

Courants positifs extrêmes et conjecture de Hodge

Jean-Pierre Demailly

Université Paris VI, Analyse Complexe et Géométric. Laboratoire Associé au C.N.R.S. (L.A. 213),
4, Place Jussieu, F-75230 Paris-Cedex 05, France

Table des matières

1. Introduction et énoncé des résultats	347
2. Un théorème de support pour les courants positifs fermés	351
3. Exemple de courant extrémal sur \mathbb{P}^2 qui n'est pas un cycle analytique.	354
4. Contre-exemples dans \mathbb{P}^n et \mathbb{C}^n	357
5. Equivalence entre les énoncés $\mathcal{L}(X; p)$ et $\mathcal{L}(X; p)$	360
6. Lien avec la conjecture de Hodge et obstructions topologiques	363
7. Approximation d'un courant de bidegré $(1, 1)$ par des diviseurs irréductibles	367

1. Introduction et énoncé des résultats

Le présent travail a pour objet principal de construire dans \mathbb{P}^2 ou \mathbb{C}^2 un exemple de $(1, 1)$ -courant positif fermé extrémal, qui n'est pas un cycle analytique. La preuve de l'extrémalité utilise un théorème général de support pour les courants positifs fermés, qui sera établi au §2. Nous étudions ensuite les relations entre le problème des courants extrêmes et la conjecture de Hodge. Avant de donner des énoncés plus précis, rappelons quelques définitions et résultats classiques (cf. P. Lelong [7], [8], R. Harvey [5]).

Soit X une variété analytique complexe de dimension n ; dans toute la suite, X sera soit une variété de Stein, soit une variété projective. Si k, p, q sont des entiers ≥ 0 , avec éventuellement $k = \infty$, on désigne par $\mathcal{C}_{p,q}^k(X)$ (resp. $\mathcal{D}_{p,q}^k(X)$) l'espace des formes de bidegré (p, q) et de classe C^k sur X (resp. à support compact). L'espace des courants d'ordre k et de bidimension (p, q) , ou de bidegré $(n-p, n-q)$, est par définition l'espace dual $[\mathcal{D}_{p,q}^k(X)]'$, $\mathcal{D}_{p,q}^k(X)$ étant muni de la topologie limite inductive usuelle. Pour simplifier les notations, on écrira aussi

$$\mathcal{D}_{p,q}(X) = \mathcal{D}_{p,q}^\infty(X), \quad \mathcal{D}'_{p,q}(X) = [\mathcal{D}_{p,q}(X)]'.$$

Définition 1.1. Une forme $\alpha \in \mathcal{C}_{p,p}^0(X)$ est dite :

(1.1) *fortement positive (ou fortement ≥ 0) si en tout point $z \in X$, $\alpha(z)$ est dans le cône convexe engendré par les (p, p) -formes du type*

$$(iu_1 \wedge \bar{u}_1) \wedge \dots \wedge (iu_p \wedge \bar{u}_p)$$

où $u_j \in \wedge^{1,0} T_z^* X$;

(1.2) *faiblement ≥ 0 si pour tout $z \in X$ et tout p -plan F de l'espace tangent $T_z X$, la restriction $\alpha(z)|_F$ est une (p, p) -forme fortement positive;*

(1.3) *positive définie (resp. fortement > 0 , faiblement > 0) au point $z \in X$, si toute petite perturbation de $\alpha(z)$ reste ≥ 0 dans le sens considéré.*

Un courant $T \in \mathcal{D}'_{p,p}(X)$ est dit faiblement (resp. fortement) positif si $\langle T, \alpha \rangle \geq 0$ pour toute forme $\alpha \in \mathcal{D}_{p,p}(X)$ fortement (resp. faiblement) positive.

Il résulte aisément de cette définition qu'un courant ou une forme fortement ≥ 0 sont aussi faiblement ≥ 0 ; on montre de plus que les notions de positivité relatives aux courants sont bien cohérentes avec celles relatives aux formes. Rappelons aussi que les notions de positivité forte et faible coïncident pour $p = 0, 1, n-1$ ou n et diffèrent dans tous les autres cas (cf. [6]). Un courant faiblement ≥ 0 est nécessairement d'ordre 0, i.e. ses coefficients sont des mesures de Radon.

Définition 1.2. *On notera $SPC^p(X)$ (resp. $WPC^p(X)$) l'ensemble des (p, p) -courants T fortement (resp. faiblement) positifs et fermés, c'est-à-dire tels que $dT = 0$.*

On vérifie facilement que $SPC^p(X) \subset WPC^p(X)$ sont des cônes convexes sail-lants, fermés pour la topologie faible de $\mathcal{D}'_{p,p}(X)$.

Définition 1.3. *Un courant T est dit extrême dans $SPC^p(X)$ si $T \in SPC^p(X)$ et si chaque fois que l'on a une décomposition $T = T_1 + T_2$ avec $T_1, T_2 \in SPC^p(X)$, alors T, T_1, T_2 sont proportionnels. L'ensemble des courants extrêmes de $SPC^p(X)$ sera noté $\mathcal{E}^p(X)$; on définit de même l'ensemble $\mathcal{E}_W^p(X)$ des courants extrêmes de $WPC^p(X)$.*

L'intérêt des courants extrêmes est dû en partie au résultat suivant, qui est une conséquence simple du théorème de Krein-Milman.

Proposition 1.4. *On a $SPC^p(X) = \widehat{\mathcal{E}^p(X)}$, $WPC^p(X) = \widehat{\mathcal{E}_W^p(X)}$ où le symbole $\widehat{}$ désigne l'enveloppe convexe fermée dans l'espace $\mathcal{D}'_{p,p}(X)$ muni de la topologie faible.*

A la suite de l'introduction des courants positifs par P. Lelong [7], différents auteurs ont posé le problème de l'étude des éléments extrêmes de $SPC^p(X)$ et $WPC^p(X)$. Il est classique que le courant d'intégration $[Z]$ sur un ensemble analytique irréductible Z de dimension p , est un élément extrême de chacun des cônes $SPC^p(X)$ et $WPC^p(X)$ (cf. [9], [5]).

Définition 1.5. *On désignera par $\mathcal{I}^p(X)$ l'ensemble des courants d'intégration $\lambda[Z] \in \mathcal{D}'_{p,p}(X)$, où Z est un ensemble analytique irréductible et $\lambda \geq 0$.*

D'après ce qui précède, on a donc $\mathcal{I}^p(X) \subset \mathcal{E}^p(X)$, $\mathcal{I}^p(X) \subset \mathcal{E}_W^p(X)$. On considère dans la suite le problème réciproque, soulevé notamment par P.

Lelong [9] et R. Harvey [5] dans le cas des variétés de Stein :

$$(\mathcal{L}(X; p)) \mathcal{E}^p(X) \subset \mathcal{F}^p(X).$$

On notera que le problème analogue $\mathcal{E}_W^p(X) \subset \mathcal{F}^p(X)$ ne se pose pas, puisque $\mathcal{F}^p(X) \subset SPC^p(X)$, alors que $\widehat{\mathcal{E}_W^p(X)} = WPC^p(X)$ n'est pas contenu dans $SPC^p(X)$ pour $p \neq 0, 1, n-1, n$. La réponse au problème $\mathcal{L}(X; p)$ est clairement affirmative si $p=0$ ou $p=n$. Nous allons voir que la réponse est négative en général dès que $1 \leq p \leq n-1$. Soit $\mathbb{IP}^n = \mathbb{IP}(\mathbb{C}^{n+1})$ l'espace projectif complexe de dimension n , z_0, z_1, \dots, z_n les coordonnées homogènes sur \mathbb{C}^{n+1} .

Théorème 1.6. *Soit $\Gamma_d \subset \mathbb{IP}^2$ la courbe d'équation $z_0^d + z_1^d + z_2^d = 0$. Alors la suite de $(1, 1)$ -courants $\frac{1}{d}[\Gamma_d]$ converge faiblement vers un courant extrême $T \in \mathcal{E}^1(\mathbb{IP}^2)$ qui n'est pas dans $\mathcal{F}^1(\mathbb{IP}^2)$.*

En particulier, l'énoncé $\mathcal{L}(\mathbb{IP}^2; 1)$ est faux.

La démonstration s'appuie sur un théorème général de support pour les (p, p) -courants positifs fermés (théorème 2.1), et sera détaillée au §3. Soit T un (p, p) -courant positif fermé dont le support est contenu dans une sous-variété réelle S de classe C^1 . On suppose que S est fibrée en variétés analytique de dimension complexe p , et totalement réelle dans les directions transverses aux fibres. Alors grossièrement parlant, le courant T est somme de courants d'intégration sur les fibres. Des résultats analogues ont sans doute déjà été discutés dans la littérature, mais pour la commodité du lecteur nous avons préféré donner des démonstrations complètes.

Une fois qu'on dispose d'un contre-exemple dans \mathbb{IP}^2 , il suffit d'appliquer formellement le résultat suivant pour obtenir des contre-exemples dans \mathbb{IP}^n et \mathbb{C}^n , lorsque $1 \leq p \leq n-1$ (voir §4).

Proposition 1.7. *Soit Y une sous-variété analytique fermée de X . On a les implications*

$$(1.4) \quad \mathcal{L}(X; p) \Rightarrow \mathcal{L}(Y; p);$$

$$(1.5) \quad \mathcal{L}(X \setminus Y; p) \text{ et } \mathcal{L}(Y; p) \Rightarrow \mathcal{L}(X; p);$$

$$(1.6) \quad \mathcal{L}(\mathbb{C}^n; p) \Rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{IP}^n; p);$$

$$(1.7) \quad \mathcal{L}(\mathbb{IP}^{n+k}; p+k) \Rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{IP}^n; p) \text{ pour tout entier } k \geq 1.$$

Le démonstration des points (1.5), (1.6), (1.7) fait usage d'un théorème de prolongement pour les courants positifs fermés de masse finie, dû à H. Skoda [1]. L'idée de la démonstration de (1.6) m'a été suggérée par M.M. Jean-Baptiste Poly et Gilles Raby. On notera qu'en général ni $\mathcal{E}^p(X)$, ni $\mathcal{F}^p(X)$ ne sont faiblement fermés dans $SPC^p(X)$, comme le montre dans \mathbb{IP}^2 l'exemple de la famille de coniques non dégénérées $\varepsilon z_0^2 + z_1^2 + z_2^2 = 0$ qui dégénèrent en une

réunion de 2 droites pour $\varepsilon=0$. Le contre-exemple du théorème 1.6 est obtenu précisément en choisissant une suite de $\mathcal{S}^1(\mathbb{P}^2)$ qui converge dans $\mathcal{E}^1(\mathbb{P}^2)$, mais pas dans $\mathcal{S}^1(\mathbb{P}^2)$. Il semble donc raisonnable de substituer à $\mathcal{L}(X; p)$ l'énoncé affaibli suivant:

$$(\overline{\mathcal{L}}(X; p)) \quad \mathcal{E}^p(X) \subset \overline{\mathcal{S}^p(X)},$$

où $\overline{\mathcal{S}^p(X)}$ est l'adhérence de $\mathcal{S}^p(X)$ pour la topologie faible de $\mathcal{D}'_{p,p}(X)$. Le théorème de Krein-Milman permet de transformer cet énoncé en une propriété plus parlante (cf. § 5).

Proposition 1.8 $\overline{\mathcal{L}}(X; p)$ est équivalent à l'énoncé $\widehat{\mathcal{L}}(X; p)$:

$$\widehat{\mathcal{S}^p(X)} = SPC^p(X),$$

où $\widehat{\mathcal{S}^p(X)}$ désigne l'enveloppe convexe fermée de $\mathcal{S}^p(X)$ dans $\mathcal{D}'_{p,p}(X)$.

La propriété $\widehat{\mathcal{L}}(X; p)$ est démontrée par P. Lelong [9] lorsque $p=n-1$ et lorsque X est une variété de Stein telle que $H^2(X, \mathbb{R})=0$. Etant donné un courant quelconque $T \in SPC^{n-1}(X)$, la méthode consiste à approximer le potentiel de T (qui est une fonction plurisousharmonique) par des logarithmes de fonctions holomorphes. On en déduit alors que T est limite faible des diviseurs associés.

Pour des variétés de Stein ou projectives quelconques, l'énoncé $\widehat{\mathcal{L}}(X; p)$ n'est pas adéquat, car il faut tenir compte de certaines obstructions de nature topologique. Il est facile de voir (prop. 6.3.) que $\widehat{\mathcal{S}^p(X)} \subset SPC^p_{\mathbb{Z}}(X)$, où $SPC^p_{\mathbb{Z}}(X)$ est l'ensemble des courants de $SPC^p(X)$ dont la classe de cohomologie appartient à $A^{2q}(X) = \text{adhérence dans } H^{2q}(X; \mathbb{R}) \text{ de } (H^{q,q}(X) \cap H^{2q}(X; \mathbb{Z})) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$, $q=n-p$. L'existence de ces obstructions permet de donner de nouveaux contre-exemples au problème $\mathcal{L}(X; 1)$ sur des surfaces algébriques affines, et également au problème $\widehat{\mathcal{L}}(X; p)$, lorsque X est une variété de Stein ayant une cohomologie entière «pathologique». On est donc amené à faire la conjecture suivante:

$$(\widehat{\mathcal{L}}_{\mathbb{Z}}(X; p)) \quad \widehat{\mathcal{S}^p(X)} = SPC^p_{\mathbb{Z}}(X).$$

L'énoncé $\widehat{\mathcal{L}}_{\mathbb{Z}}(X; p)$ est vrai en codimension 1 ($p=n-1$), et s'obtient par des arguments analogues à ceux de [9], à condition de remplacer les fonctions plurisous harmoniques par des métriques hermitiennes de fibrés linéaires positifs. Comme l'avait conjecturé P. Lelong [9], on a en fait un résultat un peu plus précis (voir § 7).

