Séminaire P. LELONG, P. DOLBEAULT, H. SKODA
(Analyse) 24e année, 1983/84
Lecture Notes in Math. **1198**, Springer, pages 88–97

# Sur l'identité de Kodaira-Nakano en géométrie hermitienne

par Jean-Pierre Demailly

*Université de Grenoble I, Institut Fourier*
*Laboratoire de Mathématiques associé au C.N.R.S. n°188*
*BP 74, F-38402 Saint-Martin d'Hères, France*

Nous démontrons une identité de Kodaira-Nakano généralisée, reliant les Laplaciens de Beltrami holomorphes et anti-holomorphes d'un fibré vectoriel hermitien au-dessus d'une variété complexe hermitienne, avec calcul explicite des termes de torsion.

We prove a generalized Kodaira-Nakano identity relating holomorphic and anti-holomorphic Laplace-Beltrami operators of a hermitian vector bundle over a hermitian complex manifold, with explicit computations of torsion terms.

## 0. – Introduction et notations.

Soit $E$ un fibré vectoriel holomorphe hermitien de rang $r$ au-dessus d'une variété analytique complexe $X$ de dimension $n$. On désigne par $D = D' + D''$ la connexion canonique de $E$ et par $c(E) = D^2 = D'D'' + D''D'$ la forme de courbure associée. On suppose donnée une metrique hermitienme

$$\omega = i \sum_{1\le j,k\le n} \omega_{jk}\, dz_j \wedge d\overline{z}_k$$

de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $X$. Le module bigradué $\bigoplus_{p,q} \mathcal{D}_{p,q}(X,E)$ des formes différentielles $\mathcal{C}^\infty$ à support compact dans $X$ et à valeurs dans $E$ se trouve alors muni d'un produit scalaire

$$\langle\!\langle u|v\rangle\!\rangle = \int_X \langle u,v\rangle\, dV, \qquad dV = \frac{1}{n!}\omega^n,$$

où le produit scalaire ponctuel $\langle u,v\rangle$ est défini à l'aide de $\omega$ et de la métrique sur les fibres de $E$. On désigne par $\delta'$, $\delta''$ les adjoints (formels) de $D'$ et $D''$ opérant sur $\mathcal{D}_{\bullet,\bullet}(X,E)$ et par $L$ l'opérateur $Lu = \omega\wedge u$ et $\Lambda$ l'adjoint de $L$. On note enfin

$$[A,B] = AB - (-1)^{\deg A \deg B} BA$$

le crochet de l'algèbre de Lie graduée des endomorphismes de $\mathcal{D}_\bullet(X,E)$ et

$$\Delta' = [D',\delta'], \qquad \Delta'' = [D'',\delta'']$$

les opérateurs de Laplace-Beltrami holomorphe et anti-holomorphe. On a alors l'identité classique suivante, attribuée a Bochner-Calabi-Kodaira-Nakano.

**Théorème. –** *Si la métrique $\omega$ est kählerienne (i.e. $d\omega = 0$), on a l'égalité*

$$\Delta'' = \Delta' + [ic(E), \Lambda].$$

Les demonstrations usuelles de cette identité reposent sur la relation de commuta[ion $[\Lambda, D'] = i\delta''$ (voir aussi P. Griffiths [1] pour une autre méthode). Dans le cas où $\omega$ n'est pas kählérienne apparaît un terme de torsion supplémentaire que nous nous proposons d'expliciter complètement. De telles formules avaient déjà été étudiées dans la thèse de J. Le Potier [2] et l'article de T. Ohsawa [3] pour démontrer des théorèmes d'annulation de la cohomologie. Comme la thèse de Le Potier n'est pas aisément accessible, nous avons jugé utile de refaire une partie des calculs en détail, par une méthode d'ailleurs plus élémentaire qui n'utilise pas les formes primitives et la décomposition de Lepage. Nous avons d'autre part poussé les calculs plus loin de manière à simplifier l'écriture des opérateurs d'ordre un «parasites» dus à la torsion dans l'identité de Kodaira-Nakano (cf. théorème 2.12).

