Frobenius et dgnrescence de Hodge

Luc Illusie

Universit de Paris-Sud
Dpartement de Mathmatiques
Bâtiment 425, 91405 Orsay Cedex, France

Dans [D-I], le thorÈme de dgnrescence de Hodge et le thorÈme d'annulation de Kodaira-Akizuki-Nakano pour les varits projectives lisses sur un corps de caractristique nulle sont dmontrs par des mthodes de gomtrie algbrique de caractristique $p > 0$. Les prsentes notes se veulent une introduction È ce texte, È l'intention du non spcialiste (qui pourra consulter aussi l'expos d'Oesterl [O]). Nous ne supposerons donc connus du lecteur que quelques rudiments de la thorie des schmas (EGA I 1-4, [H2] II 2-3). Par contre, nous demanderons de lui une certaine familiarit avec l'algÈbre homologique. Les rsultats de [D-I] s'expriment simplement dans le langage des catgories drives. Bien qu'il soit possible d'y viter le recours, voir par exemple [E-V], nous avons prfr nous placer dans ce cadre, qui nous paraßt plus naturel. Toutefois, pour aider le dbutant, nous rappelons au n° 4 les dfinitions de base et quelques points essentiels.

Sommaire

0. Introduction

Soit $\mathfrak{X}$ une variété analytique complexe. Par le lemme de Poincaré, le complexe de De Rham $\Omega^\bullet_{\mathfrak{X}}$ des formes holomorphes sur $\mathfrak{X}$ est une résolution du faisceau constant $\mathbb{C}$. L'augmentation $\mathbb{C} \longrightarrow \Omega^\bullet_{\mathcal{X}}$ définit donc, pour tout n, un isomorphisme

$$H^n(\mathcal{X}, \mathbb{C}) \xrightarrow{\sim} H^n_{\mathrm{DR}}(\mathcal{X}) = H^n(\mathcal{X}, \Omega^\bullet_{\mathcal{X}}), \tag{0.1}$$

où le second membre, appelé *cohomologie de De Rham* de $\mathcal{X}$ (en degré n), est le n-ième groupe d'hypercohomologie de $\mathcal{X}$ à valeurs dans $\Omega^\bullet_{\mathcal{X}}$. La cohomologie de De Rham de $\mathcal{X}$ est l'aboutissement de la première suite spectrale d'hypercohomologie

$$E_1^{p\,q} = H^q(\mathcal{X}, \Omega^p_{\mathcal{X}}) \Longrightarrow H^{p+q}_{\mathrm{DR}}(\mathcal{X}), \tag{0.2}$$

dite *suite spectrale de Hodge vers De Rham* (ou *de Hodge-Frølicher*) (cf. [De] n° 9). Supposons $\mathcal{X}$ *compacte*. Alors, par le théorème de finitude de Cartan-Serre, les $H^q(\mathcal{X}, \Omega^p_{\mathcal{X}})$, et donc tous les termes de la suite spectrale (0.2) sont des $\mathbb{C}$-espaces vectoriels de dimension finie. Si l'on pose

$$b_n = \dim H^n_{\mathrm{DR}}(\mathcal{X}) = \dim H^n(\mathcal{X}, \mathbb{C})$$

(n-ième nombre de Betti de $\mathcal{X}$) et

$$h^{p\,q} = \dim H^q(\mathcal{X}, \Omega^p_{\mathcal{X}})$$

(nombre de Hodge), on a donc

$$b_n \leqslant \sum_{p+q=n} h^{p\,q}, \tag{0.3}$$

avec égalité pour tout n si et seulement si (0.2) dégénère en E_1. Supposons de plus $\mathcal{X}$ *kahlérienne*. Alors, par la *théorie de Hodge*, la suite spectrale de Hodge de $\mathcal{X}$ dégénère en E_1 : c'est le *théorème de dégénérescence de Hodge* ([De] 9.9). Notons

$$0 = F^{n+1} \subset F^n \subset \cdots \subset F^p = F^p H^n_{\mathrm{DR}}(\mathcal{X}) \subset \cdots \subset F^0 = H^n_{\mathrm{DR}}(\mathcal{X})$$

la filtration aboutissement de la suite spectrale de Hodge (*filtration de Hodge*) ; par la dégénérescence, on a donc un isomorphisme canonique

$$E_1^{p\,q} = H^q(\mathcal{X}, \Omega^p_{\mathcal{X}}) \simeq E_\infty^{p\,q} = F^p/F^{p+1}. \tag{0.4}$$