Théorème 1.9. Soit X une variété projective ou de Stein, connexe et de dimension $n \geq 2$. Alors $SPC^{n-1}_{\mathbb{Z}}(X) = \mathcal{S}^{n-1}(X)$.

Lorsque X est une variété projective, l'énoncé $\widehat{\mathcal{L}}_{\mathbb{Z}}(X; p)$ apparaît comme une formulation explicite forte de la conjecture de Hodge (cf. th. 6.4).

Théorème 1.10. Sur une variété projective X , l'hypothèse $\widehat{\mathcal{L}}_{\mathbb{Z}}(X; p)$ entraîne la conjecture de Hodge en degré $2q$ ($p+q = \dim X$), à savoir la propriété $\mathcal{H}(X; q)$:

$$H^{q,q}(X) \cap H^{2q}(X; \mathbb{Q})$$

est engendré par les classes des cycles algébriques de dimension p .

Signalons que R. Harvey et A.W. Knapp [6] ont également ramené la conjecture de Hodge à un problème de Plateau homologique pour les courants.

2. Un théorème de support pour les courants positifs fermés

Soient X une variété analytique complexe de dimension n , S une sous-variété fermée de classe C^1 et de dimension réelle $2p+k$, qui est fibrée en variétés analytiques de dimension complexe p . De façon précise, on suppose qu'il existe une variété M , $\dim_{\mathbb{R}} M = k$, et une submersion de classe C^1

$$\sigma : S \rightarrow M$$

dont les fibres $\sigma^{-1}(t)$, $t \in M$, sont des sous-variétés analytiques complexes. Si μ est une mesure de Radon sur M , on considère le (p, p) -courant $\Theta = \int_{t \in M} [\sigma^{-1}(t)] d\mu(t)$ défini par

$$\langle \Theta, \alpha \rangle = \int_{t \in M} d\mu(t) \int_{\sigma^{-1}(t)} \alpha \tag{2.1}$$

pour toute forme $\alpha \in \mathcal{D}_{p,p}(X)$. Le courant Θ est fermé, à support dans S , et il est fortement ≥ 0 si $\mu \geq 0$.

Inversement, nous allons voir que (2.1) donne bien tous les (p, p) -courants fermés d'ordre 0 à support dans S , sous des hypothèses assez générales sur S .

Théorème 2.1. *On suppose que les fibres $\sigma^{-1}(t)$ sont connexes, et que S est totalement réelle dans les directions transverses aux fibres, c'est-à-dire qu'en tout point $z \in S$ on a*

$$T_z S \cap iT_z S = T_z F_z, \tag{2.2}$$

où $F_z = \sigma^{-1}(\sigma(z))$ est la fibre du point z , et $T_z S$, $T_z F_z$ les espaces tangents respectifs à S et F_z . Alors pour tout courant fermé Θ de bidimension (p, p) et d'ordre 0 à support dans S , il existe une unique mesure de Radon μ sur M telle que

$$\Theta = \int_{t \in M} [\sigma^{-1}(t)] d\mu(t). \tag{2.3}$$

Si le courant Θ est faiblement ≥ 0 , alors la mesure μ est positive.

Notons d'abord que l'hypothèse (2.2) limite la dimension de S : en effet $T_z S / T_z F_z$ est un sous-espace totalement réel de $T_z X / T_z F_z$, on a donc nécessairement $k \leq n - p$, soit $\dim_{\mathbb{R}} S \leq n + p$.

L'hypothèse (2.2) est d'autre part automatiquement vérifiée si $k = 1$.

Démonstration. Puisque Θ est un courant fermé d'ordre 0 (donc localement plat) à support dans S , il existe un courant θ d'ordre 0 sur S tel que $\Theta = i_* \theta$, où $i^s : S \rightarrow X$ est l'inclusion (voir H. Federer [3] ou R. Harvey [5], théorème 1.7(b)).

Démontrer (2.3) revient donc à construire une mesure μ sur M telle que

$$\langle \theta, \alpha \rangle = \int_{t \in M} d\mu(t) \int_{\sigma^{-1}(t)} \alpha \tag{2.4}$$

pour toute $2p$ -forme α continue à support compact sur S . On voit qu'il suffit en fait de construire, relativement à un recouvrement ouvert \mathcal{U} de M , des mesures locales μ_U définies sur chaque $U \in \mathcal{U}$ et vérifiant (2.4) pour les formes α à support dans $\sigma^{-1}(U)$. La propriété d'unicité montrera que $\mu_U = \mu_V$ sur $U \cap V$, donc les mesures μ_U pourront se recoller en une unique mesure μ sur M qui répondra à la question. Soit U un ouvert de carte, muni de coordonnées locales x_1, x_2, \dots, x_k de classe C^1 .

On désigne par dM_U la forme volume $dM_U = dx_1 \wedge dx_2 \dots \wedge dx_k$ sur U .

Lemme 2.2. *Sous les hypothèses du théorème 2.1, il existe un courant θ_U d'ordre 0 et de degré 0 sur $\sigma^{-1}(U)$ tel que*

$$\theta = \theta_U \cdot \sigma^*(dM_U).$$

Démonstration. Soit $z \in \sigma^{-1}(U) \subset S$. Il existe un voisinage W de z dans X et des coordonnées locales w_1, w_2, \dots, w_{2n} de classe C^1 sur W telles que

$$(2.5) \quad w_j = x_j \circ \sigma \text{ sur } S \cap W, \quad 1 \leq j \leq k;$$

$$(2.6) \quad S \cap W = \{ \zeta \in W; w_j(\zeta) = 0 \text{ pour } k+1 \leq j \leq 2n-2p \};$$

(2.7) les $w_j, j > 2n-2p$, définissent des coordonnées locales sur les fibres $F_\zeta \cap W, \zeta \in S \cap W$.

Puisque Θ est d'ordre 0 à support dans S , on a sur W les relations

$$w_j \cdot \Theta = 0, \quad k+1 \leq j \leq 2n-2p,$$

d'où après différentiation $dw_j \wedge \Theta = 0$. Comme Θ est de bidegré pur, on en déduit $d^c w_j \wedge \Theta = 0$, avec la notation usuelle $d^c = i(\bar{\partial} - \partial)$. Calculons en tout point $\zeta \in S \cap W$ l'intersection des noyaux des 1-formes $dw_j, d^c w_j$ pour $k+1 \leq j \leq 2n-2p$:

$$\bigcap \text{Ker } dw_j \cap \bigcap \text{Ker } d^c w_j = T_\zeta S \cap iT_\zeta S = T_\zeta F_\zeta$$

d'après l'hypothèse (2.2). Les formes $dw_l, 1 \leq l \leq k$, sont nulles sur l'espace $T_\zeta F_\zeta$ tangent aux fibres. Il existe donc des fonctions réelles a_{jl}, a'_{jl} continues sur W et telles que $dw_l = \sum_j (a_{jl} dw_j + a'_{jl} d^c w_j)$ en tout point de $S \cap W$. On a par conséquent pour $l = 1, 2, \dots, k$:

$$dw_l \wedge \Theta = \sum_j (a_{jl} dw_j \wedge \Theta + a'_{jl} d^c w_j \wedge \Theta) = 0.$$

Le courant θ étant de degré k , on peut écrire sur S

$$\theta = \sum_{|K|=k} \theta_{K,W} dw_K$$

où K décrit l'ensemble des multi-indices de longueur k à valeurs dans $\{1, 2, \dots, k\} \cup \{2n - 2p + 1, \dots, 2n\}$ et où $\theta_{k,W}$ est un courant d'ordre 0 et de degré 0 sur $S \cap W$. Les conditions $dw_i \wedge \Theta = 0$ montrent que θ se réduit à un seul terme:

$$\theta = \theta_{(1, 2, \dots, k), W} dw_1 \wedge \dots \wedge dw_k, \tag{2.8}$$

soit encore $\theta = \theta_{(1, 2, \dots, k), W} \sigma^*(dM_U)$ d'après (2.5). Il est clair que les différents courants $\theta_{(1, 2, \dots, k), W}$ se recollent en un courant θ_U sur $\sigma^{-1}(U)$ qui satisfait aux conclusions du lemme 2.2. \square

Lemme 2.3. *Avec les notations précédentes, il existe un courant v_U d'ordre 0 et de degré 0 sur U tel que $\theta_U = \sigma^*(v_U)$, i.e. $\theta = \sigma^*(v_U \cdot dM_U)$.*

Démonstration. En effet d'après (2.8), l'hypothèse que θ est fermé entraîne

$$\frac{\partial \theta_U}{\partial w_j} = 0 \quad \text{sur } S \cap W \quad \text{pour } 2n - 2p + 1 \leq j \leq 2n,$$

c'est-à-dire que les dérivées partielles de θ_U dans la direction des fibres sont nulles (cf. (2.7)). Comme les fibres sont supposées connexes, le lemme 2.3 s'ensuit aisément. \square

Le lemme 2.3 montre que pour toute forme α continue à support compact dans $\sigma^{-1}(U)$ on a les égalités

$$\langle \theta, \alpha \rangle = \langle v_U \cdot dM_U, \sigma_* \alpha \rangle = \int_{t \in M} v_U \cdot dM_U(t) \int_{\sigma^{-1}(t)} \alpha;$$

la relation (2.4) est donc bien démontrée avec la mesure $\mu_U = v_U \cdot dM_U$ à la place de μ . Il nous reste à vérifier que μ_U est ≥ 0 si le courant Θ est faiblement ≥ 0 . Ceci démontrera simultanément l'unicité des mesures μ_U , en prenant $\Theta = 0$.

Lemme 2.4. *On suppose que le courant Θ est faiblement ≥ 0 . Alors la mesure représentative μ est ≥ 0 .*

Démonstration. Soient χ une fonction continue ≥ 0 à support compact dans M , L une partie compacte de S telle que $\sigma(L) \supset \text{Supp } \chi$, $\beta \in \mathcal{D}_{p,p}(X)$ une forme fortement ≥ 0 et > 0 sur L , χ_1 la fonction continue sur M définie par $\chi_1(t) = \chi(t) \left[\int_{\sigma^{-1}(t)} \beta \right]^{-1}$. Appliquons (2.1) à la forme fortement positive $\alpha = \chi_1 \circ \sigma \cdot \beta$; il vient

$$0 \leq \langle \Theta, \alpha \rangle = \int_{t \in M} \chi_1(t) d\mu(t) \int_{\sigma^{-1}(t)} \beta = \int_{t \in M} \chi(t) d\mu(t). \quad \square$$

Nous aurons besoin également du résultat simple et plus ou moins classique suivant: lorsque le support d'un (p, p) -courant localement normal Θ ne contient pas «suffisamment» de directions complexes, alors Θ est nécessairement nul. On rappelle qu'un courant Θ est dit localement normal si Θ et $d\Theta$ sont d'ordre 0.

Proposition 2.5. *Soit Θ un courant localement normal de bidimension (p, p) sur X , à support dans une sous-variété Σ de classe C^1 telle que $\dim_{\mathbb{C}}(T_z \Sigma \cap iT_z \Sigma) < p$ en tout point $z \in \Sigma$. Alors $\Theta = 0$.*

La démonstration est analogue à celle du lemme 2.2. Soient w_1, w_2, \dots, w_{2n} des coordonnées locales sur un voisinage W d'un point $z \in \Sigma$ telles que

$$\Sigma \cap W = \{ \zeta \in W; w_j(\zeta) = 0, 1 \leq j \leq N \}.$$

Puisque les courants Θ et $d\Theta$ sont d'ordre 0, on a $w_j \cdot \Theta = w_j \cdot d\Theta = 0$ sur W , $1 \leq j \leq N$, donc

$$dw_j \wedge \Theta = d(w_j \cdot \Theta) - w_j \cdot d\Theta = 0.$$

Le courant Θ étant de bidegré pur, on en déduit $d^c w_j \wedge \Theta = 0$, et la condition $\dim_{\mathbb{C}}(T_z \Sigma \cap iT_z \Sigma) < p$ montre que le rang des 1-formes réelles dw_1, \dots, dw_N , $d^c w_1, \dots, d^c w_N$ est $> 2n - 2p$. Soit $(u_1, u_2, \dots, u_{2n})$ un repère local de 1-formes réelles continues au voisinage de z , tel que $u_1, u_2, \dots, u_{2n-2p+1}$ soient extraites de la famille $dw_j, d^c w_j, 1 \leq j \leq N$. On peut écrire $\Theta = \sum_K \Theta_K u_K$ avec $u_K = u_{k_1} \wedge \dots \wedge u_{k_{2n-2p}}$, et $u_l \wedge \Theta = 0, 1 \leq l \leq 2n - 2p + 1$, d'où l'on conclut que les coefficients Θ_K sont nuls. \square

3. Exemple de courant extrêmial sur \mathbb{P}^2 qui n'est pas un cycle analytique

On munit \mathbb{P}^2 de la métrique de Fubini-Study ω définie par

$$\pi^* \omega = \frac{i}{2\pi} \partial \bar{\partial} \log(|z_0|^2 + |z_1|^2 + |z_2|^2)$$

où $\pi: \mathbb{C}^3 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{P}^2, \pi(z_0, z_1, z_2) = [z_0, z_1, z_2]$ est la projection canonique. Le coefficient $\frac{i}{2\pi}$ est choisi de manière que la classe de cohomologie de ω coïncide avec le générateur positif de $H^2(\mathbb{P}^2, \mathbb{Z})$. Comme la courbe $\Gamma_d: z_0^d + z_1^d + z_2^d = 0$ est de degré d , la masse totale du courant d'intégration $[F_d]$ est donnée par

$$\int_{\mathbb{P}^2} [F_d] \wedge \omega = \int_{\Gamma_d} \omega = d. \tag{3.1}$$

La première étape en vue de montrer la convergence faible de la suite $\frac{1}{d}[F_d]$ est de préciser le support des éventuels courants limites. L'ensemble des $(1, 1)$ -courants ≥ 0 de masse 1 sur \mathbb{P}^2 est compact pour la topologie faible de $\mathcal{D}'_{1,1}(\mathbb{P}^2)$; il suffira donc de montrer que tous les courants T qui sont valeurs d'adhérence de la suite $\frac{1}{d}[F_d]$ sont égaux.

