ANALYSE HARMONIQUE. — Sur les transformées de Fourier de fonctions continues et le théorème de de Leeuw-Katznelson-Kahane.

Note de **Jean-Pierre Demailly**, présentée par Paul Malliavin.

Reçue le 23 juillet 1984.

Étant donné un groupe localement compact abélien G quelconque et une fonction $\varphi \in L^2(\hat{G})$, nous montrons l'existence d'une fonction $f \in L^2(G)$ continue nulle à l'infini telle que $|\hat{f}| \geqq |\varphi|$ p. p. sur $\hat{G}$.

HARMONIC ANALYSIS. — On Fourier Transforms of Continuous Functions and a Theorem of de Leeuw-Katznelson-Kahane.

Given any locally compact abelian group G *and any function* $\varphi \in L^2(\hat{G})$, *we prove the existence of a function* $f \in L^2(G)$ *continuous and vanishing at infinity such that* $|\hat{f}| \geqq |\varphi|$ *a. e. on* $\hat{G}$.

INTRODUCTION. — L'objet de la présente Note est d'étendre au cas d'un groupe localement compact abélien G quelconque le théorème ci-dessus démontré par de Leeuw-Katznelson-Kahane [4] dans le cas d'un groupe G compact. Une rédaction plus détaillée de ce travail paraîtra dans [2]. La démarche, analogue à celle de [4], consiste dans un premier temps à généraliser les inégalités de Khintchine pour les transformées de Fourier aléatoires sur un groupe non compact.

1. INÉGALITÉS DE KHINTCHINE GÉNÉRALISÉES. — Soit $\varphi \in L^2(\hat{G})$. Si $\hat{G}$ n'est pas discret, il existe pour tout $\varepsilon > 0$ une partition dénombrable du support :

$$\operatorname{Supp} \varphi = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} E_j,$$

avec $m(E_j) \leqq \varepsilon$. Si $\hat{G}$ est discret (i. e. G compact) on choisit simplement $m(E_j) = \varepsilon = 1$. Étant donné une suite aléatoire $t = (t_j) \in (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^{\mathbb{N}}$ on considère la fonction :

$$\varphi_t(\xi) = \sum_{j \in \mathbb{N}} \varphi_j(\xi)\, e^{2\pi i t_j} \qquad \text{où} \quad \varphi_j = \mathbf{1}_{E_j}\, \varphi. \tag{1.1}$$

Soit dt la mesure de probabilité naturelle sur $(\mathbb{R}/\mathbb{Z})^{\mathbb{N}}$. Un calcul classique ([3], p. 215) utilisant la formule de Plancherel sur le tore, fournit pour tout entier $p \geqq 1$ l'estimation en norme L^{2p} :

$$\int_{(\mathbb{R}/\mathbb{Z})^{\mathbb{N}}} \| \varphi_t \|_{2p}^{2p}\, dt = \sum_{|\alpha| = p} \frac{p!^2}{\alpha!^2} \| \varphi_\bullet^{*\alpha} \|_2^2, \tag{1.2}$$

où la somme est étendue aux suites presque nulles $(\alpha_0, \alpha_1, \ldots)$ de module p et où la notation $\varphi_\bullet^{*\alpha}$ désigne le produit de convolution $\varphi_0^{*\alpha_0} * \varphi_1^{*\alpha_1} * \ldots$ Les inégalités de Hausdorff-Young et de Cauchy-Schwarz entraînent les majorations :

$$\| \varphi_\bullet^{*\alpha} \|_2 \leqq \| \varphi_0 \|_2 \| \varphi_0 \|_1^{\alpha_0 - 1} \| \varphi_1 \|_1^{\alpha_1} \ldots \leqq \varepsilon^{(p-1)/2} \| \varphi_0 \|_2^{\alpha_0} \| \varphi_1 \|_2^{\alpha_1} \ldots \tag{1.3}$$

D'après (1.2), (1.3) et l'inégalité $p!^2/\alpha!^2 \leqq p!\,p!/\alpha!$ il s'ensuit donc :

$$\int_{(\mathbb{R}/\mathbb{Z})^{\mathbb{N}}} \| \hat{\varphi}_t \|_{2p}^{2p}\, dt \leqq p!\, \varepsilon^{p-1} (\Sigma \| \varphi_j \|_2^2)^p = p!\, \varepsilon^{p-1} \| \varphi \|_2^{2p}.$$

0249-6321/84/02990435 $ 2.00

Inégalité de Khintchine. — *Il existe* $t\in(\mathbb{R}/\mathbb{Z})^{\mathbb{N}}$ *tel que :*

$$\| \hat{\varphi}_t \|_{2p} \leqq (p!\, \varepsilon^{p-1})^{1/2p} \| \varphi \|_2. \tag{1.4}$$

L'inégalité élémentaire $(|\hat{\varphi}_t| - \eta)_+ \leqq (p-1)^{p-1} p^{-p} \eta^{1-p} |\hat{\varphi}_t|^p$, $\eta>0$, fournit alors le :

LEMME. — *Si* φ_t *satisfait l'inégalité de Khintchine, on a pour tout* $\eta>0$:

$$\| (|\hat{\varphi}_t| - \eta)_+ \|_{L^2(G)} \leqq C_{p,\,\varepsilon}\, \eta^{1-p} \| \varphi \|_2^p, \tag{1.5}$$

avec $C_{p,\,\varepsilon} = (\varepsilon^{p-1}\, p!)^{1/2} (p-1)^{p-1} p^{-p}$.

2. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME LKK. — Nous démontrons la version suivante du théorème, qui donne des estimations précises en normes L^2 et L^∞.

THÉORÈME LKK. — *Soit* M *un réel* $\geqq 17$ *et* $\varepsilon>0$. *Alors pour tout* $\varphi\in L^2(\hat{G})$ *il existe une fonction* $f\in L^2(G)\cap C_0(G)$ *vérifiant les propriétés :*

$$|\hat{f}| \geqq |\varphi| \text{ presque partout sur } \hat{G}, \tag{2.1}$$

$$\| f \|_2 \leqq \left(1+\frac{1}{M}\right) \| \varphi \|_2, \tag{2.2}$$

$$\| f \|_\infty \leqq \sqrt{\varepsilon}\,(1+\sqrt{2\,M/e})\, \| \varphi \|_2, \tag{2.3}$$

avec $\varepsilon=1$ *si* G *est compact, ou bien respectivement :*

$$\| f \|_2 \leqq 1{,}186\, \| \varphi \|_2, \tag{2.2'}$$

$$\| f \|_\infty \leqq 3{,}685\, \sqrt{\varepsilon}\, \| \varphi \|_2. \tag{2.3'}$$

Le théorème LKK résulte du lemme (1.5) grâce à un procédé de construction itératif général, implicitement contenu dans [4] et formalisé par S. V. Hruščev (*voir* Kisliakov [5]). Comme dans [4] il suffit en fait de vérifier l'existence de $f\in L^2(G)\cap L^\infty(G)$.

Soient δ_j, η_j, θ_j trois suites positives sommables qui seront précisées ultérieurement et $r_j(z)=z\,.\min(1, \eta_j/|z|)$, $z\in\mathbb{C}$, la rétraction sur le disque de rayon η_j. On construit une suite de fonctions $g_j\in L^2(G)$ ayant les propriétés suivantes : si

$$f_j = r_0(g_0) + \ldots + r_{j-1}(g_{j-1}) + g_j,$$

alors :

$$|\hat{f}_j| \geqq |\varphi|\,[(1+\delta_0)\ldots(1+\delta_{j-1})]^{-1}, \tag{2.4}$$

$$\| g_j \|_2 \leqq \theta_j, \tag{2.5}$$

$$\| (|g_j| - \eta_j)_+ \|_2 \leqq C_{p,\,\varepsilon}\, \eta_j^{1-p}\, \theta_j^p. \tag{2.6}$$

On suppose $\|\varphi\|_2=1$ pour simplifier, et on choisit $g_0(x)=\check{\varphi}_t(x)=\hat{\varphi}_t(-x)$ où φ_t est donnée par le lemme (1.5). On a donc $\hat{f}_0=\hat{g}_0=\varphi_t$ et les propriétés (2.4, 5, 6) sont vérifiées avec $\theta_0=\|\varphi\|_2=1$. Supposons construites $g_0, \ldots, g_j$ et soit $h_j=r_0(g_0)+\ldots+r_j(g_j)$. Alors :

$$\| f_j - h_j \|_2 = \| g_j - r_j(g_j) \|_2 = \| (|g_j| - \eta_j)_+ \|_2 \leqq C_{p,\,\varepsilon}\, \eta_j^{1-p}\, \theta_j^p.$$

On définit alors $\psi\in L^2(\hat{G})$ par :

$$\psi(\xi)=0 \quad \text{si (cas favorable)} \quad |\hat{h}_j(\xi)| \geqq |\varphi(\xi)|\,[(1+\delta_0)\ldots(1+\delta_j)]^{-1}, \tag{2.7}$$

(2.8) $$\psi(\xi)=2\,|\,\varphi(\xi)\,|\,[(1+\delta_0)\ldots(1+\delta_j)]^{-1} \text{ sinon.}$$

Dans ce dernier cas, on a $|\hat{h}_j(\xi)| \leqq |\hat{f}_j(\xi)|(1+\delta_j)^{-1}$ d'après (2.4), ce qui entraîne :

$$0\leqq\psi(\xi)\leqq\frac{2}{\delta_j}\,|\,\hat{f}_j(\xi)-\hat{h}_j(\xi)\,|,$$

$$\|\,\psi\,\|_2\leqq\frac{2}{\delta_j}\,\|\,f_j-h_j\,\|_2\leqq 2\,C_{p,\,\varepsilon}\,\delta_j^{-1}\,\eta_j^{1-p}\,\theta_j^p.$$

On définit alors $g_{j+1}=\check{\psi}_t$ où ψ_t est associée à ψ par (1.5). Cette fonction satisfait (2.5) et (2.6) si l'on pose :