## 1. – Relations de commutation.

Si $a$ est un élément de l'algèbre extérieure $\bigwedge \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(TX, \mathbb{C})$, on note encore $a$ l'opérateur de multiplication extérieure $u \mapsto a \wedge u$. Le produit intérieur par $\overline{a}$ est par définition l'opérateur adjoint $a^*$ :

$$\langle \overline{a} \lrcorner u, v\rangle = \langle a^* u, v\rangle = \langle u,\ a \wedge v\rangle.$$

Nous allons démontrer les relations de commutation suivantes.

**Théorème 1.1. –** *Soit $\tau$ l'opérateur de type $(1,0)$ défini par $\tau = [\Lambda, d'\omega]$. Alors :*

(a) $[\delta'', L] = i(D' + \tau)$,

(b) $[\delta', L] = -i(D'' + \overline{\tau})$,

(c) $[\Lambda, D''] = -i(\delta' + \tau^*)$,

(d) $[\Lambda, D'] = i(\delta'' + \overline{\tau}^*)$.

*$d'\omega$ sera appelée forme de torsion et $\tau$ opérateur de torsion.*

Les relations (c) et (d) résultent de (a) et (b) par adjonction. Grâce au lemme ci-dessous, on peut supposer en fait que $E$ est le fibré trivial $X \times \mathbb{C}$ avec métrique constante, et que $D = d = d' + d''$.

**Lemme 1.2. –** *Pour tout $x_0 \in X$, il existe un repère holomorphe $(e_\lambda)_{1 \le \lambda \le r}$ de $E$ au voisinage de $x_0$ tel que*

$$\langle e_\lambda(z), e_\mu(z)\rangle = \delta_{\lambda\mu} + O(|z|^2)$$

*relativement à un système de coordonnées locales $(z_j)_{1 \le j \le n}$ centré en $x_0$.*

En effet, si $(h_\lambda)$ est un repère holomorphe de $E$ orthonormé au point $x$ et si

$$\langle h_\lambda(z), h_\mu(z)\rangle = \delta_{\lambda\mu} + \sum_j (c_{\lambda\mu j} z_j + c'_{\lambda\mu j}\overline{z}_j) + O(|z|^2), \qquad c'_{\lambda\mu j} = \overline{c_{\mu\lambda j}},$$

il suffit de poser

$$e_\lambda(z) = h_\lambda(z) - \sum_{\mu,j} c_{\lambda\mu j}(z) h_\mu(z). \qquad \square$$

Étant donné une section $s = \sum_\lambda s_\lambda \otimes e_\lambda$ de $\mathcal{C}^\infty_{p,q}(X, E)$ on a alors

$$D_E s = \sum_\lambda ds_\lambda \otimes e_\lambda + O(|z|)$$
$$\delta''_E s = \sum_\lambda \delta'' s_\lambda \otimes e_\lambda + O(|z|),\ \ldots\ ,$$

ce qui ramène la preuve du théorème 1.1 au cas du fibré trivial $X \times \mathbb{C}$.

Soit maintenant $(z_j)_{1\le j\le n}$ un système de coordonnées locales centré en un point $x_0 \in X$, tel que $dz_j(x_0)$ soit une base orthonormée de l'espace cotangent pour la métrique $\omega(x_0)$. Posons

$$\omega_0 = i \sum_{1\le j\le n} dz_j \wedge d\overline{z}_j$$
$$\omega = \omega_0 + \gamma \qquad \text{avec } \gamma = O(|z|).$$

Désignons par $\langle\ ,\ \rangle_0$, $L_0$ , $\Lambda_0$ , $\delta'_0$ , $\delta''_0$ le produit scalaire et les opérateurs associés à la métrique $\omega_0$ et soit $dV_0 = \frac{1}{n!}\omega_0^n$. Les relations de commutation de la géométrie kählérienne dans $\mathbb{C}^n$ impliquent

$$[\delta''_0, L] = id'.$$

La démonstration des relations 1. 1 $(a - d)$ se fait maintenant grâce à un développement limité des opérateurs $L$, $\Lambda$ , $\delta'$, $\delta''$ en fonction de ces mêmes opérateurs «figés» au point $x_0$.