Lemme 3.1. *Soit $T \in SPC^1(\mathbb{P}^2)$ une valeur d'adhérence faible de la suite $\frac{1}{d}[F_d]$.*

Alors $\int_{\mathbb{P}^2} T \wedge \omega = 1$ et le support de T est contenu dans l'ensemble S des points $[z_0, z_1, z_2] \in \mathbb{P}^2$ tels qu'il existe une permutation (j, k, l) de $(0, 1, 2)$ telle que

$$|z_j| \leq |z_k| = |z_l|. \tag{3.2}$$

Démonstration. Soit $\zeta = [z_0, z_1, z_2] \notin S$. Après permutation éventuelle des coordonnées, on peut supposer $|z_0| \leq |z_1| < |z_2|$. Choisissons $\varepsilon > 0$ tel que $|z_1| < (1 - \varepsilon)|z_2|$ et soit V le voisinage de ζ défini par

$$V = \{\eta = [w_0, w_1, w_2]; \sup(|w_0|, |w_1|) < (1 - \varepsilon)|w_2|\}.$$

Si $\eta \in V \cap \Gamma_d$, il vient $|w_2|^d \leq |w_0|^d + |w_1|^d < 2(1 - \varepsilon)^d |w_2|^d$, ce qui est impossible pour d assez grand. Par conséquent V ne rencontre qu'un nombre fini de courbes Γ_d et le point ζ ne peut appartenir au support de T . \square

Les informations contenues dans le lemme 3.1 suffisent pour déterminer T . Le théorème 2.1 et la proposition 2.5 permettent en fait de décrire complètement la structure des $(1, 1)$ -courants fermés d'ordre 0 dont le support est contenu dans S . Pour chaque indice $j = 0, 1, 2$ et k, l tels que $k < l$ et $\{j, k, l\} = \{0, 1, 2\}$, on considère les ensembles suivants:

$$(3.3) \quad U_j = \{[z_0, z_1, z_2]; |z_j| < \sup(|z_k|, |z_l|)\} \text{ ouvert dans } \mathbb{IP}^2;$$

$$(3.4) \quad \Delta_j(t) = \{[z_0, z_1, z_2] \in U_j; z_l = z_k e^{2\pi i t}\}, \quad t \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}.$$

Alors l'ensemble S est la réunion disjointe

$$S = S_0 \cup S_1 \cup S_2 \cup \Sigma$$

avec

$$S_j = S \cap U_j = \{[z_0, z_1, z_2]; |z_j| < |z_k| = |z_l|\},$$

$$\Sigma = \{[z_0, z_1, z_2]; |z_0| = |z_1| = |z_2|\}.$$

L'ensemble S_j est fibré par les variétés $\Delta_j(t)$, $t \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, qui sont en fait des disques complexes. On est donc dans la situation décrite par le théorème 2.1 avec $\dim_{\mathbb{R}} S_j = 3$, $p = 1$, $k = 1$, ce qui donne le.

Lemme 3.2. Soit $\Theta \in \mathcal{D}'_{1,1}(\mathbb{IP}^2)$ un courant fermé de bidimension $(1, 1)$ et d'ordre 0 à support dans S . Alors il existe une mesure μ_j sur \mathbb{R}/\mathbb{Z} telle que

$$\Theta|_{U_j} = \int_{t \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}} [\Delta_j(t)] d\mu_j(t),$$

où $\Theta|_{U_j}$ est la restriction de Θ à l'ouvert U_j . \square

Soit $\Theta_j = \int_{t \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}} [\Delta_j(t)] d\mu_j(t)$ le courant d'ordre 0 et de bidimension $(1, 1)$ sur \mathbb{IP}^2 défini par

$$\langle \Theta_j, \alpha \rangle = \int_{t \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}} d\mu_j(t) \int_{\Delta_j(t)} \alpha. \tag{3.5}$$

pour $\alpha \in \mathcal{D}'_{1,1}(\mathbb{IP}^2)$. Le courant Θ_j est à support dans \bar{S}_j , mais n'a aucune raison d'être fermé. Il est clair que $\bar{S}_j \cap U_k = \emptyset$ pour $j \neq k$, donc $\Theta_j|_{U_k} = 0$ et $\Theta = \Theta_0 + \Theta_1 + \Theta_2$ sur $U_0 \cup U_1 \cup U_2 = \mathbb{IP}^2 \setminus \Sigma$.

On va voir que cette égalité se prolonge à \mathbb{IP}^2 .

Lemme 3.3. On a $\Theta = \Theta_0 + \Theta_1 + \Theta_2$ sur \mathbb{IP}^2 .

Démonstration. On vérifiera par un calcul explicite de $d\Theta_j$ que le courant Θ_j est localement normal (cf. lemme 3.4). Comme Σ est une sous-variété totalement réelle de \mathbb{P}^2 et que $\Theta - (\Theta_0 + \Theta_1 + \Theta_2)$ est un courant localement normal de bidimension $(1, 1)$ à support dans Σ , la proposition 2.5 montre que $\Theta - (\Theta_0 + \Theta_1 + \Theta_2) = 0$. \square

Il nous reste à calculer le bord $d\Theta_j$. On sait que Θ_j est fermé sur U_j , donc le support de $d\Theta_j$ est contenu dans $\bar{S}_j \setminus S_j = \Sigma$. On va travailler en coordonnées non homogènes $\zeta_1 = \frac{z_1}{z_0}$, $\zeta_2 = \frac{z_2}{z_0}$ dans l'ouvert $\mathbb{C}^2 = \{z_0 \neq 0\} \subset \mathbb{P}^2$. Dans ces coordonnées, l'ensemble Σ est le tore d'équations $\zeta_1 = e^{2\pi i t_1}$, $\zeta_2 = e^{2\pi i t_2}$ où $(t_1, t_2) \in (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^2$. Les disques $\Delta_j(t)$, $j=0, 1, 2$, $t \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, sont définis de la manière suivante :

$$(3.6) \quad \begin{cases} \Delta_0(t): \zeta_2 = \zeta_1 e^{2\pi i t}, & |\zeta_1| > 1 \text{ (et un point à l'infini)} \\ \Delta_1(t): \zeta_2 = e^{2\pi i t}, & |\zeta_1| < 1 \\ \Delta_2(t): \zeta_1 = e^{2\pi i t}, & |\zeta_2| < 1. \end{cases}$$

Lemme 3.4. *Soit β une 1-forme de classe C^∞ sur \mathbb{P}^2 et*

$$\beta|_\Sigma = \beta_1(t_1, t_2) dt_1 + \beta_2(t_1, t_2) dt_2,$$

$(t_1, t_2) \in (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^2$, sa restriction à Σ . Alors les courants $d\Theta_j$ sont donnés par

$$\begin{aligned} \langle d\Theta_0, \beta \rangle &= \iint [\beta_1(t_1, t_1 + t) + \beta_2(t_1, t_1 + t)] dt_1 d\mu_0(t), \\ \langle d\Theta_1, \beta \rangle &= - \iint \beta_1(t_1, t) dt_1 d\mu_1(t), \\ \langle d\Theta_2, \beta \rangle &= - \iint \beta_2(t, t_2) dt_2 d\mu_2(t). \end{aligned}$$

En particulier Θ_j est normal sur \mathbb{P}^2 (i.e. Θ_j et $d\Theta_j$ sont d'ordre 0). Le courant $\Theta = \Theta_0 + \Theta_1 + \Theta_2$ est fermé si et seulement si il existe une constante $\lambda \in \mathbb{C}$ telle que $d\mu_0 = d\mu_1 = d\mu_2 = \lambda dt$.

Démonstration. Par définition du bord d'un courant, on a $\langle d\Theta_j, \beta \rangle = -\langle \Theta_j, d\beta \rangle$, donc d'après (3.5)

$$\langle d\Theta_j, \beta \rangle = - \int_{\mathbb{R}/\mathbb{Z}} d\mu_j(t) \int_{\Delta_j(t)} d\beta = - \int_{\mathbb{R}/\mathbb{Z}} d\mu_j(t) \int_{\partial \Delta_j(t)} \beta$$

où le bord $\partial \Delta_j(t)$ est orienté par la normale extérieure. D'après (3.6), $\partial \Delta_j(t)$ est défini et orienté comme suit :

$$\begin{cases} \partial \Delta_0(t): \zeta_1 = e^{2\pi i t_1}, \zeta_2 = e^{2\pi i(t_1 + t)}, \text{ orienté par } -dt_1 \\ \partial \Delta_1(t): \zeta_1 = e^{2\pi i t_1}, \zeta_2 = e^{2\pi i t}, \text{ orienté par } dt_1 \\ \partial \Delta_2(t): \zeta_1 = e^{2\pi i t}, \zeta_2 = e^{2\pi i t_2}, \text{ orienté par } dt_2. \end{cases}$$

Les formules du lemme 3.4 en résultent immédiatement.

Si $d\mu_0 = d\mu_1 = d\mu_2 = \lambda dt$, il est alors trivial de vérifier que $d\Theta = 0$. Inversement supposons $d\Theta = 0$ et choisissons β telle que $\beta_2 = 0$, $\beta_1(t_1, t_2)$

$= u(t_1)v(t_2)$, avec $u, v \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$. Il vient

$$\langle d\Theta, \beta \rangle = \int u(t_1) dt_1 \int [v(t_1+t) d\mu_0(t) - v(t) d\mu_1(t)] = 0,$$

ce qui équivaut, pour tout $v \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ et tout $t_1 \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, à

$$\int v(t_1+t) d\mu_0(t) = \int v(t) d\mu_1(t).$$

Choisissons en particulier $v(t) = e^{2\pi i n t}$, $n \in \mathbb{Z}$; on obtient

$$\begin{aligned} \int d\mu_0(t) &= \int d\mu_1(t) = \text{constante } \lambda \in \mathbb{C} \\ \int e^{2\pi i n t} d\mu_0(t) &= \int e^{2\pi i n t} d\mu_1(t) = 0 \text{ pour } n \neq 0. \end{aligned}$$

On a donc $d\mu_0 = d\mu_1 = \lambda dt$. L'égalité $d\mu_0 = d\mu_2$ se démontre de même en prenant

$$\beta_1 = 0, \quad \beta_2(t_1, t_2) = u(t_1)v(t_2). \quad \square$$

La conjonction des lemmes 3.2, 3.3 et 3.4 entraîne finalement le résultat suivant.

Théorème 3.5. *Soit T le courant ≥ 0 fermé défini par*

$$\langle T, \alpha \rangle = \sum_{j=0,1,2} \int_{t \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}} dt \int_{\Delta_j(t)} \alpha$$

pour $\alpha \in \mathcal{D}_{1,1}(\mathbb{P}^2)$. Alors tout courant fermé Θ de bidimension $(1, 1)$ et d'ordre 0 à support dans S est de la forme

$$\Theta = \lambda T, \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

En particulier T est extrémal dans $SPC^1(\mathbb{P}^2) = WPC^1(\mathbb{P}^2)$.

Le lemme 3.1 et les remarques qui précèdent montrent alors que la suite $\frac{1}{d}[T_d]$ converge vers $\lambda_1 T$, où λ_1 est l'unique réel > 0 tel que la masse du courant $\lambda_1 T$ soit égale à 1. Ceci démontre le théorème 1.6. Un calcul facile permet de vérifier que la masse $\int_{\mathbb{P}^2} T \wedge \omega$ est précisément égale à 1, donc que $\lambda_1 = 1$.

4. Contre-exemples dans \mathbb{P}^n et \mathbb{C}^n

Nous allons montrer que le problème $\mathcal{L}(X; p)$ a en général une réponse négative.

Théorème 4.1. *Les assertions $\mathcal{L}(\mathbb{P}^n; p)$ et $\mathcal{L}(\mathbb{C}^n; p)$ sont fausses pour $0 < p < n$.*

Le théorème 4.1 résulte du théorème 1.6 et des implications (1.6), (1.7). Il suffit donc de prouver la proposition 1.7.

Démonstration de (1.4). Soit Y une sous-variété analytique fermée de X , $j: Y \rightarrow X$ l'inclusion et $T \in \mathcal{E}^p(Y)$.

