s.h. $\gamma \circ V$ est de classe C^2 sur l'ouvert $\Omega' \cap \{V<0\}$ et vérifie $0 \leqslant \gamma \circ V \leqslant 1 + \frac{1}{k} \ \mu(\rho) \leqslant C_1 \ \mu(\rho)$.
Soit $a < 0$ fixé. On peut écrire $\gamma \circ V$ comme limite décroissante sur $\Omega(a) = \{\rho - a < 0\}$ d'une suite de fonctions p.s.h. $V_\nu \in \mathscr{C}^\infty(\Omega(a))$, obtenues par le procédé habituel de convolution, et vérifiant $0 \leqslant V_\nu \leqslant (C_1 + \frac{1}{\nu}) \ \mu(\rho)$.
Le lemme 3.4 appliqué sur $\Omega(a)$ entraîne

$$\int_{\Omega(a) \cap \Omega' \cap \{V<0\}} \Psi_k(\rho-a) \ (dd^cV_\nu)^k \wedge \beta^{n-k}$$
$$\leqslant (C_1 + \frac{1}{\nu})^k \ (1 + \frac{1}{\nu}) \int_{\Omega(a)} \mu(\rho-a)^{-\varepsilon} \quad \beta^n.$$

On fait tendre ν vers $+\infty$, puis a vers 0, ce qui donne

$$\int_{\Omega' \cap \{V<0\}} \Psi_k(\rho)\,(dd^c e^{V/k})^k \wedge \beta^{n-k} \leqslant C_2 = C_1^k\left(1+\frac{1}{\varepsilon}\right)\int_\Omega \mu(\rho)^{-\varepsilon}\,\beta^n.$$

L'inégalité évidente

$$dd^c e^{V/k} = \frac{1}{k} e^{V/k}\left(dd^c V + \frac{1}{k} dV \wedge d^c V\right) \geqslant \frac{1}{k} e^{V/k}\, dd^c V$$

implique le lemme 3.5 avec $C = k^k C_2$. $\square$

Revenons maintenant au th. 3.3, en supposant le théorème démontré pour $q-1$ $(q \geqslant 1)$. Des calculs analogues à ceux effectués au §2 (2.5) donnent

$$|\chi'_{p,q}(t)| = \frac{1}{(p+q-2)!}\int_t^0 \frac{(u-t)^{p+q-2}\,du}{\eta_1^{1+\varepsilon}\,\eta_2\cdots\eta_p\,\mu^q(u)},$$

(3.7) $\quad \chi''_{p,q}(t)\,\mu(t) \leqslant |\chi'_{p,q-1}(t)| \quad$ si $p \geqslant 1,\ q \geqslant 1$.

On va utiliser le lemme 3.5 avec $\varepsilon = 1$, $k = q-1$, en remarquant qu'il existe une constante C_3 telle que

(3.8) $\quad |\chi'_{p,q}(t)| \leqslant C_3\,\Psi_{q-1}(t)$ pour $t \in [\operatorname{Inf}\rho, 0]$.

D'après (3.7), (3.8), l'hypothèse $\operatorname{Log} J(F) \leqslant \mu(\rho)$ et le lemme 1.1 (avec $V = \operatorname{Log} J(F)$, $R = dd^c V$, $\Theta = R^{q-1} \wedge \beta^{n-p-q}$) on obtient :

$$\int_{X_\zeta} \chi_{p,q}(\rho)\,R^q \wedge \beta^{n-p-q} = -\int_{X_\zeta} |\chi'_{p,q}(\rho)|\,\operatorname{Log} J(F)\,R^{q-1}\wedge\beta^{n-p-q+1}$$

$$+\int_{X_\zeta} \chi''_{p,q}(\rho)\,\operatorname{Log} J(F)\,R^{q-1}\wedge d\rho\wedge d^c\rho\wedge\beta^{n-p-q}$$

$$\leqslant C_3\int_{X_\zeta} \Psi_{q-1}(\rho)\,\operatorname{Log}_- J(F)\,R^{q-1}\wedge\beta^{n-p-q+1} \; +$$

$$(3.9) \qquad + \int_{X_\zeta} |\chi'_{p,q-1}(\rho)|\ R^{q-1} \wedge d\rho \wedge d^c\rho \wedge \beta^{n-p-q}.$$