**Lemme 1.3. –** *Soient $u$, $v$ deux $(p,q)$-formes $\mathcal{C}^\infty$ sur $X$. Alors*

$$\langle u, v\rangle\, dV = \langle u - [\gamma, \Lambda_0]u, v\rangle_0\, dV_0 + O(|z|^2)$$

*au voisinage de $x_0$.*

*Démonstration.* – Soit

$$\gamma = i \sum_{1\le j\le n} \gamma_j\, \zeta_j \wedge \overline{\zeta}_j, \qquad \gamma_1 \le \gamma_2 \le \cdots \le \gamma_n$$

une diagonalisation de la $(1,1)$-forme $\gamma(z)$ dans une base $(\zeta_j)$ de $T^*_z X$ , orthonormée relativement à $\omega_0(z)$. On a alors

$$\omega = \omega_0 + \gamma = i \sum_{1\le j\le n} \lambda_j\, \zeta_j \wedge \overline{\zeta_j}$$

avec $\lambda_j = 1 + \gamma_j$ et $\gamma_j = O(|z|)$. Posons

$$J = \{j_1, \ldots, j_p\}, \qquad \zeta_J = \zeta_{j_1} \wedge \ldots \wedge \zeta_{j_p}, \qquad \lambda_J = \lambda_{j_1} \ldots \lambda_{j_p},$$
$$u = \sum_{|J|=p,\,|K|=q} u_{J,K}\, \zeta_J \wedge \overline{\zeta}_K, \qquad v = \sum_{|J|=p,\,|K|=q} v_{J,K}\, \zeta_J \wedge \overline{\zeta}_K$$

où la somme est étendue aux multi-indices $J$, $K$ *croissants* tels que $|J| = p$ , $|K| = q$. Relativement à $\omega$ on a $\langle \zeta_j, \zeta_j\rangle = \lambda_j^{-1}$, d'où

$$\begin{aligned}\langle u, v\rangle\, dV &= \sum_{J,K} \lambda_J^{-1}\lambda_K^{-1} u_{J,K}\overline{v}_{J,K}\, \lambda_1 \ldots \lambda_n\, dV_0\\ &= \sum_{J,K}\Big(1 - \sum_{j\in J}\gamma_j - \sum_{j\in K}\gamma_j + \sum_{1\le j\le n}\gamma_j\Big) u_{J,K}\overline{V}_{J,K}\, dV_0 + O(|z|^2).\end{aligned}$$

Le lemme 1.3 est alors conséquence du lemme suivant :

**Lemme 1.4. –** *On a*

$$[\gamma, \Lambda_0]u = \sum_{J,K}\Big(\sum_{j\in J}\gamma_j + \sum_{j\in K}\gamma_j - \sum_{1\le j\le n}\gamma_j\Big) u_{J,K}\,\zeta_J\wedge\overline{\zeta}_K,$$

lequel résulte à son tour des formules

$$\begin{aligned}\Lambda_0 u &= i(-1)^p \sum_{j\notin L\cup M} u_{jL,jM}\,\zeta_L\wedge\overline{\zeta}_M, \qquad |L| = p-1, \quad |M| = q-1,\\ \gamma\wedge u &= i(-1)^p \sum_{k\notin J\cup K}\gamma_k u_{J,K}\,\zeta_{kJ}\wedge\overline{\zeta}_{kK},\\ [\gamma, \Lambda_0]u &= \sum_{j,k\notin L\cup M}\gamma_k u_{jL,jM}\,\zeta_{kL}\wedge\overline{\zeta}_{kM} - \sum_{j=k\notin J\cup K}\gamma_k u_{J,K}\,\zeta_J\wedge\overline{\zeta}_K\\ &\qquad - \sum_{j,k\notin L\cup M,\, j\ne k}\gamma_k u_{jL,jM}\,\zeta_{kL}\wedge\overline{\zeta}_{kM}\\ &= \sum_{J,K}\Big(\sum_{j\in J\cap K}\gamma_j - \sum_{j\notin J\cup K}\gamma_j\Big) u_{J,K}\,\zeta_J\wedge\overline{\zeta}_K. \qquad \square\end{aligned}$$

**Proposition 1.5. –** *On a* $\delta'' = \delta_0'' + [\Lambda_0, [\delta_0'', \gamma]]$ *au point* $x_0$*, i.e. en ce point les deux opérateurs ont même écriture formelle.*

*Démonstration.* – D'après le lemme 1.3, $\delta''$ coïncide en $x_0$ avec l'adjoint de $d''$ pour la métrique

$$\langle\!\langle u|v\rangle\!\rangle_1 = \int_X \langle u - [\gamma, \Lambda_0]u|v\rangle_0\, dV_0.$$