Le morphisme image directe j_* induit un isomorphisme de $SPC^p(Y)$ sur les courants de $SPC^p(X)$ à support dans Y , donc $j_*T \in \mathcal{E}^p(X)$. L'hypothèse $\mathcal{L}(X; p)$ entraîne alors $j_*T = [Z]$ où $\lambda \geq 0$ et où $Z \subset X$ est un ensemble analytique de dimension p . Z étant nécessairement contenu dans Y si $\lambda \neq 0$, on a $T = \lambda[Z]$ sur Y . L'énoncé $\mathcal{L}(Y; p)$ est donc bien vrai. \square

Démonstration de (1.5). Si $T \in \mathcal{E}^p(X)$, on peut écrire $T = 1_{X \setminus Y} \cdot T + 1_Y \cdot T$, $1_{X \setminus Y}$ et 1_Y étant les fonction caractéristiques de $X \setminus Y$ et de Y . D'après H. Skoda [11] les courants $1_{X \setminus Y} \cdot T$ et $1_Y \cdot T$ sont fermés. Puisque T est extrémal, on a nécessairement $1_{X \setminus Y} \cdot T = 0$ ou $1_Y \cdot T = 0$.

Si $1_{X \setminus Y} \cdot T = 0$, T est à support dans Y , et l'hypothèse $\mathcal{L}(Y; p)$ permet de conclure. Supposons donc $1_Y \cdot T = 0$, et montrons alors que la restriction $T|_{X \setminus Y} \in \mathcal{E}^p(X \setminus Y)$.

En effet si $T|_{X \setminus Y} = T_1 + T_2$ avec $T_1, T_2 \in SPC^p(X \setminus Y)$, alors T_1 et T_2 sont localement de masse finie au voisinage de Y ; soient \tilde{T}_1, \tilde{T}_2 les extensions simples de T_1 et T_2 à X , obtenues en prolongeant ces courants par 0 sur Y . D'après [11] \tilde{T}_1 et \tilde{T}_2 sont des courants fermés sur X , de sorte que $T = 1_{X \setminus Y} \cdot T = \tilde{T}_1 + \tilde{T}_2$. Par suite $T, \tilde{T}_1, \tilde{T}_2$ sont proportionnels, et il en est de même pour $T|_{X \setminus Y}, \tilde{T}_1, \tilde{T}_2$.

L'hypothèse $\mathcal{L}(X \setminus Y; p)$ appliquée à $T|_{X \setminus Y}$ permet donc d'écrire $T|_{X \setminus Y} = \lambda[Z]$ où Z est un ensemble analytique de dimension p dans $X \setminus Y$. En raisonnant comme plus haut, on voit que l'extension simple $[Z]^\sim$ de $[Z]$ à X est fermée, et d'après [11] on a $[Z]^\sim = [\bar{Z}]$, où l'adhérence \bar{Z} de Z dans X est un ensemble analytique. Par suite $T = \lambda[\bar{Z}]$ sur X . \square

Démonstration de (1.6). On raisonne par récurrence sur n , l'implication étant triviale pour $n=1$. D'après (1.4) et l'hypothèse de récurrence on a les implications

$$\mathcal{L}(\mathbb{C}^n; p) \Rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{C}^{n-1}; p) \Rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{P}^{n-1}; p).$$

La propriété $\mathcal{L}(\mathbb{P}^n; p)$ est alors conséquence de (1.5), avec $X = \mathbb{P}^n, Y = \mathbb{P}^{n-1}, X \setminus Y = \mathbb{C}^n$. \square

Démonstration de (1.7). Il n'est pas restrictif de supposer $p \geq 1, k \geq 1$. Soit

$$\sigma: \mathbb{P}^{n+k} \setminus \mathbb{P}^{k-1} \rightarrow \mathbb{P}^n$$

l'application définie en coordonnées homogènes par

$$\zeta = [z_0, z_1, \dots, z_{n+k}], \quad \sigma(\zeta) = [z_0, z_1, \dots, z_n],$$

avec

$$\mathbb{P}^{k-1} = \{ \zeta \in \mathbb{P}^{n+k}; z_0 = \dots = z_n = 0 \}.$$

L'application σ est submersive, donc on a un morphisme image réciproque

$$\sigma^*: SPC^p(\mathbb{P}^n) \rightarrow SPC^{p+k}(\mathbb{P}^{n+k} \setminus \mathbb{P}^{k-1}).$$

On va encore utiliser le théorème de prolongement de H. Skoda [11] pour envoyer $SPC^p(\mathbb{P}^n)$ dans $SPC^{p+k}(\mathbb{P}^{n+k})$. Nous aurons besoin pour cela du résultat élémentaire suivant.

Lemme 4.2. Soit ω_n la métrique kählerienne sur \mathbb{P}^n induite par la forme

$$\frac{i}{2\pi} \partial\bar{\partial} \log(|z_0|^2 + |z_1|^2 + \dots + |z_n|^2)$$

sur \mathbb{C}^{n+1} . Alors l'image directe $\sigma_*(\omega_{n+k}^{p+k})$ calculée par intégration sur les fibres de σ existe, et on a

$$\sigma_*(\omega_{n+k}^{p+k}) = \omega_n^p.$$

Démonstration. On se place dans l'ouvert $\mathbb{C}^{n+k} \subset \mathbb{P}^{n+k}$ défini par $z_0 = 1$. Dans \mathbb{C}^{n+k} les coefficients de ω_{n+k} sont $O((1 + |z|^2)^{-1})$ avec $|z|^2 = |z_1|^2 + \dots + |z_{n+k}|^2$, d'où $\omega_{n+k}^{p+k} = O((1 + |z|^2)^{-p-k})$.

L'intégrale de ω_{n+k}^{p+k} sur les fibres de σ , i.e. par rapport aux coordonnées z_{n+1}, \dots, z_{n+k} , est donc convergente.

On sait que ω_{n+k} est invariante sous l'action du groupe unitaire $U(n+k+1)$ opérant sur \mathbb{P}^{n+k} . En considérant l'action du sous-groupe $U(n+1)$ sur les coordonnées (z_0, \dots, z_n) , on voit que la forme $\sigma_*\omega_{n+k}^{p+k}$ est invariante par $U(n+1)$. Il existe donc une constante $c > 0$ telle que $\sigma_*\omega_{n+k}^{p+k} = c\omega_n^p$. Une remarque simple montrera ultérieurement que $c = 1$. \square

Pour tout courant $T \in SPC^p(\mathbb{P}^n)$, la formule $\sigma_*\omega_{n+k}^{p+k} = c\omega_n^p$ donne

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{P}^{n+k} \setminus \mathbb{P}^{k-1}} \sigma^* T \wedge \omega_{n+k}^{p+k} &= \int_{\mathbb{P}^n} T \wedge \sigma_* \omega_{n+k}^{p+k} \\ &= c \int_{\mathbb{P}^n} T \wedge \omega_n^p; \end{aligned} \tag{4.1}$$

la première égalité se justifie en tronquant la forme ω_{n+k}^{p+k} pour la rendre à support compact dans $\mathbb{P}^{n+k} \setminus \mathbb{P}^{k-1}$, et en passant à la limite. Le courant $\sigma^* T$ est donc de masse finie au voisinage de \mathbb{P}^{k-1} et d'après [11] $\sigma^* T$ se prolonge en un courant $\tilde{\sigma}^* T$ sur \mathbb{P}^{n+k} . On a donc bien défini un morphisme

$$\tilde{\sigma}^*: SPC^p(\mathbb{P}^n) \rightarrow SPC^{p+k}(\mathbb{P}^{n+k}).$$

L'égalité (4.1) donne alors

$$\int_{\mathbb{P}^{n+k}} \tilde{\sigma}^* T \wedge \omega_{n+k}^{p+k} = c \int_{\mathbb{P}^n} T \wedge \omega_n^p.$$

Si l'on choisit en particulier $T = [\mathbb{P}^p]$, on voit que $\tilde{\sigma}^* T = [\mathbb{P}^{p+k}]$ et que les deux intégrales précédentes sont égales à 1. On a donc bien $c = 1$.

Lemme 4.3. L'image de $\tilde{\sigma}^*$ est l'ensemble des courants $\Theta \in SPC^{p+k}(\mathbb{P}^{n+k})$ tels que $\Theta \wedge \sigma^*\omega_n^{p+1} = 0$ sur $\mathbb{P}^{n+k} \setminus \mathbb{P}^{k-1}$.

Démonstration. Si $\Theta = \tilde{\sigma}^* T$, alors $\sigma^* T \wedge \sigma^*\omega_n^{p+1} = \sigma^*(T \wedge \omega_n^{p+1}) = 0$. Inversement soit $\Theta \in SPC^{p+k}(\mathbb{P}^{n+k})$ tel que $\Theta \wedge \sigma^*\omega_n^{p+1} = 0$ sur $\mathbb{P}^{n+k} \setminus \mathbb{P}^{k-1}$. On peut toujours choisir les coordonnées z_0, z_1, \dots, z_n de sorte que l'hyperplan $\{z_0 = 0\} \subset \mathbb{P}^{n+k}$ soit de masse nulle pour Θ (c'est possible car \mathbb{P}^{k-1} est de masse nulle).

On peut alors travailler dans les coordonnées (z_1, \dots, z_{n+k}) avec $z_0 = 1$. L'application σ s'identifie à la projection $\mathbb{C}^{n+k} \rightarrow \mathbb{C}^n$, et la condition

$\Theta \wedge \sigma^* \omega_n^{p+1} = 0$ entraîne que

$$\Theta|_{\mathbb{C}^{n+k}} \wedge dz_I \wedge d\bar{z}_I = 0 \tag{4.2}$$

pour tout multi-indice $I \subset \{1, 2, \dots, n\}$ de longueur $|I| = p + 1$ (en effet $\Theta|_{\mathbb{C}^{n+k}} \geq 0$ et $\omega_n|_{\mathbb{C}^n} > 0$). Nous allons voir, grâce au raisonnement du théorème 2.1 et à la positivité de Θ , que Θ ne dépend que des variables z_1, z_2, \dots, z_n . Écrivons

$$\Theta|_{\mathbb{C}^{n+k}} = i^{(n-p)^2} \sum_{|J|=|K|=n-p} \Theta_{J,K} dz_J \wedge d\bar{z}_K,$$

avec $J, K \subset \{1, 2, \dots, n+k\}$ et $\Theta_{J,K}$ de degré 0. Si J n'est pas contenu dans $\{1, 2, \dots, n\}$ la propriété (4.2) entraîne $\Theta_{J,J} = 0$. Si l'un des multi-indices J, K (disons J) n'est pas contenu dans $\{1, 2, \dots, n\}$, la positivité forte de Θ donne la majoration suivante pour les mesures coefficients:

$$2|\Theta_{J,K}| \leq \frac{1}{\varepsilon} \Theta_{J,J} + \varepsilon \Theta_{K,K} = \varepsilon \Theta_{K,K}$$

pour tout $\varepsilon > 0$, et on obtient encore $\Theta_{J,K} = 0$. Comme de plus Θ est fermé, il vient $\frac{\partial \Theta_{J,K}}{\partial z_j} = \frac{\partial \Theta_{J,K}}{\partial \bar{z}_j} = 0$ pour $J, K \subset \{1, 2, \dots, n\}$ et $j > n$. Il existe donc un courant $T \in SPC^p(\mathbb{C}^n)$ tel que $\Theta|_{\mathbb{C}^{n+k}} = (\sigma|_{\mathbb{C}^{n+k}})^* T$. L'égalité

$$\int_{\mathbb{C}^n} T \wedge \omega_n^p = \int_{\mathbb{C}^{n+k}} \Theta \wedge \omega_{n+k}^{p+k} < +\infty$$

analogue à (4.1), entraîne que l'extension simple \hat{T} de T à $\mathbb{I}P^n$ est fermée. Par suite $\Theta = \sigma^* \hat{T}$. \square

Fin de la démonstration de (1.7). Il est immédiat de vérifier à l'aide du lemme 4.3 que le morphisme injectif σ^* envoie $\mathcal{E}^p(\mathbb{I}P^n)$ dans $\mathcal{E}^{p+k}(\mathbb{I}P^{n+k})$. Soit $T \in \mathcal{E}^p(\mathbb{I}P^n)$; l'hypothèse $\mathcal{L}(\mathbb{I}P^{n+k}; p+k)$ montre l'existence d'un ensemble analytique Z de dimension $p+k$ dans $\mathbb{I}P^{n+k}$ tel que

$$\sigma^* T = \lambda[Z], \quad \lambda \in \mathbb{R}_+.$$

Lorsque $\lambda \neq 0$, cette dernière égalité implique que $Z \cap (\mathbb{I}P^{n+k} \setminus \mathbb{I}P^{k-1})$ est réunion de fibres de σ . On en déduit qu'il existe un ensemble analytique Y de dimension p dans $\mathbb{I}P^n$ tel que $Z = \overline{\sigma^{-1}(Y)}$. Par suite $[Z] = \sigma^*[Y]$ et $T = \lambda[Y]$. \square

Bien entendu, ces démonstrations «abstraites» permettent aussi de donner des contre-exemples explicites aux problèmes $\mathcal{L}(\mathbb{I}P^n; p)$ et $\mathcal{L}(\mathbb{C}^n; p)$. Nous laissons au lecteur le soin de le faire.

5. Équivalence entre les énoncés $\bar{\mathcal{L}}(X; p)$ et $\mathcal{L}(X; p)$

Nous allons maintenant démontrer l'équivalence des deux énoncés

$$\begin{aligned} (\bar{\mathcal{L}}(X; p)) \quad & \mathcal{E}^p(X) \subset \overline{\mathcal{I}P^p(X)} \\ (\hat{\mathcal{L}}(X; p)) \quad & SPC^p(X) = \widehat{\mathcal{I}P^p(X)} \end{aligned}$$

où $\widehat{\mathcal{I}^p(X)}$ et $\widehat{\mathcal{I}^p(x)}$ sont respectivement l'adhérence faible et l'enveloppe convexe fermée de $\mathcal{I}^p(X) = \{\lambda[Z]; \lambda \geq 0\}$ dans $\mathcal{D}'_{p,p}(X)$ (Z parcourant tous les ensembles analytiques irréductibles de dimension p de X). Cette équivalence logique est en fait une conséquence de résultats généraux d'analyse fonctionnelle, tels que le théorème de Krein-Milman (cf. N. Bourbaki [1], chap. II, § 4, th. 1) et le théorème de Choquet (cf. Phelps [10]).