Le lemme 1.2 et l'hypothèse de récurrence montrent que l'intégrale (3.9) fournit une contribution finie dans l'estimation (3.4). La preuve sera achevée si on vérifie que

$$I = \int_{\mathbb{C}^p} d\lambda(\zeta) \int_{X_\zeta} \Psi_{q-1}(\rho)\ \mathrm{Log\_J}(F)\ R^{q-1} \wedge \beta^{n-p-q+1} < +\infty.$$

Soit $\Omega' = \{z \in \Omega\ ;\ J(F)\ (z) \neq 0\}$. Avec le changement de variable $\zeta = F(z)$, le théorème de Fubini donne

$$I = \int_{\Omega'} \Psi_{q-1}(\rho)\ \mathrm{Log\_J}(F)\ R^{q-1} \wedge \beta^{n-p-q+1} \wedge F^\star(d\lambda).$$

La formule (3.1) implique $\beta^{n-p-q+1} \wedge F^\star(d\lambda) \leqslant C_4\ J(F)^2\ \beta^{n-q+1}$, d'où

$$I \leqslant C_4 \int_{\Omega'} \Psi_{q-1}(\rho)\ J(F)^2\ \mathrm{Log\_J}(F)\ R^{q-1} \wedge \beta^{n-q+1}.$$

La fonction à intégrer est nulle en dehors de l'ouvert $\{J(F) < 1\}$, et sur cet ouvert on a $J(F)^2\ \mathrm{Log\_J}(F) \leqslant J(F)$, ce qui donne :

$$I \leqslant C_4 \int_{\Omega' \cap \{J(F)<1\}} \Psi_{q-1}(\rho)\ J(F)\ R^{q-1} \wedge \beta^{n-q+1}.$$

La finitude de I résulte alors du lemme 3.5 avec $V = \mathrm{Log}\ J(F)$, $k = q-1$. □

Supposons en particulier que $F_j \in A_\eta(\Omega)$, $1 \leqslant j \leqslant p$. On a donc par définition $|F_j(z)| \leqslant \exp[M_j\ \eta(\rho(z))]$, $z \in \Omega$. Les inégalités de Cauchy appliquées sur le disque

$$D = \{w \in \Omega \; ; \; |w_k - z_k| \leqslant C_5 \, \varepsilon \, |\rho(z)| \; , \; w_l = z_l \quad \text{si} \quad l \neq k\}$$

fournissent $\left|\frac{\partial F_j}{\partial z_k}\right| \leqslant \frac{C_6}{\varepsilon|\rho|} \exp [M_j \, \eta((1-\varepsilon)\rho)]$,

d'où $\operatorname{Log} J(F) \leqslant C_7(\varepsilon) \; \mu(\rho)$,

avec $\mu(t) = \eta((1-\varepsilon)t) + \operatorname{Log}(1+\frac{1}{|t|})$.

Les fonctions $\chi_{p,q}(t)$ et $|\chi'_{p,q}(t)|$ admettent alors les minorations

$$\chi_{p,q}(t) \geqslant C_8(\varepsilon) \quad |t|^{p+q} \; \nu_{p,q}((1-\varepsilon)t)^{-1} \quad ,$$
$$|\chi'_{p,q}(t)| \geqslant C_9(\varepsilon) \quad |t|^{p+q-1} \nu_{p,q}((1-\varepsilon)t)^{-1} \quad ,$$

avec $\nu_{p,q}(t) = \eta^{p+\varepsilon} \quad [\eta + \operatorname{Log}(1 + 1/|t|)\,]^q$.

Le théorème 3.3 et le lemme 1.2 permettent donc de donner l'énoncé suivant :

<u>Théorème 3.6.</u> Soit $F_j \in A_\eta(\Omega)$, $1 \leqslant j \leqslant p$. La courbure R de X_ζ vérifie les estimations :

(3.10) $$\int_{\zeta \in \mathbb{C}^p} (1+|\zeta|^2)^{-p-\varepsilon} \int_{X_\zeta} |\rho|^{p+q} \; \nu_{p,q}((1-\varepsilon)\rho)^{-1} \; R^q \wedge \beta^{n-p-q} < +\infty$$

(3.11) $$\int_{\zeta \in \mathbb{C}^p} (1+|\zeta| \;)^{-p-\varepsilon} \int_{X_\zeta} |\rho|^{p+q-1} \nu_{p,q}((1-\varepsilon)\rho)^{-1} \; R^q \wedge d\rho \wedge d^c\rho \wedge \beta^{n-p-q-1} <+$$

avec $\eta_{p,q}(t) = \eta^{p+\varepsilon} \; [\eta + \operatorname{Log}(1 + {}^1/|t|)]^q$.