Pour tous $u \in \mathcal{D}_{p,q}(X)$ et $v \in \mathcal{D}_{p,q-1}(X)$ on a par définition

$$\langle\!\langle u|d''v\rangle\!\rangle_1 = \int_X \langle u - [\gamma, \Lambda_0]u, d''v\rangle_0\, dV_0 = \int_X \langle \delta_0''u - \delta_0''[\gamma, \Lambda_0]u, v\rangle_0\, dV_0.$$

Comme $\omega$ et $\omega_0$ coïncident au point $x_0$ et comme $\gamma(x_0) = 0$, on obtient en ce point :

$$\delta''u = \delta_0''u - \delta_0''[\gamma, \Lambda_0]u = \delta_0''u - [\delta_0'', [\gamma, \Lambda_0]]u,$$

c'est-à-dire

$$\delta'' = \delta_0'' - [\delta_0'', [\gamma, \Lambda_0]].$$

On utilise maintenant l'identité de Jacobi

$$(1.6) \qquad (-1)^{ca}[A, [B, C]] + (-1\perp)^{ab}[B, [C, A]] + (-1)^{bc}[C, [A, B]] = 0$$

uù $a$, $b$, $c$ sont les degrés respectifs de $A$, $B$, $C$. Il vient

$$[\Lambda_0, \delta_0''] = [d'', L_0]^* = 0,$$

par suite

$$[\delta_0'', [\gamma, \Lambda_0]] + [\Lambda_0, [\delta_0''\gamma]] = 0.$$

ce qui démontre 1.5. □

*Démonstration du théorème 1.1.* – Il suffit de prouver (a), la propriété (b) s'en déduit par conjugaison. L'égalité $L = L_0 + \gamma$ et la proposition 1.5 entraînent au point $x_0$ la relation

$$[L, \delta''] = [L_0, \delta_0''] + [L_0, [\Lambda_0, [\delta_0'', \gamma]]] + [\gamma, \delta_0''], \tag{1.7}$$

car le crochet triple où $\gamma$ figure 2 fois est nul en $x_0$. Daprè l'identité (1.6) appliquée avec $C = [\delta_0'', \gamma]$ on obtient

$$\begin{cases} [L_0, [\Lambda_0, C]] = -[\lambda_0, [C, L_0]] - [C, [L_0, \Lambda_0]], \\ [C, L_0] = [L_0, [\delta_0'', \gamma]] = [\gamma, [L_0, \delta_0'']]. \end{cases} \tag{1.8}$$

La relation classique $[L_0, \delta_0''] = -id'$ donne donc

$$[C, L_0] = -[\gamma, id'] = id'\gamma = id'\omega. \tag{1.9}$$

D'autre part, le lemme 1.4 montre que

$$[L_0, \Lambda_0]u = (p + q - n)u \tag{1.10}$$

si $u$ est de bidegré $(p, q)$ ; comme $C$ est de type $(1, 0)$ il vient

$$[C, [L_0, \Lambda_0]] = -C = -[\delta_0'', \gamma]. \tag{1.11}$$

D'après (1.8), (1.9), (1.11) il en résulte la relation

$$[L_0, [\Lambda_0, [\delta_0'', \gamma]]] = -[\Lambda_0, id'\omega] + [\delta_0'', \gamma].$$

On obtient en définitive d'après (1.7) l'égalité :

$$[L, \delta''] = [L_0, \delta_0''] - [\Lambda_0, id'\omega] = -i(d' + \tau)$$

au point $x_0$, ce qui achève la vérification de (a). □

Par une méthode entièrement différente, J. Le Potier [2] a établi des formules analogues et a obtenu la relation essentiellement équivalente $\overline{\tau}^* = \frac{i}{2}[\Lambda, [\Lambda, d'\omega]]$, cf. lemme 2.2 (b).

## 2. – Identité de Kodaira-Nakano.

Les relations de commutation du §1 vont nous permettre d'exprimer $\Delta''$ en fonction de $\Delta'$ comme dans le cas kählérien, modulo des termes de torsion supplémentaires.