Lemme 5.1 (th. de Krein-Milman). *Soit K une partie convexe compacte d'un espace vectoriel topologique localement convexe séparé E . On désigne par $\mathcal{E}(K)$ l'ensemble des points extrémaux de K (= ensemble des points $x \in K$ tels que K ne contienne aucun intervalle ouvert de centre x). Alors*

$$K = \widehat{\mathcal{E}(K)} = \text{enveloppe convexe fermée de } \mathcal{E}(K).$$

L'implication $\widehat{\mathcal{L}}(X; p) \Rightarrow \widehat{\mathcal{L}}(X; p)$ résulte de la proposition 1.4, qui est elle-même une conséquence simple du lemme 5.1.

Proposition 1.4. $SPC^p(X) = \widehat{\mathcal{E}^p(X)}$, $WPC^p(X) = \widehat{\mathcal{E}^p_w(X)}$.

Démonstration. Les deux égalités se démontrent exactement de la même manière, donc nous étudierons seulement la première. Par définition de $\mathcal{E}^p(X)$, on a $\mathcal{E}^p(X) \subset SPC^p(X)$, donc $\widehat{\mathcal{E}^p(X)} \subset SPC^p(X)$.

Inversement, soit $T \in SPC^p(X)$ et soit γ une (p, p) -forme faiblement > 0 sur X telle que

$$\int_x T \wedge \gamma \leq 1.$$

On peut toujours construire une telle forme γ à l'aide d'une partition de l'unité sur X , la seule condition étant que les coefficients de γ tendent assez rapidement vers 0 à l'infini.

Soit alors L_γ l'ensemble des courants $\Theta \in SPC^p(X)$ tels que $\int_x \Theta \wedge \gamma \leq 1$. On vérifie aisément que L_γ est une partie convexe faiblement compacte de $\mathcal{D}'_{p,p}(X)$ et que l'ensemble $\mathcal{E}(L_\gamma)$ des points extrémaux de L_γ est la réunion de $\{0\}$ et des courants $\Theta \in \mathcal{E}^p(X)$ tels que $\int_x \Theta \wedge \gamma = 1$.

D'après le théorème de Krein-Milman on a donc

$$T \in L_\gamma = \widehat{\mathcal{E}(L_\gamma)} \subset \widehat{\mathcal{E}^p(X)}. \quad \square$$

Pour achever la preuve de la proposition 1.8, il suffit maintenant d'établir l'implication réciproque:

Proposition 5.2. $\widehat{\mathcal{L}}(X; p) \Rightarrow \widehat{\mathcal{L}}(X; p)$.

Démonstration. Observons tout d'abord que la topologie faible est métrisable sur $SPC^p(X)$ (bien qu'elle ne le soit pas sur $\mathcal{D}'_{p,p}(X)$); elle peut être définie par les semi-normes

$$\Theta \rightarrow |\langle \Theta, \alpha_v \rangle| + |\langle \Theta, \beta_v \rangle|$$

si les suites $\alpha_v, \beta_v \in \mathcal{D}_{p,p}(X)$ ont les propriétés suivantes:

$$(5.1) \quad \alpha_v \text{ est faiblement } \geq 0;$$

(5.2) pour tout point $z \in X$, il existe v tel que $\alpha_v > 0$ au voisinage de z ;

(5.3) la suite β_v est (fortement) dense dans $\mathcal{D}_{p,p}(X)$.

Soit alors $T \in SPC^p(X)$. L'hypothèse $\mathcal{L}(X; p)$ et le fait que la topologie de $SPC^p(X)$ soit métrisable montrent que

$$T = \lim_{v \rightarrow +\infty} T_v$$

où T_v est combinaison linéaire convexe de courants d'intégration:

$$T_v = \sum_{1 \leq j \leq j(v)} \lambda_{jv} [Z_{jv}], \quad v = 1, 2, \dots, \lambda_{jv} \geq 0. \tag{5.4}$$

Comme la suite T_v est faiblement convergente, on peut toujours choisir une (p, p) -forme γ faiblement > 0 sur X telle que $T \in L_\gamma$, $T_v \in L_\gamma$ pour tout v , L_γ désignant comme ci-dessus la partie convexe faiblement compacte

$$L_\gamma = \{ \Theta \in SPC^p(X); \int_X \Theta \wedge \gamma \leq 1 \}.$$

Le reste du raisonnement reproduit essentiellement la démonstration du théorème de Choquet. Soit M la partie compacte $M = L_\gamma \cap \overline{\mathcal{F}^p(X)}$.

D'après (5.4) il existe une mesure μ_v de masse 1 sur M telle que

$$T_v = \int_{\theta \in N} \theta d\mu_v(\theta);$$

il suffit en effet de prendre pour μ_v un barycentre à coefficients ≥ 0 des mesures de Dirac aux points θ et $\lambda'_{jv} [Z_{jv}]$ de M , avec $\lambda'_{jv} \int_X [Z_{jv}] \wedge \gamma = 1$. Il est classique que l'ensemble des mesures de probabilité sur un espace compact métrisable est une partie vaguement compacte métrisable de l'espace des mesures de Radon. On peut donc extraire de la suite μ_v une sous-suite qui converge vaguement vers une mesure de probabilité μ sur M . Par définition de la topologie de M , l'application $\theta \rightarrow \langle \theta, \alpha \rangle$, $\alpha \in \mathcal{D}_{p,p}(X)$ est continue sur M .

On a donc

$$\begin{aligned} \langle T_v, \alpha \rangle &= \int_{\theta \in N} \langle \theta, \alpha \rangle d\mu_v(\theta) \\ \langle T, \alpha \rangle &= \lim_{v \rightarrow +\infty} \langle T_v, \alpha \rangle = \int_{\theta \in N} \langle \theta, \alpha \rangle d\mu(\theta), \end{aligned}$$

ce que nous écrivons $T = \int_{\theta \in N} \theta d\mu(\theta)$. Si le courant T initialement choisi est extrême, le lemme 5.3 ci-dessous montre que le support de la mesure μ est contenu dans une «génératrice» $\{ \lambda \Theta; 0 \leq \lambda \leq 1 \} \subset M$. On a donc

$$T = [\int \lambda d\mu(\lambda \Theta)] \cdot \Theta \in M \subset \overline{\mathcal{F}^p(X)}. \quad \square$$

Lemme 5.3. Soit M une partie faiblement compacte de $SPC^p(X)$, μ une mesure ≥ 0 sur M et T le courant

$$T = \int_{\theta \in N} \theta d\mu(\theta).$$

Si le courant T est extrême, le support de μ est contenu dans un segment $\{\lambda\theta; 0 \leq \lambda \leq 1\}$ où $\theta \in M$.

La démonstration est pratiquement évidente: si le support de μ contient deux courants θ_1, θ_2 non proportionnels, on peut écrire $T = T_1 + T_2 + T_3$ où T_1, T_2 sont obtenus par intégration de $\theta d\mu(\theta)$ sur des petits voisinages disjoints de θ_1, θ_2 . T_1 et T_2 sont alors non proportionnels (car cette condition est ouverte pour la topologie faible), donc T n'est pas extrême. \square

6. Lien avec la conjecture de Hodge et obstructions topologiques

Soit X une variété analytique complexe de dimension n . Nous serons amenés à considérer certains groupes de cohomologie de X , définis comme suit.

Notations 6.1

- (6.1) $H^k(X; \mathbb{C}) = k$ -ème groupe de cohomologie de de Rham de X ;
- (6.2) $\check{H}^k(X; \mathcal{F}) =$ cohomologie de Čech à valeurs dans un faisceau \mathcal{F} de groupes abéliens;
- (6.3) $H^k(X; \mathbb{Z}) =$ image du morphisme naturel

$$\check{H}^k(X, \mathbb{Z}) \rightarrow H^k(X, \mathbb{R}) \simeq \check{H}^k(X, \mathbb{R});$$

- (6.4) $H^{p,q}(X) =$ ensemble des classes de cohomologie de $H^{p+q}(X; \mathbb{C})$ contenant une (p, q) -forme fermée.

Soit $\mathcal{D}'_k(X) = \bigoplus_{p+q=k} \mathcal{D}'_{p,q}(X)$ et $\mathcal{C}^\infty_k(X) = \bigoplus_{p+q=k} \mathcal{C}^\infty_{p,q}(X)$.

Le théorème de de Rham donne des isomorphismes

$$\check{H}^k(X; \mathbb{C}) \simeq H^k(\mathcal{C}^\infty(X)) = H^k(X; \mathbb{C}),$$

$$\check{H}^k(X; \mathbb{C}) \simeq H^{2n-k}(\mathcal{D}'(X))$$

entre la cohomologie de Čech et la cohomologie des complexes $\mathcal{C}^\infty(X), \mathcal{D}'(X)$. Ces isomorphismes sont en fait des isomorphismes topologiques lorsque $\check{H}^k(X; \mathbb{C}), \mathcal{C}^\infty(X), H^k(X; \mathbb{C})$ sont munis de leurs topologies naturelles d'espaces de Fréchet et $\mathcal{D}'(X)$ de la topologie faible. On a donc un morphisme continu

$$\mathcal{D}'_k(X) \supset \text{Ker } d \rightarrow H^{2n-k}(X; \mathbb{C})$$

$$\theta \mapsto \text{cl}(\theta) \tag{6.5}$$

qui à un courant fermé $\theta \in \mathcal{D}'_k(X)$ de degré $2n - k$ associe sa classe de cohomologie de de Rham. Si $\theta \in \mathcal{D}'_{p,p}(X), d\theta = 0$, on a donc $\text{cl}(\theta) \in H^{2q}(X; \mathbb{C})$ avec $q = n - p$. Dans le cas où X est une variété algébrique projective, la théorie de Hodge donne la décomposition:

$$H^k(X; \mathbb{C}) = \bigoplus_{a+b=k} H^{a,b}(X).$$

On vérifie alors par dualité que $\text{cl}(\theta) \in H^{q,q}(X)$.

Définition 6.2. Si X est une variété projective, on désignera par $A^{2q}(X) \subset H^{q,q}(X)$ le \mathbb{R} -module engendré par $H^{q,q}(X; \mathbb{Z}) = H^{q,q}(X) \cap H^{2q}(X; \mathbb{Z})$. Si X est une variété de Stein on définit $A^k(X)$ comme l'adhérence de $H^k(X; \mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ dans $H^k(X; \mathbb{R})$. Dans les deux cas, on désigne par $SPC_{\mathbb{Z}}^p(X)$ l'ensemble des courants $\Theta \in SPC^p(X)$ de bidegré (q, q) , $q = n - p$, dont la classe $cl(\Theta)$ est dans $A^{2q}(X)$.

Pour tout ensemble analytique $Z \subset X$ de dimension pure p , on sait que le courant d'intégration $[Z]$ définit une classe de cohomologie entière $cl[Z] \in H^{2q}(X; \mathbb{Z})$. On a par conséquent $\mathcal{I}^p(X) \subset SPC_{\mathbb{Z}}^p(X)$, et la continuité du morphisme $\Theta \mapsto cl(\Theta)$ implique :

Proposition 6.3. $\widehat{\mathcal{I}^p(X)} \subset SPC_{\mathbb{Z}}^p(X)$.

Il semble donc naturel de faire la conjecture suivante :

$$(\mathcal{L}_{\mathbb{Z}}(X; p)) \quad \widehat{\mathcal{I}^p(X)} = SPC_{\mathbb{Z}}^p(X).$$

Cette conjecture sera démontrée en codimension 1 ($p = n - 1$) au paragraphe 7. Dans le cas où X est une variété projective, $\mathcal{L}_{\mathbb{Z}}(X; p)$ apparaît comme une formulation forte de la conjecture de Hodge.

Théorème 6.4. Soit X une variété projective. Alors

$$(6.6) \quad A^{2q}(X) = cl(SPC_{\mathbb{Z}}^p(X) - SPC_{\mathbb{Z}}^q(X)).$$

(6.7) L'hypothèse $\mathcal{L}_{\mathbb{Z}}(X; p)$ entraîne la propriété $\mathcal{H}(X; q)$, à savoir que $H^{q,q}(X) \cap H^{2q}(X; \mathbb{Q})$ est engendré par les cycles algébriques de dimension $p = n - q$.

(6.8) L'hypothèse $\mathcal{L}(X; p)$ implique la condition cohomologique

$$rg_{\mathbb{Z}} H^{q,q}(X; \mathbb{Z}) = \dim_{\mathbb{C}} H^{q,q}(X).$$

Preuve de (6.6). Soit ω une métrique de Hodge sur X (i.e. une métrique kählérienne dont la classe de cohomologie est entière) et η une classe dans

$$A^{2q}(X) \subset H^{q,q}(X) \cap H^{2q}(X; \mathbb{R}).$$

D'après la théorie de Hodge, η peut être représentée par une (q, q) -forme harmonique réelle h . Pour N entier > 0 assez grand, la forme $h + N\omega^q$ est dans $SPC_{\mathbb{Z}}^p(X)$, de même que $N\omega^q$. Par suite $\eta = cl(h)$ est la différence de deux classes associées à des éléments de $SPC_{\mathbb{Z}}^p(X)$.