<u>Corollaire 3.7.</u> Dans les cas particuliers suivants, les intégrales (3.10) et (3.11) sont finies avec le choix de $\nu_{p,q}$ indiqué :

(3.12) F_j bornées ; $\nu_{p,q}(t) = [\mathrm{Log}\,(1+{}^1/|t|)]^q$.

(3.13) F_j à coissance polynomiale (cf. (2.12)) ; $\nu_{p,q}(t) = [\mathrm{Log}(1+{}^1/|t|)]^{p+q+\varepsilon}$.

(3.14) F_j d'ordre fini $\tau \geqslant 0$ (cf. (2.13)) ; $\nu_{p,q}(t) = |t|^{-(p+q)\tau-\varepsilon}$.

4. CAS DES FONCTIONS ENTIERES.

Soient $F_1,\ldots F_p$ des fonctions entières dans $\mathbb{C}^n$. On se donne des fonctions croissantes $\eta_1,\ldots,\eta_p$, $\mu \in \mathcal{E}^\circ([0,+\infty[)$ croissantes > 0 telles que

$$\mathrm{Log}\,|F_j(z)| \leqslant M_j\, \eta_j(\,|z|\,)\ ,\quad M_j \geqslant 0,$$

$$\mathrm{Log}\ J(F) \leqslant M_o\ \mu(\,|z|\,)\ ,\quad M_o \geqslant 0.$$

On note $\alpha = \frac{1}{4}\, dd^c\, |z|^2$ et $B(r)$ la boule de centre 0 et de rayon r dans $\mathbb{C}^n$.

<u>Théorème 4.1.</u> Il existe une constante $C \geqslant 0$ telle que pour $r \geqslant 1$ on ait :

$$\int_{\zeta \in \mathbb{C}^p} (1 + |\zeta|^2)^{-p-\varepsilon} \int_{B(r)\cap X_\zeta} (r^2 - |z|^2)^{p+q}\ R^q \wedge \alpha^{n-p-q}$$

$$\leqslant C\ r^{2n}[(\eta_1\ldots\eta_p\ \mu^q)\ (r) + r^{2p}\ \mu^{q-1}\ (r)].$$

La démonstration est pratiquement identique à celle du théorème 3.3., aussi nous contenterons-nous d'en indiquer les grandes lignes. La boule $B(r)$ est définie par la fonction p.s.h. $\rho(z) = \frac{1}{4}\,(|z|^2 - r^2)$ et on a : $\alpha = dd^c\rho$. En reprenant le raisonnement qui mène aux théorèmes 1.5 et 2.1, on obtient alors pour $a \geqslant 1$:

$$\int_{\zeta \in \mathbb{C}^p} (1 + |\zeta|^2)^{-p-\varepsilon} \int_{B(r)\cap X_\zeta} |\rho|^p\, \alpha^{n-p} \leqslant C_1\ r^{2n}\ (\eta_1\ldots\eta_p)\ (r)\ ;$$

la quantité r^{2n} qui apparaît dans le membre de droite correspond à l'intégrale de volume $\int_{S(r)} d^c\rho \wedge \alpha^{n-1} = \int_{B(r)} \alpha^n.$

Les lemmes 3.4 et 3.5 admettent de même les analogues suivants. Soit V une fonction p.s.h. de classe C^2 sur $\mathbb{C}^n$ telle que $V \leqslant \mu(|z|)$. Alors pour tout entier $k \geqslant 0$ et tout $\varepsilon > 0$:

$$\int_{B(r)} |\rho|^{k+\varepsilon} (dd^cV)^k \wedge \alpha^{n-k} \leqslant C_2 \; \mu(r)^k \int_{B(r)} |\rho|^\varepsilon \; \alpha^n$$
$$\leqslant C_3 \; r^{2n+2\varepsilon}\mu(r)^k$$

pourvu que V soit $\geqslant 0$, d'où l'on déduit en général :

$$\int_{B(r)\,\cap\,\{V<0\}} |\rho|^{k+\varepsilon} \; e^V (dd^cV)^k \wedge \alpha^{n-k} \leqslant C_4 \; r^{2n+2\varepsilon} \; \mu(r)^k.$$