**Proposition 2.1.** – *On a*

$$\Delta'' = \Delta' + [ic(E), \Lambda] + [D', \tau^*] - [D'', \overline{\tau}^*].$$

*Démonstration.* – L'égalité 1.1 (d) fournit $\delta'' = -i[\Lambda, D'] - \overline{\tau}^*$, d'où

$$\Delta'' = [D'', \delta''] = -i[D'', [\Lambda, D']] - [D'', \overline{\tau}^*].$$

L'identité de Jacobi entraîne d'autre part

$$[D'', [\Lambda, D']] = [\lambda, [D', D'']] + [D', [D'', \Lambda]] = [\Lambda, c(E)] + i[D', \delta' + \tau^*]$$

compte-tenu de 1.1 (c) , ce qui démontre la relation (2.1). □

Nous allons maintenant transformer l'égalité (2.1) de manière à absorber les opérateurs différentiels d'ordre un $[D', \tau^*]$ et $[D'', \overline{\tau}^*]$ dans l'écriture de $\Delta'$.

**Lemme 2.2. –** *On a*

(a) $[L, \tau] = 3d'\omega$,

(b) $[\Lambda, \tau] = -2i\overline{\tau}^*$.

*Démonstration.* –

(a) Comme $[L, d'\omega] = 0$, l'identité de Jacobi entraîne

$$[L, \tau] = [L, [\Lambda, d'\omega]] = -[d'\omega, [L, \Lambda]] = 3d'\omega$$

compte-tenu de (1.10) et du degré de $d'\omega$, qui est égal à 3.

(b) On a $\tau = -i[\delta'', L] - D'$ grâce à 1.1 (a), d'où

$$[\Lambda, \tau] = -i[\lambda, [\delta'', L]] - [\Lambda, D'] = -i([\Lambda, [\delta'', L]] + \delta'' + \overline{\tau}^*).$$

En utilisant de nouveau (1.6) et (1.10) il vient

$$\begin{aligned}[\Lambda, [\delta'', L]] &= -[L, [\Lambda, \delta'']] - [\delta'', [L, \Lambda]] = -[[d'', L], \Lambda]^* - \delta'' \\ &= -[d''\omega, \Lambda]^* - \delta'' = \overline{\tau}^* - \delta''\end{aligned}$$

d'où $[\Lambda, \tau] = -2i\overline{\tau}^*$. □

**Lemme 2.3. –** *On a*

(a) $[D', \overline{\tau}^*] = -[D', \delta''] = [\tau, \delta'']$,

(b) $-[D'', \overline{\tau}^*] = [\tau, \delta' + \tau^\star] + [\Lambda, [\Lambda, \frac{i}{2} d'd''\omega]] - [d'\omega, (d'\omega)^*]$.

*Démonstration.* – L'identité de Jacobi implique

$$-[D', [\Lambda, D']] + [D', [D', \Lambda]] + [\Lambda, [D', D']] = 0$$

d'où $[D', [\Lambda, D']] = 0$ et de même $[\delta'', [\delta'', L]] = 0$. L'égalité (a) résulte alors de 1.1 (a) et (d). Pour vérifier (b) on part de l'égalité $\overline{\tau}^* - = \frac{i}{2}[\Lambda, \tau]$ fournie par 2.2 (b). Il s'ensuit

$$[D'', \overline{\tau}^*] = \frac{i}{2}[D'', [\Lambda, \tau]]. \tag{2.4}$$

On utilise maintenant l'identité de Jacobi a répétition :

$$[D'', [\Lambda, \tau]] = [\Lambda, [\tau, D'']] + [\tau, [D'', \Lambda]]\ ; \tag{2.5}$$

$$\begin{aligned}[\tau, D''] &= [D'', \tau] = [D'', [\Lambda, d'\omega]] \\ &= [\Lambda, [d'\omega, D''] + [d'\omega, [D'', \Lambda]] \\ &= [\Lambda, d''d'\omega] + [d'\omega, A]\end{aligned} \tag{2.6}$$

avec la notation $A = [D'', \Lambda] = i(\delta' + \tau^*)$. D'après (2.6) il vient

$$[\Lambda, [\tau, D'']] = [\Lambda, [\Lambda, d''d'\omega]] + [\Lambda, [d', A]]. \tag{2.7}$$