Preuve de (6.7). L'hypothèse $SPC_{\mathbb{Z}}^p(X) = \widehat{\mathcal{I}^p(X)}$ combinée à (6.6) implique que $A^{2q}(X)$ est engendré par $cl(\widehat{\mathcal{I}^p(X)})$. Puisque le morphisme cl est continu et que $A^{2q}(X)$ est un espace vectoriel de dimension finie, on voit que $A^{2q}(X)$ est le \mathbb{R} -module engendré par les classes des cycles algébriques.

Par conséquent $H^{q,q}(X) \cap H^{2q}(X; \mathbb{Q})$ est l'ensemble des combinaisons linéaires rationnelles des classes $cl[Y]$, $Y \subset X$, $\text{codim } Y = q$.

Preuve de (6.8). Un raisonnement analogue à (6.6) montre que $H^{q,q}(X)$ est le \mathbb{C} -module engendré par $cl(SPC^p(X))$, soit encore par $cl(\mathcal{I}^p(X))$ sous l'hypothèse

$\hat{\mathcal{L}}(X; p)$. Les entiers $\dim_{\mathbb{C}} H^{q,q}(X)$ et $rg_{\mathbb{Z}} H^{q,q}(X; \mathbb{Z}) = \dim_{\mathbb{R}} A^{2q}(X)$ sont alors tous deux égaux au nombre maximum de cycles algébriques de codimension q dont les classes de cohomologie sont linéairement indépendantes. \square

La conjecture $\widehat{\mathcal{I}^p(X)} = SPC_{\mathbb{Z}}^p(X)$ nous paraît en fait beaucoup plus forte que la conjecture de Hodge. En effet, cette dernière donne seulement une représentation des classes de cohomologie par des cycles algébriques, tandis que l’assertion $\widehat{\mathcal{I}^p(X)} = SPC_{\mathbb{Z}}^p(X)$ affirme grosso modo que n’importe quel courant de $SPC_{\mathbb{Z}}^p(X)$ est égal (et pas seulement cohomologue) à une somme intégrale de cycles analytiques. R. Harvey et A.W. Knapp [6] ont énoncé des conjectures qui semblent logiquement plus proches de la conjecture de Hodge, et qui ramènent celle-ci à un problème de Plateau homologique pour les courants.

Soit maintenant X une surface algébrique projective telle que $rg_{\mathbb{Z}} H^{1,1}(X; \mathbb{Z}) < \dim_{\mathbb{C}} H^{1,1}(X)$. M. Jean-Louis Verdier m’a communiqué un exemple simple de telles surfaces. On choisit $X = \Gamma_1 \times \Gamma_2$ où Γ_1, Γ_2 sont des courbes de genres g_1, g_2 . La formule de Künneth donne $\dim_{\mathbb{C}} H^{1,1}(X) = 2 + 2g_1g_2$, tandis que le «nombre de Picard» $\rho = rg_{\mathbb{Z}} H^{1,1}(X; \mathbb{Z})$ vérifie l’encadrement

$$2 \leq \rho \leq 2 + r$$

où $r = rg_{\mathbb{Z}} \text{Hom}(J_1, J_2)$ est le rang du groupe des homomorphismes de la jacobienne de Γ_1 dans la jacobienne de Γ_2 . Si l’on choisit en particulier des courbes elliptiques $\Gamma_1 = \mathbb{C}/P_1, \Gamma_2 = \mathbb{C}/P_2$ non isogènes (c’est-à-dire ayant des groupes de périodes P_1, P_2 tels que $\{\lambda \in \mathbb{C}; \lambda P_1 \subset P_2\} = \{0\}$), il vient $J_1 \simeq \Gamma_1, J_2 \simeq \Gamma_2, r = 0, \rho = 2, \dim_{\mathbb{C}} H^{1,1}(X) = 4$.

Le théorème 6.4 (6.8) montre alors que l’énoncé $\hat{\mathcal{L}}(X; 1)$ (et à fortiori $\mathcal{L}(X; 1)$) est faux, ce qui donne de nouveaux contre-exemples au problème de Lelong-Harvey.

Corollaire 6.5. *Soit X une surface algébrique projective telle que*

$$rg_{\mathbb{Z}} H^{1,1}(X; \mathbb{Z}) < \dim_{\mathbb{C}} H^{1,1}(X)$$

et Y une section hyperplane de X . Alors la propriété $\mathcal{L}(X \setminus Y; 1)$ tombe en défaut sur la surface algébrique affine $X \setminus Y$.

Le corollaire 6.5 résulte de la proposition 1.7 (1.5), car l’énoncé $\mathcal{L}(Y; 1)$ où $\dim Y = 1$ est trivialement vrai.

Nous allons maintenant étudier les obstructions topologiques au problème $\hat{\mathcal{L}}(X; p)$ lorsque X est une variété de Stein. La condition $A^{2q}(X) = H^{2q}(X; \mathbb{R})$ est réalisée dès que X a une «bonne» topologie, par exemple si X a même type d’homotopie qu’un complexe cellulaire fini, et en particulier si $X \subset \mathbb{C}^n$ est un ouvert de Stein borné à frontière de classe C^1 , ou une variété algébrique affine. On a d’autre part le résultat suivant.

Proposition 6.6. *Soit X une variété de Stein de dimension n . Alors on a $A^k(X) = H^k(X; \mathbb{R})$ dès que le groupe $\check{H}^{k+1}(X; \mathbb{Z})$ est séparé, en particulier si $n \leq k \leq 2n$.*

Démonstration. A la suite exacte de faisceaux constants $0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow 0$ correspond une suite exacte de cohomologie

$$\check{H}^k(X; \mathbb{Z}) \xrightarrow{j} \check{H}^k(X; \mathbb{R}) \xrightarrow{\pi} \check{H}^k(X; \mathbb{R}/\mathbb{Z}) \xrightarrow{\delta} \check{H}^{k+1}(X; \mathbb{Z}).$$

On munit les espaces de cochaînes de la topologie produit déduite des topologies usuelles de $\mathbb{Z}, \mathbb{R}, \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. $\check{H}^k(X; \mathbb{R})$ devient alors un espace de Fréchet et $\check{H}^k(X; \mathbb{R}/\mathbb{Z})$ un groupe topologique compact métrisable. De plus les flèches j, π, δ sont continues. L'hypothèse que $\check{H}^{k+1}(X; \mathbb{Z})$ est séparé entraîne que $\text{Ker } \delta$ est fermé, par conséquent l'application $\pi: \check{H}^k(X; \mathbb{R}) \rightarrow \text{Ker } \delta$ est ouverte d'après le théorème de Baire. Soit φ une forme linéaire continue sur $\check{H}^k(X; \mathbb{R})$, s'annulant sur $j(\check{H}^k(X; \mathbb{Z}))$. D'après ce qui précède, φ se factorise en un homomorphisme $\tilde{\varphi}$ continu à valeurs réelles sur le groupe compact $\text{Ker } \delta$. Par suite $\tilde{\varphi} = 0$ et $\varphi = \tilde{\varphi} \circ \pi = 0$. Le théorème de Hahn-Banach implique que $j(\check{H}^k(X; \mathbb{Z})) \otimes \mathbb{R}$ est dense dans $\check{H}^k(X; \mathbb{R})$, d'où $A^k(X) = H^k(X; \mathbb{R})$. Cette situation a lieu en particulier si $k \geq n$, puisque $\check{H}^{k+1}(X; \mathbb{Z}) = \check{H}^{k+1}(X; \mathbb{R}) = 0$ d'après la théorie de Morse. \square

La géométrie d'une variété de Stein peut néanmoins être très pathologique. Ainsi, on va construire une variété de Stein Ω de dimension 3 telle que $\check{H}^1(\Omega; \mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}$ et $\check{H}^1(\Omega; \mathbb{Z}) = 0$.

On considère l'espace topologique $K = (\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}) / \sim$ où \sim est la relation d'équivalence définie par $(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2)$ s'il existe un entier $m \geq 0$ tel que $x_1 = x_2 \geq m$ et $y_1 - y_2 \in 2^{-m}\mathbb{Z}$. On peut concevoir K comme un cylindre qui s'enroule 2 fois sur lui-même chaque fois qu'on se déplace de $+1$ le long d'une génératrice. On considère la filtration $K = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} K_m$ avec $K_m = [0, m] \times \mathbb{R} / \sim$, $K_m \subseteq K$. Il est facile de voir que K_m se rétracte sur le cercle $\{m\} \times \mathbb{R} / \sim = \{m\} \times (\mathbb{R}/2^{-m}\mathbb{Z})$, et que l'inclusion $K_m \subset K_{m+1}$ est de degré 2. Comme \mathbb{R} est un corps et \mathbb{R}/\mathbb{Z} un groupe compact, la cohomologie de K à valeurs dans \mathbb{R} et \mathbb{R}/\mathbb{Z} s'identifie à la limite projective $\varprojlim \check{H}^k(K_m)$. Ceci peut se vérifier «à la main» en considérant les cochaînes de Čech sur un recouvrement acyclique de K . On en déduit un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \check{H}^1(K; \mathbb{R}) & \longrightarrow & \check{H}^1(K; \mathbb{R}/\mathbb{Z}) \\ \downarrow \sim & & \downarrow \sim \\ \mathbb{R} & \longrightarrow & \varprojlim \mathbb{R}/2^m \mathbb{Z} \end{array}$$

où les flèches verticales sont des isomorphismes. De plus $\check{H}^k(K; \mathbb{R}) = \check{H}^k(K; \mathbb{R}/\mathbb{Z}) = 0$ pour $k \geq 2$. On a donc la suite exacte de cohomologie

$$0 \rightarrow \check{H}^1(K; \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{R} \rightarrow \varprojlim \mathbb{R}/2^m \mathbb{Z} \rightarrow \check{H}^2(K; \mathbb{Z}) \rightarrow 0$$

et le morphisme $\mathbb{R} \rightarrow \varprojlim \mathbb{R}/2^m \mathbb{Z}$ est injectif. Par conséquent

$$\begin{aligned} \check{H}^k(K; \mathbb{Z}) &= 0 \quad \text{pour } k=1 \text{ et } k \geq 3, \\ \check{H}^2(K; \mathbb{Z}) &\simeq (\varprojlim \mathbb{R}/2^m \mathbb{Z}) / \mathbb{R} \simeq \mathbb{Z}_2 / \mathbb{Z} \end{aligned}$$

où $\mathbb{Z}_2 = \varprojlim \mathbb{Z}/2^m \mathbb{Z}$ est le groupe additif des entiers diadiques (dans cet exemple $\check{H}^2(K; \mathbb{Z})$ a la topologie grossière). Il est aisé de vérifier que K est isomorphe à un polyèdre localement fini de dimension 2. En «épaississant» les faces de K , on construit une variété analytique réelle M de dimension 3 qui se rétracte par déformation sur K . D’après un théorème de H. Grauert [4], il existe une variété de Stein Ω , $\dim_{\mathbb{C}} \Omega = 3$, et un plongement \mathbb{R} -analytique $M \rightarrow \Omega$, Ω étant un voisinage tubulaire de M . Ω a donc bien la topologie souhaitée. Pour obtenir le même phénomène en degré $k \geq 2$, il suffit de poser $X_{k+2} = \Omega \times \Sigma_{k-1}$ où Σ_{k-1} est une variété de Stein ayant même type d’homotopie que la sphère S^{k-1} , par exemple

$$\Sigma_{k-1} = \{z \in \mathbb{C}^k; z_1^2 + \dots + z_k^2 = 1\}.$$

On a alors $\dim_{\mathbb{C}} X_{k+2} = k + 2$, et la formule de Künneth donne

$$\begin{aligned} \check{H}^k(X_{k+2}; \mathbb{R}) &\simeq \mathbb{R}, \\ \check{H}^k(X_{k+2}; \mathbb{Z}) &= 0 \text{ si } k \neq 2, \\ \check{H}^2(X_4; \mathbb{Z}) &\simeq H^2(\Omega; \mathbb{Z}) \otimes H^0(\Sigma_1; \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}_2/\mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Posons $X_3 = \Omega$. On obtient dans tous les cas :

$$H^k(X_{k+2}; \mathbb{R}) = \mathbb{R}, \quad H^k(X_{k+2}; \mathbb{Z}) = 0 \quad \text{pour } k \geq 1.$$

Si X est une variété de Stein, on sait que toute classe $\eta \in H^{2q}(X; \mathbb{R})$ peut être représentée par une (q, q) -forme réelle fermée h ; h étant donnée, il existe une fonction plurisousharmonique $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(X)$ telle que $h + (dd^c \varphi)^q \in \text{SPC}^p(X)$, $p + q = \dim X$. Par suite :

Lemme 6.7. *Si X est de Stein, l’application $\text{cl} : \text{SPC}^p(X) \rightarrow H^{2q}(X; \mathbb{R})$ est surjective.*

Appliquons le lemme 6.7 et la proposition 6.3 avec $X = X_{2k}$, $p = k + 1$, $q = k - 1$. On obtient alors des contre-exemples au problème $\hat{\mathcal{L}}(X; p)$.

Corollaire 6.8. $\widehat{\mathcal{S}}^{k+1}(X_{2k}) \subset \text{SPC}_{\mathbb{Z}}^{k+1}(X_{2k}) \neq \text{SPC}^{k+1}(X_{2k})$ sur les variétés de Stein X_{2k} , $k \geq 2$.