On est alors amené à choisir $\varepsilon = p$, $k = q-1$, ce qui explique la présence du terme $r^{2p} \; \mu^{q-1}(r)$ dans l'estimation du Théorème 4.1. □

<u>Corollaire 4.2.</u> Pour presque tout $\zeta \in \mathbb{C}$, il existe une constante $C(\zeta,\varepsilon)$ telle que pour $r \geqslant 2$ on ait

$$\int_{B(r)\,\cap\,X_\zeta} R^q \wedge \alpha^{n-p-q} \leqslant C(\zeta,\varepsilon) \; r^{2(n-p-q)} \; (\mathrm{Log}\ r)^{1+\varepsilon} \; \nu(r(1+\varepsilon))$$

avec $\mu(t) = (\eta_1 \ldots \eta_p \; \mu^q)\,(t) + t^{2p} \; \mu^{q-1}(t).$

<u>Démonstration</u>. En remplaçant r par $r(1+\varepsilon)$ le théorème 4.1 implique

$$\int_{\zeta \in \mathbb{C}^p} (1 + |\zeta|^2)^{-p-\varepsilon} \int_{B(r)\,\cap\,X_\zeta} R^q \wedge \alpha^{n-p-q} \leqslant C_5 \; r^{2(n-p-q)} \; \nu(r(1+\varepsilon)).$$

Il suffit alors d'appliquer le lemme élémentaire qui suit.

<u>Lemme 4.3.</u> Soit E un espace mesurable, m une mesure $\geqslant 0$ σ-finie sur E, $g(\zeta,r)$ une fonction mesurable $\geqslant 0$ sur $E \times [2,+\infty[$, croissante par rapport

à la variable r. On suppose que

$$\int_{\zeta \in E} g(\zeta,r)\, dm(\zeta) \leqslant \nu(r)$$

où ν est une fonction croissante > 0. Alors pour m-presque tout $\zeta \in E$, il existe une constante $C'(\zeta,\varepsilon)$ telle que

$$g(\zeta,r) \leqslant C'(\zeta,\varepsilon)\, (\operatorname{Log} r)^{1+\varepsilon}\, \nu(r(1+\varepsilon)).$$

<u>Démonstration.</u> Soit $\varepsilon > 0$. Le théorème de Fubini implique

$$\int_{\zeta \in E} \int_2^{+\infty} \frac{g(\zeta,r)\, dr}{r(\operatorname{Log} r)^{1+\varepsilon}\nu(r)}\, dm(\zeta) \leqslant \int_2^{+\infty} \frac{dr}{r(\operatorname{Log} r)^{1+\varepsilon}} < +\infty .$$

Pour m-presque tout $\zeta \in E$ on a donc

$$I(\zeta,\varepsilon) = \int_2^{+\infty} \frac{g(\zeta,r)\, dr}{r(\operatorname{Log} r)^{1+\varepsilon}\nu(r)} < +\infty .$$

Puisque g et ν sont croissantes en r on obtient

$$I(\zeta,\varepsilon) \geqslant \frac{g(\zeta,r)}{\nu(r(1+\varepsilon))} \int_r^{r(1+\varepsilon)} \frac{dt}{t(\operatorname{Log} t)^{1+\varepsilon}}$$

$$\geqslant C_6\, \varepsilon\, \frac{g(\zeta,r)}{\nu(r(1+\varepsilon))\, (\operatorname{Log} r)^{1+\varepsilon}} .$$

Le lemme 4.3 est donc vrai avec $C'(\zeta,\varepsilon) = \dfrac{I(\zeta,\varepsilon)}{C_6\, \varepsilon}$.□

<u>Corollaire 4.4.</u> On suppose que $F_1,\dots,F_p$ sont des fonctions entières d'ordre τ au plus, i.e. pour tout $\varepsilon > 0$ il existe une constante $M_j(\varepsilon)$ telle que

$$\operatorname{Log}|F_j(z)| \leqslant M_j(\varepsilon)\, (1 + |z|)^{\tau+\varepsilon}.$$