Calculons maintenant le dernier crochet dans (2.7) :

$$[\Lambda, [d'\omega, A]] = [A, [\Lambda, d'\omega]] - [d'\omega, [A, \Lambda]],$$

$$[\Lambda, [d'\omega, A]] = [\tau, A] + [d'\omega, [\Lambda, A]]\ ; \tag{2.8}$$

$$[\Lambda, A] = i[\Lambda, \delta' + \tau^*] = i[d' + \tau, L]^* \tag{2.9}$$

où $[d', L] = d'\omega$ et $[\tau, L] = -3d'\omega$ d'après 2.2 (a). Les égalités (2.9) et (2.8) fournissent donc respectivement

$$[\Lambda, A] = -2i(d'\omega))^*,$$

$$[\Lambda, [d'\omega, A]] = [\tau, [D'', \Lambda]] - 2i[d'\omega, (d'\omega)^*]. \tag{2.10}$$

Les formules (2.5), (2.7), (2.10) donnent par conséquent

$$[D'', [\Lambda, \tau]] = [\Lambda, [\Lambda, d''d'\omega]] + 2[\tau, [D'', \Lambda]] - 2i[d'\omega, (d'\omega)^*]. \tag{2.11}$$

L'identité 2.3 (b) résulte alors de (2.4) et (2.11), compte tenu que

$$[D'', \Lambda] = i(\delta' + \tau^*).$$

□

Le lemme 2.3 (b) montre maintenant que

$$\Delta' + [D', \tau^*] - [D'', \overline{\tau}^\star] = [D' + \tau, \delta' + \tau^*] + [\Lambda, [\Lambda, \frac{i}{2} d'd''\omega]] - [d'\omega, (d'\omega)^*].$$

Posons $\Delta'_\tau = [D' + \tau, \delta' + \tau^*]$. Comme $\delta' + \tau^*$ est l'adjoint de $D' + \tau$, on voit que $\Delta'_\tau$ est un opérateur autoadjoint $\geq 0$. La proposition 2.1 peut donc se récrire

**Théorème 2.12. –** *On a*

$$\Delta'' = \Delta'_\tau + [ic(E), \Lambda] + T_\omega$$

*avec*

$$\Delta'_\tau = [D' + \tau, \delta' + \tau^*], \qquad \tau = [\Lambda, d'\omega],$$

$$T_\omega = [\Lambda, [\Lambda, \frac{i}{2} d'd''\omega]] - [d'\omega, (d'\omega)^*].$$

□

Dans le cas où la metrique $\omega$ est kählérienne, on a naturellement $\tau = T_\omega = 0$. De plus, dans ce cas le lemme 2.3 (a) implique $[D', \delta''] = 0$, d'où $[D'', \delta'] = 0$ par adjonction, ce qui donne

$$\Delta = [D, \delta] = [D' + D'', \delta' + \delta''] = \Delta' + \Delta''.$$

Dans le cas non kählérien, le lemme 2.3 (a) s'écrit $[D'+\tau, \delta''] = 0$ et on obtient la relation analogue plus générale

$$[D + \tau, \delta + \tau^*] = [(D' + \tau) + D'', (\delta' + \tau^*) + \delta''] = \Delta'_\tau + \Delta''.$$

On peut donc énoncer la

**Proposition 2.13. –** *En général, le Laplacien tordu* $\Delta_\tau = [D + \tau, \delta + \tau^*]$ *se décompose sous la forme*

$$\Delta_\tau = \Delta'_\tau + \Delta''. \qquad \square$$

## 3. – Théorème d'existence en bidegré $(n,q)$

Pour toute forme $u \in \mathcal{D}_{p,q}(X, E)$, le théorème 2.12 implique la généralisation suivante de l'inégalité de Nakano classique :

$$\|\delta'' u\|^2 + \|D'' u\|^2 \geq \langle\langle [ic(E), \Lambda]u | u \rangle\rangle + \langle\langle T_\omega u | u \rangle\rangle. \tag{3.1}$$

Dans certains cas, le terme $\langle\langle T_\omega u | u \rangle\rangle$ pourra se simplifier grâce aux remarques suivantes :

$$\begin{cases} \text{si } p = n \text{ ou } p = n - 1, & \langle\langle [d'\omega, (d'\omega)^*]u | u \rangle\rangle = \|(d'\omega)^* u\|^2 \\ \text{si } (p, q) = (n, 1), & [\Lambda, [\Lambda, d'd''\omega]] = 0. \end{cases} \tag{3.2}$$