$X_3 = \Omega$ se plonge dans \mathbb{C}^7 d’après un théorème classique de R. Narasimhan. La variété $X_{2k} = \Omega \times \Sigma_{2k-3}$ admet donc un plongement dans $\mathbb{C}^7 \times \mathbb{C}^{2k-2} = \mathbb{C}^{2k+5}$. La proposition 1.7 (1.4) nous permet par conséquent de retrouver que l’énoncé $\mathcal{L}(\mathbb{C}^{2k+5}; k + 1)$ est faux si $k \geq 2$.

7. Approximation d’un courant de bidegré (1, 1) par des diviseurs irréductibles

L’objet de ce paragraphe est de démontrer la conjecture $\hat{\mathcal{L}}_{\mathbb{Z}}(X; p)$ en codimension 1.

Théorème 7.1. *Soit X une variété de Stein ou une variété projective connexe, de dimension $n \geq 2$. Alors $\text{SPC}_{\mathbb{Z}}^{n-1}(X) = \widehat{\mathcal{S}}^{n-1}(X)$.*

On observera que dans ce théorème il n'est pas nécessaire de prendre l'enveloppe convexe de $\mathcal{S}^{n-1}(X)$, l'ensemble d'éléments extrémaux $\mathcal{S}^{n-1}(X)$ étant déjà dense dans $SPC_{\mathbb{Z}}^{n-1}(X)$.

La démonstration repose sur une série de lemmes.

Lemme 7.2. *Tout courant $T \in SPC_{\mathbb{Z}}^{n-1}(X)$ est limite faible d'une suite $T_v \in SPC^{n-1}(X)$ telle que*

$$(7.1) \quad \text{cl}(T_v) \in H^2(X; \mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Q} \text{ si } X \text{ est de Stein;}$$

$$(7.2) \quad \text{cl}(T_v) \in H^{1,1}(X) \cap H^2(X; \mathbb{Q}) \text{ si } X \text{ est projective;}$$

$$(7.3) \quad T_v > 0, \text{ i.e. il existe une } (1, 1)\text{-forme } \gamma_v > 0 \text{ telle que } T_v \geq \gamma_v.$$

Démonstration. Soit θ une $(1, 1)$ -forme fermée de classe C^∞ telle que $\text{cl}(\theta) = \text{cl}(T)$. On a donc $T = \theta + T_0$ avec $\text{cl}(T_0) = 0$, et $\text{cl}(\theta) \in A^2(X)$ par hypothèse.

Preuve de (7.1). $H^2(X; \mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Q}$ est dense dans l'espace $H^2(X; \mathbb{Z}) \otimes \mathbb{R}$, dont l'adhérence est $A^2(X)$ (cf. définition 6.2).

Il existe donc une suite $c_v \in H^2(X; \mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Q}$ telle que

$$\text{cl}(\theta) = \lim_{v \rightarrow +\infty} c_v.$$

Soit θ_v une 2-forme réelle fermée représentant la classe c_v .

Par définition de la topologie de $H^2(X; \mathbb{R})$, on peut choisir des représentants tels que la suite θ_v converge vers θ dans $\mathcal{C}_2^\infty(X; \mathbb{R})$. La composante de bidegré $(0, 2)$ de θ_v est $\bar{\partial}$ -fermée et tend vers 0. Le théorème de l'application ouverte de Banach montre que l'équation $\bar{\partial}u_v = \theta_v^{0,2}$ se résout avec une suite $u_v \rightarrow 0$; quitte à remplacer θ_v par $\theta_v - d(u_v + \bar{u}_v)$ on peut supposer de plus que θ_v est de bidegré $(1, 1)$. Puisque $\theta_v \rightarrow \theta$, il existe une suite φ_v de fonctions plurisousharmoniques convergeant vers 0 dans $\mathcal{C}^\infty(X)$ telles que $\theta_v + i\partial\bar{\partial}\varphi_v > \theta$. Il vient donc $T = \lim_{v \rightarrow +\infty} T_v$ avec

$$T_v = \theta_v + i\partial\bar{\partial}\varphi_v + T_0 > \theta + T_0 = T \geq 0$$

et

$$\text{cl}(T_v) = \text{cl}(\theta_v) = c_v \in H^2(X; \mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Q}.$$

Preuve de (7.2). $\text{cl}(\theta) \in A^2(X) = H^{1,1}(X; \mathbb{Z}) \otimes \mathbb{R}$, donc il existe des $(1, 1)$ -formes réelles fermées α_j et des scalaires $\lambda_j \in \mathbb{R}$, $1 \leq j \leq N$, tels que

$$\text{cl}(\alpha_j) \in H^{1,1}(X) \cap H^2(X; \mathbb{Z}) \text{ et } \theta = \sum_{j=1}^N \lambda_j \alpha_j.$$

Soit ω une métrique de Hodge sur X et $\lambda_{jv} \in \mathbb{Q}$ tel que $|\lambda_j - \lambda_{jv}| < 1/v^2$, $v = 1, 2, \dots$. On a: $\theta = \lim_{v \rightarrow +\infty} \theta_v$ avec

$$\theta_v = \frac{1}{v} \omega + \sum_{j=1}^N \lambda_{jv} \alpha_j,$$

$\text{cl}(\theta_v) \in H^{1,1}(X) \cap H^2(X; \mathbb{Q})$ et $\theta_v > 0$ pour v assez grand.

On pose alors $T_v = \theta_v + T_0$. \square

D'après le lemme 7.2, il suffit de montrer que tout courant $T > 0$ de bidegré $(1, 1)$ et de classe $\text{cl}(T)$ entière est limite faible d'éléments de $\mathcal{S}^{n-1}(X)$. Nous aurons besoin du lemme classique suivant.

Lemme 7.3. *Si $\text{cl}(T) \in H^2(X, \mathbb{Z})$, il existe un fibré linéaire L sur X de classe de Chern $c_1(L) = \text{cl}(T)$.*

La suite exponentielle $0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{O}^* \rightarrow 1$ donne en effet un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc}
 \check{H}^1(X; \mathcal{O}^*) & \xrightarrow{\delta} & \check{H}^2(X; \mathbb{Z}) & \longrightarrow & \check{H}^2(X; \mathcal{O}) \\
 & \searrow c_1 & \downarrow & & \nearrow \pi_{0,2} \\
 & & H^2(X; \mathbb{R}) & &
 \end{array}$$

Si X est de Stein le groupe $\check{H}^2(X; \mathcal{O})$ est nul; si X est projective, $\pi_{0,2}$ s'identifie à la projection $H^2(X; \mathbb{R}) \rightarrow H^{0,2}(X)$ dans la décomposition de Hodge. Dans les deux cas on a $\pi_{0,2}(\text{cl}(T)) = 0$, donc $\text{cl}(T)$ provient d'une classe d'isomorphisme de fibrés linéaires dans $\check{H}^1(X; \mathcal{O}^*)$. \square

On munit le fibré L d'une métrique hermitienne de classe C^∞ .

La classe $c_1(L)$ est alors définie par la forme de courbure $\frac{i}{2\pi} c(L)$, d'où $\text{cl}\left(T - \frac{i}{2\pi} c(L)\right) = 0$. Comme $T - \frac{i}{2\pi} c(L) \in \mathcal{D}'_{n-1, n-1}(X)$, il existe $\varphi \in \mathcal{D}'_{n,n}(X)$ tel que

$$T = \frac{i}{2\pi} (c(L) + \partial\bar{\partial}\varphi). \tag{7.3}$$

Puisque $T > 0$ et que $c(L)$ est une forme C^∞ , la distribution φ peut être représentée par une fonction (encore notée φ), qui est localement somme d'une fonction plurisousharmonique et d'une fonction C^∞ .

Lemme 7.4. *Soit L^* le fibré dual de L et $p: L^* \rightarrow X$ la projection. La fonction $\psi(\zeta) = \text{Log}|\zeta|^2 + \varphi(p(\zeta))$ est plurisousharmonique sur l'espace total L^* , et on a*

$$\frac{i}{2\pi} \partial\bar{\partial}\psi = [X] + p^*T$$

où $[X]$ est le courant d'intégration sur la section nulle de L^* .

Démonstration. L'application $\zeta \mapsto p(\zeta)$ définit une section holomorphe du fibré image réciproque p^*L^* , section dont le lieu des zéros est X . L'équation de Lelong-Poincaré implique

$$\frac{i}{2\pi} \partial\bar{\partial} \text{Log}|\zeta|^2 = [X] - \frac{i}{2\pi} c(p^*L^*) = [X] + \frac{i}{2\pi} p^*(c(L)),$$

d'où le résultat d'après (7.3). \square

La démonstration du théorème 7.1 suit maintenant de près la méthode de P. Lelong [9], qui correspond au cas où le fibré L est trivial. L'idée (due à K. Oka) consiste à utiliser une fonction holomorphe dont le domaine d'existence est un «ouvert de Hartogs» dans L^* .

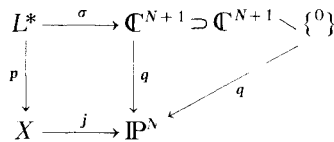
Lemme 7.5. *Soit Ω le domaine de Hartogs*

$$\Omega = \{\zeta \in L^*; \psi(\zeta) = \text{Log} |\zeta|^2 + \varphi(p(\zeta)) < 0\}.$$

Si X est de Stein, L^ et Ω sont également de Stein.*

Si X est projective, Ω est domaine d'existence d'une fonction holomorphe F , à condition de remplacer éventuellement L^ , T , φ par L^{-k} , kT , $k\varphi$ où k est un entier > 0 assez grand.*

Il suffit de considérer le cas où X est projective. Par construction de L et φ on a $ic(L) + i\partial\bar{\partial}\varphi = 2\pi T > 0$, donc le fibré L est ample. Quitte à remplacer L par une puissance L^k , il existe un système $\sigma = (\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_N)$ de sections de L sans zéros communs tel que le diagramme commutatif



définisse un plongement j de X dans \mathbb{P}^N . L'image $\sigma(L^*) = \overline{q^{-1}(j(X))}$ est une variété algébrique affine homogène dans \mathbb{C}^{N+1} , et σ est l'application qui écrase la section nulle de L^* sur 0. Comme $\psi \equiv -\infty$ sur $X = \sigma^{-1}(0)$, ψ se factorise en une fonction plurisousharmonique $\tilde{\psi}$ sur $\sigma(L^*)$ telle que $\psi = \tilde{\psi} \circ \sigma$. L'image $\sigma(\Omega) = \{z \in \sigma(L^*); \tilde{\psi}(z) < 0\}$ est donc un espace de Stein avec singularité isolée en 0.

Il existe par conséquent une fonction holomorphe \tilde{F} dont le domaine d'existence est $\sigma(\Omega)$. La fonction $F = \tilde{F} \circ \sigma$ répond à la question. \square

On se donne une fonction holomorphe F dont le domaine d'existence est Ω . F peut s'écrire de manière unique sous forme d'une série entière

$$F(\zeta) = \sum_{v=0}^{\infty} F_v(z) \cdot \zeta^v, \quad \zeta \in \Omega \subset L^*, \quad z = p(\zeta) \in X,$$

où F_v est une section de L^v au-dessus de X . La construction de F et du domaine de Hartogs Ω montrent que φ est la limite supérieure régularisée

$$\varphi = \left(\limsup_{v \rightarrow +\infty} \frac{1}{v} \text{Log} |F_v|^2 \right)^* \tag{7.4}$$

Le point crucial de la démonstration est contenu dans le lemme suivant.

Lemme 7.6. *Il existe une suite d'entiers $k_v > 0$ et une suite de sections G_v de L^{k_v} telles que*

$$\varphi = \lim_{v \rightarrow +\infty} \frac{1}{k_v} \text{Log} |G_v|^2 \text{ dans } L^1_{\text{loc}}(X).$$

Démonstration. Posons comme P. Lelong [9]

$$\varphi_{r,s} = \sup_{r \leq v \leq s} \frac{1}{v} \text{Log} |F_v|^2 = \frac{1}{s!} \sup_{r \leq v \leq s} \text{Log} |F_v^{s!/v}|^2.$$

La famille $\left\{ \frac{1}{v} \text{Log} |F_v|^2 \right\}$ est localement uniformément majorée, et l'égalité (7.4) montre que $\varphi = \lim_{r \rightarrow +\infty} \downarrow (\lim_{s \rightarrow +\infty} \uparrow \varphi_{r,s})^*$.

La fonction φ est donc limite dans $L^1_{\text{loc}}(X)$ de fonctions du type $\varphi_{r,s}$. Il suffit alors de démontrer le lemme 7.6 pour une fonction φ_0 de la forme

$$\varphi_0 = \frac{1}{S} \sup_{1 \leq v \leq N} \text{Log} |H_v|^2$$

où les H_v , $1 \leq v \leq N$, sont des sections de L^S . On peut évidemment supposer que les quotients H_v/H_μ ne sont pas identiquement de module 1, sinon on supprime l'une des sections H_v .

Soit E l'ensemble des points $z \in X$ pour lesquels il existe un couple (μ, v) , $\mu \neq v$, tel que $|H_\mu(z)|^2 = |H_v(z)|^2$. L'ensemble E est analytique réel, car la métrique C^∞ de L^S se simplifie dans les équations précédentes; de plus E est de mesure nulle par connexité de X . En tout point $z \in X \setminus E$ on peut écrire

$$\varphi_0(z) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{kS} \text{Log} \left| \sum_{k=1}^N H_v^k \right|^2. \tag{7.5}$$

Pour montrer que la convergence a lieu dans $L^1_{\text{loc}}(X)$, il suffit de vérifier que la suite $\varphi_k = \frac{1}{kS} \text{Log} \left| \sum_{k=1}^N H_v^k \right|^2$ est localement équi-intégrable sur X . Soit ρ un repère local du fibré L au-dessus d'un ouvert $U \subset X$. Les fonctions $\varphi_k - \text{Log} |\rho|^2$ sont plurisousharmoniques (car la métrique de L se simplifie), localement uniformément majorées sur U , et $\inf_k \varphi_k > -\infty$ presque partout sur U d'après (7.5).