Alors pour presque tout $\zeta \in \mathbb{C}^p$, il y a une constante $C(z,\varepsilon) \geqslant 0$ telle que pour $r \geqslant 2$ on ait :

$$\int_{B(r) \cap X_\zeta} R^q \wedge \alpha^{n-p-q} \leqslant C(\zeta,\varepsilon) \quad r^{2(n-p-q)+\varepsilon} \quad (r^{(p+q)\tau} + r^{2p+(q-1)\tau}).$$

Les inégalités de Cauchy montrent en effet qu'on peut choisir

$$\eta_1(t) = \ldots = \eta_p(t) = \mu(t) = (1+t)^{\tau+\varepsilon}$$

dans le corollaire 4.3. □

5. EQUATION DE MONGE-AMPERE SATISFAITE PAR LA COURBURE TOTALE.

Soit X une hyperface (lisse) dans un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}^n$. On note R la forme de la courbure de Ricci de X, $K(z) = \mathrm{Trace}(R)$ la courbure scalaire, et $\Gamma(z) = \det R = \left\| \frac{R^{n-1}}{(n-1)!} \right\|$ la courbure totale. $K(z)$ est donc la somme des $(n-1)$ courbures principales de X (=valeurs propres de R), $\Gamma(z)$ en est le produit.

On se place en un point $z^\circ \in X$ au voisinage duquel X a une équation de la forme $z_n = \varphi(z_1,\ldots,z_{n-1})$ et on note

$$\varphi_j = \frac{\partial\varphi}{\partial z_j}, \quad 1 \leqslant j \leqslant n-1, \quad \alpha_n = \frac{1}{4}\, dd^c|z|^2 = \frac{i}{2} \sum_{j=1}^{n} dz_j \wedge d\bar{z}_j, \quad \text{et}$$

$\Pi : X \to \mathbb{C}^{n-1}$ la projection sur les $(n-1)$ premières coordonnées.

<u>Lemme 5.1.</u> La métrique kählérienne induite $\alpha_{n|X}$ et la forme de Ricci R vérifient les relations :

$$(5.1) \qquad \alpha_{n|X}^{n-1} = \left(1 + \sum_{j=1}^{n-1} |\varphi_j|^2\right) \Pi^\star \alpha_{n-1}^{n-1},$$

$$(5.2) \qquad R = \frac{1}{2}\, dd^c \operatorname{Log}\left(1 + \sum_{j=1}^{n-1} |\varphi_j|^2\right).$$

Dans les coordonnées $z_1,\dots,z_{n-1}$ sur X, on a en effet

$$\alpha_{n|X} = \alpha_{n-1} + \frac{i}{2}\, d\varphi \wedge d\bar{\varphi}$$

$$\alpha^{n-1}_{n|X} = \alpha^{n-1}_{n-1} + (n-1)\,\frac{i}{2}\, d\varphi \wedge d\bar{\varphi} \wedge \alpha^{n-2}_{n-1} = (1 + \|d\varphi\|^2)\, \alpha^{n-1}_{n-1} \;,$$

ce qui démontre (5.1) , ainsi que l'égalité

$$\| \Pi^{\star}\, \alpha^{n-1}_{n-1} \| = \frac{1}{1 + \sum\limits_{n-1}^{n-1} |\varphi_j|^2} \;.$$

Dans cette formule $\| \Pi^{\star}\, \alpha^{n-1}_{n-1}\|$ est le carré du module d'une (n-1)-forme holomorphe sur X. La relation (5.2) est donc bien vraie par définition de $R = ic(\Lambda^{n-1}\, T^{\star}X)$. □

Nous aurons besoin du calcul classique qui donne l'expression de la forme volume de $\mathbb{C}^{n-1}$ induite par la forme volume canonique de l'espace projectif $\mathbb{P}^{n-1} = \mathbb{P}(\mathbb{C}^n)$.