(2.9) $$\theta_{j+1}=2\,C_{p,\,\varepsilon}\,\delta_j^{-1}\,\eta_j^{1-p}\,\theta_j^{-p}.$$

Comme $f_{j+1}=h_j+g_{j+1}$, on a d'autre part $\hat{f}_{j+1}=\hat{h}_j+\psi_t$ avec $|\psi_t|=\psi$, donc (2.4) est vérifié à l'ordre $j+1$ par construction de ψ. Les propriétés (2.4, 5, 6) montrent que la suite f_j converge vers une fonction $f=\sum_{j=0}^{+\infty} r_j(g_j)$ qui vérifie les inégalités :

(2.10) $$\|\,f\,\|_2\leqq\sum_{j=0}^{+\infty}\theta_j,\qquad \|\,f\,\|_\infty\leqq\sum_{j=0}^{+\infty}\eta_j,\qquad |\,\hat{f}\,|\geqq|\,\varphi\,|\prod_{j=0}^{+\infty}(1+\delta_j)^{-1}.$$

Le choix :

$$\delta_j=p^{-j-1},\qquad \theta_j=p^{-pj/(p-1)},\qquad \eta_j=\lambda\delta_j,\qquad \lambda=(2\,C_{p,\,\varepsilon}\,p^{p^2/p-1})^{1/p-1},$$

satisfait la relation de récurrence (2.9) et conduit aux estimations (2.2) et (2.3) avec les constantes respectives :

$$\sum\theta_j\prod(1+\delta_j)=A_p=\frac{1}{1-p^{-p/(p-1)}}\prod_{j=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{p^j}\right),$$

$$\sum\eta_j\prod(1+\delta_j)=\sqrt{\varepsilon}\,B_p=\sqrt{\varepsilon}\,(2\,p\,!^{1/2}\,p^{p/(p-1)})^{1/(p-1)}\prod_{j=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{p^j}\right).$$

On vérifie enfin par un calcul numérique que $A_{11}<1{,}186$, $B_{11}<3{,}685$ et $A_p<1+(1/M)$, $B_p<1+\sqrt{2\,M/e}$ pour $p-1\leqq 2\,M<p$, $M\geqq 17$. ■

3. Application au théorème d'Orlicz-Paley-Sidon. — Le théorème LKK apparaît comme une version forte du théorème OPS. En appliquant LKK à un groupe quotient U/D compact (U ⊂ G ouvert, D ⊂ U discret) on peut déduire la conséquence suivante relative aux espaces amalgames $l^p(L^q(G))$ (*cf.* [2]). L'espace $l^p(L^q(G))$ est par définition l'ensemble des f mesurables sur G telles que :

$$\|\,f\,\|_{l^p(L^q)}=\left[\int_G\|\,\mathbf{1}_{x+E}\,f\,\|_q^p\,dx\right]^{1/p}<+\infty,$$

où E est un voisinage compact de l'unité de G (*cf.* [1]). La transformation de Fourier envoie $l^1(L^2(G))$ dans $l^2(L^\infty(\hat{G}))$. Inversement :

COROLLAIRE. — *Soit* K *une partie compacte de* G *d'intérieur non vide. Il existe un compact* $L \subset \hat{G}$ *et une constante* $C>0$ *tels que pour toute fonction* $\varphi \in l^2(L^\infty(\hat{G}))$ *il existe une fonction* $f \in C_K(G)$ *à support dans* K *telle que :*

$$|\hat{f}| * \mathbf{1}_L \geqq |\varphi|, \qquad \|f\|_\infty \leqq C \|\varphi\|_{l^2(L^\infty)}.$$

Par dualité ce corollaire entraîne un théorème de type OPS, à savoir que l'espace des multiplicateurs ponctuels de $\widehat{C_K(G)}$ dans $L^1(\hat{G})$ est $l^2(L^1(\hat{G}))$.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

[1] J.-P. BERTRANDIAS et C. DUPUIS, Transformation de Fourier sur les espaces $l^p(L^{p'})$, *Ann. Inst. Fourier*, 29, n° 1, 1979, p. 189-206.

[2] J.-P. DEMAILLY. — Sur les transformées de Fourier de fonctions continues et le théorème de de Leeuw-Katznelson-Kahane, à paraître dans le fascicule 1983/1984 du groupe de travail d'Analyse harmonique de Grenoble.

[3] R. E. EDWARDS, *Fourier series, A modern introduction*, II; Holt, Rinehart and Winston (1967), 2ᵉ édition, Springer, 1982.

[4] K. DE LEEUW, Y. KATZNELSON et J.-P. KAHANE, Sur les coefficients de Fourier des fonctions continues, *Comptes rendus*, 285, série A, 1977, p. 1001-1003.

[5] S. B. KISLIAKOV, Fourier Coefficients of Analytic Functions Defined up to the Boundary, preprint Univ. de Leningrad 1978, *cf.* aussi Théorie spectrale des fonctions et des opérateurs, *Trudy Lenin. Mat. Institut.*, *Acad. Nauk S.S.S.R.*, 1981, 155, p. 77-94 (en russe).

17, *rue St-Exupéry*, 38400 *St-Martin d'Hères.*