La famille $\{\varphi_k - \text{Log} |\rho|^2\}$ est donc bornée dans $L^1_{\text{loc}}(U)$, et par suite équi-intégrable en vertu des propriétés classiques des fonctions sousharmoniques. \square

Soit Z_v le diviseur des zéros de G_v , G_v étant la suite de sections du lemme 7.6. L'équation de Lelong-Poincaré implique

$$\frac{i}{2\pi} \partial \bar{\partial} \text{Log} |G_v|^2 = [Z_v] - k_v \frac{i}{2\pi} c(L).$$

D'après le lemme 7.6 et l'égalité (7.3) on obtient

$$\begin{aligned} \frac{i}{2\pi} \partial \bar{\partial} \varphi &= \lim_{v \rightarrow +\infty} \frac{1}{k_v} [Z_v] - \frac{i}{2\pi} c(L), \\ T &= \frac{i}{2\pi} (c(L) + \partial \bar{\partial} \varphi) = \lim_{v \rightarrow +\infty} \frac{1}{k_v} [Z_v] \end{aligned}$$

pour la topologie faible de $\mathcal{D}'_{n-1, n-1}(X)$. Comme chaque diviseur $[Z_v]$ se décompose en une somme localement finie de diviseurs irréductibles, on a en fait démontré que

$$SPC_{\mathbb{Z}}^{n-1}(X) = \widehat{\mathcal{D}^{n-1}(X)}.$$

Pour achever la preuve du théorème 7.1 il reste seulement à rendre les diviseurs Z_v irréductibles, ce qui est possible grâce aux techniques de [2]. On étudiera séparément le cas des variétés projectives et des variétés de Stein.

Proposition 7.7. *Soit X une variété projective irréductible de dimension $n \geq 2$, L un fibré linéaire >0 sur X et G une section non nulle de L . Alors il existe un fibré linéaire hermitien M et une section non nulle H de M ayant la propriété suivante: pour tout entier $k \geq k_0$ assez grand, il existe une section H_k de $L^k \otimes M$ et $\varepsilon(k) > 0$ tels que le diviseur des zéros de $G^k H + \varepsilon H_k$ soit irréductible si $\varepsilon \in \mathbb{C}$, $0 < |\varepsilon| < \varepsilon(k)$.*

On aura alors $\text{Log}|G|^2 = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{k} \text{Log}|G^k H + \varepsilon_k H_k|^2$ dans $L^1(X)$, à condition de choisir une suite ε_k tendant rapidement vers 0. Si l'on calcule le $\frac{i}{2\pi} \partial \bar{\partial}$ en tenant compte de l'égalité $c(L^k \otimes M) = kc(L) + c(M)$, on voit que le diviseur de G est limite faible de diviseurs irréductibles.

Démonstration. Soit $[Z]$ le diviseur de G , $[Z] = \sum_{j=1}^N a_j [Z_j]$, $a_j \in \mathbb{Z}$, $a_j > 0$, sa décomposition en diviseurs irréductibles. Il est clair qu'on peut trouver une suite d'hypersurfaces irréductibles Y_l , $1 \leq l \leq N_1$, 2 à 2 distinctes, contenant la suite Z_j (avec $Y_1 = Z_1$, $Y_{N_1} = Z_{N_1}$) et ayant la propriété suivante: pour tout indice l , $1 \leq l < N_1$, il existe un point $z_l \in (Y_l \cap Y_{l+1}) \setminus \bigcup_{j=l+1}^N Y_j$ où Y_l et Y_{l+1} se coupent transversalement. Soit M un fibré linéaire et H une section de M dont le diviseur est égal à $\sum_{Y_l \notin [Z_j]} [Y_l]$.

Pour $k \geq k_0$ le fibré $L^k \otimes M$ est engendré par ses sections globales, donc il existe une section H_k de $L^k \otimes M$ qui ne s'annule en aucun des points z_l , $1 \leq l \leq N_1 - 1$. Avec ce choix de H et H_k , la démonstration de [2], §3 s'applique textuellement pour vérifier que le diviseur de $G^k H + \varepsilon H_k$ est irréductible. La construction précédente montre en effet que ce diviseur est irréductible localement aux points z_l . L'irréductibilité globale en résulte pour ε assez petit. \square

Dans le cas des variétés de Stein, la situation est un peu plus simple.

Proposition 7.8. *Soit X une variété de Stein connexe de dimension $n \geq 2$, L un fibré linéaire sur X . Alors l'ensemble des sections de L dont le diviseur est irréductible, est dense dans $H^0(X; L)$ pour la topologie de la convergence compacte.*

La démonstration résulte encore des techniques de [2], §3, à condition de prouver le lemme suivant.

Lemma 7.9. *Soit K une partie compacte holomorphiquement convexe de X , D une partie dense dans $X \setminus K$. Quels que soient les points distincts $z, \zeta \in X \setminus K$ il existe une suite $\{z_1, z_2, \dots, z_N\} \subset D$ telle que pour tous ouverts $U_z \subset T_z^* X$, $U_\zeta \subset T_\zeta^* X$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe une fonction holomorphe H sur X vérifiant*

$$(7.6) \quad |H - 1| < \varepsilon \text{ sur } K;$$

$$(7.7) \quad H(z) = H(\zeta) = 0, \quad dH_z \in U_z, \quad dH_\zeta \in U_\zeta;$$

(7.8) *il existe des hypersurfaces irréductibles Y_0, Y_1, \dots, Y_N contenues dans $H^{-1}(0)$, telles que $z \in Y_0$, $\zeta \in Y_N$, telles que Y_j et Y_{j-1} se coupent transversalement en z_j , $1 \leq j \leq N$, et telles que le germe du diviseur de H en z_j soit $[Y_j] + [Y_{j-1}]$.*

Démonstration. $X \setminus K$ ne peut avoir de composante connexe relativement compacte dans X . Le théorème de Hartogs affirme que toute fonction holomorphe sur $X \setminus K$ se prolonge à X , par conséquent $X \setminus K$ est connexe.

On commence par démontrer que tout point $z_0 \in X \setminus K$ a un voisinage V tel que le lemme 7.9 soit vrai quand $z, \zeta \in V$ ($\varepsilon, U_z, U_\zeta$ quelconques). On prend $V \Subset B \Subset W \subset X \setminus K$, où $(W; w_1, \dots, w_n)$ est une carte locale en z_0 , et B une boule de centre z_0 suffisamment petite pour que le compact $K \cup \bar{B}$ soit holomorphiquement convexe. Pour chaque couple $(z, \zeta) \in V^2$, $z \neq \zeta$, il existe un polynôme $P \in \mathbb{C}[w_1, \dots, w_n]$ tel que $P(z) = P(\zeta) = 0$, $dP_z \in U_z$, $dP_\zeta \in U_\zeta$, et tel que la variété $B \cap P^{-1}(0)$ soit lisse et connexe. Soit $\mathcal{F}_{z,\zeta}$ le faisceau des germes de fonctions holomorphes qui s'annulent aux points z et ζ ; soit P la section de $\mathcal{F}_{z,\zeta}$ au dessus de $K \cup \bar{B}$ définie par $\tilde{P} = 1$ au voisinage de K , et $\tilde{P} = P$ au voisinage de \bar{B} . Le théorème d'approximation d'Oka-Weil donne une section globale $H_{z,\zeta}$ vérifiant (7.6), (7.7). Lorsque $H_{z,\zeta}$ est assez voisin de P sur \bar{B} , la composante irréductible Y_0 de $H_{z,\zeta}^{-1}(0)$ qui contient z contient aussi ζ , d'où la propriété (7.8) avec $N = 0$.

Lorsque z et ζ sont quelconques, la connexité de $X \setminus K$ permet de trouver des ouverts V_1, \dots, V_{N+1} du type précédent, tels que $z \in V_1$, $\zeta \in V_{N+1}$, et $V_j \cap V_{j+1} \neq \emptyset$, $V_j \cap V_{j+1} \cap V_{j+1} = \emptyset$.

On pose $z_0 = z$, $z_{N+1} = \zeta$, et on choisit $z_j \in V_j \cap V_{j+1} \cap D$, $1 \leq j \leq N$. On prend $H_j = H_{z_j, z_{j+1}}$, $0 \leq j \leq N$, avec de plus $H_j(z_k)$ très voisin de 1 pour $k \neq j, j+1$. La fonction $\tilde{H} = H_0 H_1 \dots H_N$ répond à la question. \square

Indications sur la preuve de la proposition 7.8

Soit G une section de L , $K = \hat{K} \Subset X$, et Z_1, \dots, Z_N les hypersurfaces irréductibles contenues dans le diviseur de G et qui rencontrent K . Le lemme 7.9 permet de trouver une hypersurface $H = 0$ qui «relie» entre elles les hypersurfaces Z_1, \dots, Z_N . On construit comme dans la proposition 7.7 une section F de L telle que l'hypersurface $GH + \varepsilon F = 0$ ait une seule branche irréductible rencontrant K (pour tout $\varepsilon \neq 0$ assez petit).

On répète ensuite le procédé avec une suite exhaustive de compacts $K_\nu = \hat{K}_\nu$. \square

Corollaire 7.9. *Soit X une variété projective (resp. de Stein) de dimension $n \geq 1$. Alors $\widehat{\mathcal{H}}^{n-1}(X) = \text{SPC}_{\mathbb{Z}}^{n-1}(X)$.*

Si X est de dimension 1, le corollaire 7.9 signifie simplement que toute mesure ≥ 0 sur X est limite faible de combinaisons linéaires ≥ 0 de mesures de Dirac. Si X est non connexe de dimension $n \geq 2$, il suffit d'appliquer le théorème 7.1 à chaque composante connexe de X . D'après la proposition 6.6 et les remarques qui précèdent, on a d'autre part le résultat suivant.

Corollaire 7.10. *Soit X une variété de Stein connexe de dimension $n \geq 2$. Alors $\overline{\mathcal{I}^{n-1}(X)} = SPC^{n-1}(X)$ dans les cas suivants:*

$$(7.9) \quad n=2;$$

(7.10) X est un ouvert borné de \mathbb{C}^n à frontière C^1 ;

(7.11) X est une variété algébrique affine.

Remarque 7.11. Dans la situation du corollaire 6.5, choisissons $T \in SPC^1(X)$, $T \notin SPC_{\mathbb{Z}}^1(X)$. Le corollaire 7.10 montre que $T|_{X \setminus Y}$ est limite faible de courants d'intégration $\lambda_v[Z_v]$ sur $X \setminus Y$. Il est facile de montrer que sur $X \setminus Y$ les cycles algébriques sont denses dans les cycles analytiques.

On peut donc choisir des courbes Z_v dont les complétions \bar{Z}_v sont des courbes algébriques de X . Néanmoins, il n'est pas possible d'approximer $T|_{X \setminus Y}$ par une suite $\lambda_v[Z_v]$ avec un contrôle uniforme de la masse des $\lambda_v[Z_v]$ au voisinage de Y . En effet, si cela était vrai, une sous-suite de $\lambda_v[\bar{Z}_v]$ convergerait vers $T + \lambda[Y]$, avec $\lambda \geq 0$, donc $T = \lim_v \lambda_v[\bar{Z}_v] - \lambda[Y]$ serait dans $SPC_{\mathbb{Z}}^1(X)$.

Bibliographie

1. Bourbaki, N.: Espaces vectoriels topologiques, chap. 1 et 2, Paris: Hermann, 1964
2. Demailly, J.-P.: Construction d'hypersurfaces irréductibles avec lieu singulier donné dans \mathbb{C}^n . Ann. de l'Inst. Fourier 30, (fasc. 3) 219-236 (1980)
3. Federer, H.: Geometric measure theory, Band 153. Berlin, Heidelberg, New York: Springer 1969
4. Grauert, H.: On Levi's problem and the imbedding of real analytic manifolds. Ann. of Math., 68, (n° 2) 460-472 (1958)
5. Harvey, R.: Holomorphic chains and their boundaries. Proceedings of Symposia in pure Mathematics of the Amer. Math. Soc., held at Williamstown, vol. 30, Part 1, pp. 309-382 (1975)
6. Harvey, R., Knapp, A.W.: Positive (p, p) forms, Wirtinger's inequality and currents. Value distribution theory. Part A: Proc. Tulane Univ. Program on Value Distribution Theory in Complex Analysis and Related Topics in Differential Geometry, 1972-1973; pp. 43-62, New York: Dekker 1974
7. Lelong, P.: Intégration sur un ensemble analytique complexe. Bull. Soc. Math. France 85, 239-262 (1957)
8. Lelong, P.: Fonctions plurisousharmoniques et formes différentielles positives. New York: Gordon and Breach, Paris: distribué par Dunod Editeur, 1968
9. Lelong, P.: Eléments extrémaux sur le cône des courants positifs fermés. Séminaire P. Lelong (Analyse), 12e année, 1971-1972, Lecture Notes in Math., vol. 332. Berlin, Heidelberg, New York: Springer 1972
10. Phelps, R.: Lectures on Choquet's theorem. Princeton, New Jersey: Van Nostrand, 1966
11. Skoda, H.: Prolongement des courants positifs fermés de masse finie. Invent. Math. 66, 361-376 (1982)