On suppose maintenant que le fibré $E$ est semi-positif au sens de Nakano. On sait alors que l'endomorphisme $[ic(E), \Lambda]$ opérant sur les $(n, q)$-formes est hermitien $\geq 0$. Soit $h$ une $(n, q)$-forme à coefficients mesurables sur $X$. On considère la norme «rapportée à $c(E)$» telle que

$$|h|^2_{c(E)} = \langle [ic(E), \Lambda]^{-1} h, h \rangle,$$

i.e. $|h|_{c(E)}$ est le plus petit réel $\geq 0$ (éventuellement $+\infty$) tel que

$$|\langle h, u \rangle|^2 \leq |h|^2_{c(E)} \langle [ic(E), \Lambda]u, u \rangle \qquad \text{pour tout } u.$$

**Théorème 3.3. –** *On fait les hypothèses suivantes* $(3.4 - 3.7)$ :

(3.4) $D'' h = 0$ ;

(3.5) $\displaystyle\int_X |h|^2_{c(E)}\, dV < +\infty$ ;

(3.6) *la métrique* $\omega$ *est complète et la forme* $d'\omega$ *est* $\omega$*-bornée* (*c'est toujours le cas si* $X$ *est compacte*) ;

(3.7) *de plus, on a* $d'd''\omega = 0$ *si* $q > 1$.

*Alors il existe une* $(n, q-1)$*-forme* $f$ *et une* $(n-2, q-1)$*-forme* $g$ *sur* $X$ *à valeurs dans* $E$ *telles que*

(3.8) $\int_X (|f|^2 + |g|^2)\, dV \le \int_X |h|^2_{c(E)}\, dV,$

(3.9) $h = D''f + P(d'\omega \wedge g),$

*où $P$ est le projecteur orthogonal $L^2_{n,q}(X, E) \to \operatorname{Ker} D''$.*

*Démonstration.* – L'hypothèse de complétude (3.6) montre que l'inégalité (3.1) est vraie pour tout $u \in \operatorname{Dom}(\delta''_{n,q}) \cap \operatorname{Dom}(D''_{n,q})$ grâce au lemme de densité classique de Hörmander. Écrivons alors

$$u = u_1 + u_2$$

avec $u_1 \in \operatorname{Ker} D''_{n,q}$, $u_2 \in (\operatorname{Ker} D''_{n,q})^\perp$ ; il vient

$$|\langle\!\langle h|u\rangle\!\rangle|^2 \le |\langle\!\langle h|u_1\rangle\!\rangle|^2 \le \|h\|^2_{c(E)} \langle\!\langle [ic(E), \Lambda]u_1|u_1\rangle\!\rangle.$$

Sous l'hypothèse (3.7), le terme $\langle\!\langle T_\omega u_1|u_1\rangle\!\rangle$ se réduit à $-\|(d'\omega)^* u_1\|^2$ par la remarque (3.2). Comme

$$\operatorname{Ker} \delta''_{n,q} \supset \overline{\operatorname{Im} \delta''_{n,q+1}} = (\operatorname{Ker} D''_{n,q})^\perp,$$

l'inégalité (3.1) implique

$$\begin{aligned} \langle\!\langle [ic(E), \Lambda]u_1, u_1\rangle\!\rangle &\le \|\delta'' u_1\|^2 + \|D'' u_1\|^2 + \|(d'\omega)^* u_1\|^2 \\ &= \|\delta'' u\|^2 + \|(d'\omega)^* P u\|^2. \end{aligned}$$

Les conclusions (3.8) et (3.9) résultent alors de l'utilisation du théorème de Hahn-Banach. □

Le résultat est en fait surtout intéressant si $q = 1$ puisqu'aucune hypothèse du type $d'd''\omega = 0$ n'est alors nécessaire.

## Bibliographie

[1] P. Griffiths, *The extension problem in complex analysis II* ; Amer. J. of Math., Vol. **88**, (1966) 366–446.

[2] J. Le Potier, *Problèmes d'extension de classes de cohomologie* ; Thèse d'État à l'Université de Poitiers (France) 1974.

[3] T. Ohsawa, *Isomorphism theorems for cohomology groups of weakly 1-complete manifolds* ; Publ. R.I.M.S., Kyoto Univ., Vol. **18**, n°1 (1982) 191–232.

(mai 1984)