<u>Lemme 5.2.</u> Soit $\omega = \frac{1}{4}\, dd^c\, \mathrm{Log}\, (1 + \sum\limits_{j=1}^{n-1} |z_j|^2)$ sur $\mathbb{C}^{n-1}$. Alors

$$\omega^{n-1} = \frac{\alpha^{n-1}_{n-1}}{(1 + |z|^2)^n} \;.$$

Soit $\phi : X \to \mathbb{C}^{n-1}$ l'application $\phi = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{n-1})$. L'égalité (5.2) montre que $R = 2\, \phi^{\star}\omega$. On a donc d'après le lemme 5.2 :

$$\text{(5.3)} \qquad R^{n-1} = 2^{n-1}\, \frac{\phi^{\star}\, \omega^{n-1}}{(1 + |\phi|^2)^n} = 2^{n-1}\, \frac{|\det(\varphi_{jk})|^2}{(1 + \|d\varphi\|^2)^n}\, \Pi^{\star}\, \alpha^{n-1}_{n-1}$$

où $\det(\varphi_{jk})$, $1 \leqslant j,k \leqslant n-1$, est le jacobien de ϕ relativement aux coordonnées $z_1,\dots,z_{n-1}$. En comparant (5.1) et (5.3) il vient :

$$\frac{R^{n-1}}{(n-1)!} = 2^{n-1} \frac{|\text{dét}\ (\ jk)|^2}{(1+\|d\varphi\|^2)^{n+1}} \quad \frac{\alpha_{n|X}^{n-1}}{(n-1)!} \ ,$$

d'où l'égalité des normes :

<u>Proposition 5.3.</u> On a $\Gamma(z) = 2^{n-1} \dfrac{|\text{dét}(\varphi_{jk})|^2}{(1+\|d\varphi\|^2)^{n+1}}$.

On suppose désormais que Γ ne s'annule identiquement sur aucune composante connexe de X (la condition $\Gamma \equiv 0$ signifie géométriquement que X est une surface développable, c'est-à-dire que X est réunion de droites le long desquelles le plan tangent reste fixe). D'après (5.2) et l'équation de Lelong-Poincaré, on obtient l'équation annoncée dans l'introduction, et déjà démontrée dans [4] pour $n = 2,3$.

<u>Théorème 5.4.</u> $i\partial\bar{\partial}\ \text{Log}\ \Gamma(z) = -(n+1)\ R + 2\ [Z]$, où Z est le diviseur des zéros de $\text{dét}(\varphi_{jk})$, i.e. des zéros de la courbure totale. En particulier $\text{Log}\ \Gamma$ est une fonction plurisurharmonique en dehors de Z.

Si on calcule successivement la trace et le déterminant dans l'identité du théorème 5.4, on obtient le corollaire suivant.

<u>Corollaire 5.5.</u> Sur l'hypersurface X on a l'identité

$$\Delta\ \text{Log}\ \Gamma = -(2n+2)K + 4\pi\ \ d\sigma_z$$

où Δ est le laplacien euclidien de X et $d\sigma_z$ l'élément d'aire du diviseur Z. De plus, Γ vérifie l'équation de type Monge-Ampère

$$(i\partial\bar{\partial}\ \text{Log}\ \ \Gamma)^{n-1} = (-1)^{n-1}\ (n+1)^{n-1}\ \ \Gamma\ \ \ \alpha_{n|X}^{n-1}$$

en dehors du support de Z.

On suppose maintenant que X est définie globalement par une équation $F = 0$, avec F holomorphe dans Ω et $|F| + |dF| \neq 0$ sur X. La proposition 5.3 n'est pas tout à fait satisfaisante, car l'expression de Γ qui y est donnée dépend du choix de la coordonnée z_n. On va donc transformer cette expression pour obtenir Γ en fonctions des dérivées F_j et F_{jk} de F, $1 \leq j,k \leq n$.

Théorème 5.6. R, K et Γ vérifient les formules suivantes :

(5.4) $$R = \frac{1}{2}\,[dd^c \operatorname{Log} \|dF\|^2]_{|X} ;$$

(5.5) $$K(z) = \Delta \operatorname{Log} \|dF\| ;$$

(5.6) $$\Gamma(z) = 2^{n-1} \frac{|Q_F(z)|^2}{\|dF\|^{2n+2}} ,$$

où $Q_F(z)$ est le déterminant d'ordre $n+1$

$$Q_F(z) = \left\| \begin{array}{c|c} F_{jk} & \begin{matrix} F_1 \\ \vdots \\ F_n \end{matrix} \\ \hline F_1 \; . \; . \; . \; F_n & 0 \end{array} \right\| .$$

On a en effet $\varphi_j = - \dfrac{F_j(z_1,\ldots,z_{n-1},\varphi)}{F_n(z_1,\ldots,z_{n-1},\varphi)}$, et les formules (5.4), (5.5) découlent de (5.2). On notera d'ailleurs que (5.4) n'est qu'un cas particulier de la formule (3.2). Un calcul immédiat montre d'autre part que

$$\varphi_{jk} = - \frac{\partial}{\partial z_k} \left[\frac{F_j(z_1,\ldots,z_{n-1},\varphi)}{F_n(z_1,\ldots,z_{n-1},\varphi)} \right] = - \frac{1}{F_n} \left[\delta_k F_j - \frac{F_j}{F_n} \delta_k F_n \right]$$

où $1 \leq j,k \leq n-1$, et où δ_k est l'opérateur différentiel

$$(5.7) \qquad \delta_k = \frac{\partial}{\partial_{zk}} + \varphi_k \frac{\partial}{\partial_{zn}} = \frac{\partial}{\partial_{zk}} - \frac{F_k}{F_n} \frac{\partial}{\partial_{zn}} .$$

On obtient donc

$$\text{dét}(\varphi_{jk}) = \left(-\frac{1}{F_n}\right)^{n-1} \text{dét}\left(\delta_k F_j - \frac{F_j}{F_n} \delta k\ F_n\right)$$

$$= \frac{1}{F_n^n} \begin{Vmatrix} F_1 \ldots F_{n-1} & F_n \\ \delta_1 F_1 \ldots \delta_1 F_{n-1} & \delta_1 F_n \\ \vdots \qquad \vdots & \vdots \\ \delta_{n-1} F_1 \ldots \delta_{n-1} F_{n-1} & \delta_{n-1} F_n \end{Vmatrix}$$

comme on le voit en effectuant des combinaisons linéaires sur les colonnes pour remplacer les coefficients $F_1, \ldots, F_{n-1}$ de la première ligne par 0. En travaillant de même sur les lignes et en tenant compte de (5.7) on obtient

$$\text{dét}(\varphi_{jk}) = \frac{(-1)^n}{F_n^{n+1}} \begin{Vmatrix} 0 & F_1 & \ldots & F_n \\ F_1 & F_{11} & \ldots & F_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ F_n & F_{n1} & & F_{nn} \end{Vmatrix} = \frac{(-1)^n\ Q_F(z)}{F_n^{n+1}}$$

On a donc bien $\Gamma(z) = \dfrac{2^{n-1}\ |Q_F(z)|^2}{|F_n|^{2n+2}\ (1+\|d\varphi\|^2)^{2n+2}} = \dfrac{2^{n-1}\ |Q_F(z)|^2}{\|dF\|^{2n+2}}$. □

BIBLIOGRAPHIE

[1] CHEE PAK SONG. - The Blaschke condition for bounded holomorphic functions ; trans. Amer. Math. Soc. , t. 148 1970, p. 248-263.

[2] CORNALBA (M.) and SHIFFMAN (B.). - A countrexample to the "transcendental Bezout problem" ; Vol. 96(2) , 1972, Vol. 96(2), 1972, p. 402-406.

[3] DEMAILLY (J.-P.). - Construction d'hypersurfaces irréductibles avec lieu singulier donné dans $\mathbb{C}^n$; Ann. Inst. Fourier , t.30, fasc. 3, 1980, p. 219-236.

[4] GAVEAU (B.). - Intégrales de courbure et potentiels sur les hypersurfaces analytiques de $\mathbb{C}^n$; séminaire P. Lelong-H. Skoda 1980/1981, à paraître.

[5] GAVEAU (B.) et MALLIAVIN (P.). - Courbure des surfaces de niveau d'une fonction holomorphe bornée ; C. R. Acad. Sc. Paris , t. 293 (1981) , série I, p. 135-138.

[6] MALLIAVIN (P.) - Fonctions de Green d'un ouvert strictement pseudo-convexe et classe de Nevanlinna ; C.R. Acad. Sc. Paris , t. 278 (1974) , série A, p. 141-144.

[7] STOLL (W.). - A Bezout estimate for complete intersections ; Ann. of Math., Vol. 96(2) , 1972, p. 361-401.

J.-P. DEMAILLY et B. GAVEAU
LA 213 ANALYSE COMPLEXE ET GEOMETRIE
UNIVERSITE DE PARIS VI - Tour 45-46, 5ème étage
4, Place Jussieu
75005 PARIS