Posons

$$H^{p\,q} = F^p \cap \overline{F}^q,$$

où la barre désigne la conjugaison complexe sur $H^n_{\mathrm{DR}}(\mathcal{X})$, définie au moyen de (0.1) et de l'isomorphisme $H^n(\mathcal{X}, \mathbb{C}) \simeq H^n(\mathcal{X}, \mathbb{R}) \otimes \mathbb{C}$; on a donc

$$H^{p\,q} = \overline{H}^{q\,p}.$$

La théorie de Hodge fournit en outre les résultats suivants ([De] 9.10) :

(a) l'homomorphisme composé

$$H^{p\,q} \hookrightarrow F^p H^{p+q}_{\mathrm{DR}}(\mathcal{X}) \twoheadrightarrow F^p/F^{p+1}$$

est un isomorphisme (i.e. $H^{p\,q}$ est un supplémentaire de F^{p+1} dans F^p) ; d'où, par composition avec (0.4), un isomorphisme

$$H^{p\,q} \simeq H^q(\mathcal{X}, \Omega^p_{\mathcal{X}}) \ ; \tag{0.5}$$

(b) on a, pour tout n,

$$H^n_{\mathrm{DR}}(\mathcal{X}) = \bigoplus_{p+q=n} H^{p\,q}, \tag{0.6}$$

(*décomposition de Hodge*). Ces résultats s'appliquent notamment à la variété analytique complexe $\mathcal{X}$ associée à un schéma projectif lisse X sur $\mathbb{C}$. A la différence de (a) et (b), qui sont de nature transcendante, faisant intervenir de manière essentielle la conjugaison complexe, la dégénérescence de Hodge peut, dans ce cas, se formuler de manière purement algébrique. Le complexe de De Rham de $\mathcal{X}$ est en effet le complexe de faisceaux analytiques associé au complexe de De Rham algébrique $\Omega^\bullet_X$ de X sur $\mathbb{C}$ (un complexe de faisceaux pour la topologie de Zariski, dont les composantes sont des faisceaux cohérents localement libres). Le morphisme canonique (d'espaces annelés) $\mathcal{X} \longrightarrow X$ induit des homomorphismes sur les cohomologies de Hodge et de De Rham

$$H^q(X, \Omega^p_X) \longrightarrow H^q(\mathcal{X}, \Omega^p_{\mathcal{X}}), \tag{0.7}$$

$$H^n_{\mathrm{DR}}(X) \longrightarrow H^n_{\mathrm{DR}}(\mathcal{X}), \tag{0.8}$$

où $H^n_{\mathrm{DR}}(X) = H^n(X, \Omega^\bullet_X)$. On dispose en fait d'une suite spectrale de Hodge vers De Rham algébrique

$$E_1^{p\,q} = H^q(X, \Omega^p_X) \Longrightarrow H^{p+q}_{\mathrm{DR}}(X), \tag{0.9}$$

et d'un morphisme de (0.9) dans (0.2) induisant (0.7) et (0.8) respectivement sur les termes initiaux et l'aboutissement. Par le théorème de comparaison de Serre [GAGA], (0.7) est un isomorphisme. Il en est donc de même de (0.8). Par suite, la dégénérescence en E_1 de (0.2) équivaut à celle de (0.9), en d'autres termes, si l'on pose

$$h^{p\,q}(X) = \dim H^q(X, \Omega^p_X), \qquad h^n(X) = \dim H^n_{\mathrm{DR}}(X),$$

le théorème de dégénérescence de Hodge pour $\mathcal{X}$ s'exprime par les relations (purement algébriques)

$$h^n(X) = \sum_{p+q=n} h^{p\,q}(X). \tag{0.10}$$

Plus généralement, si X est un schéma propre et lisse sur un corps k, on peut considérer le complexe de De Rham $\Omega^\bullet_{X/k}$ de X sur k, et l'on dispose encore d'une suite spectrale de Hodge vers De Rham

$$E_1^{p\,q} = H^q(X, \Omega^p_{X/k}) \Longrightarrow H^{p+q}_{\mathrm{DR}}(X/k) \tag{0.11}$$

(où $H^n_{\mathrm{DR}}(X/k) = H^n(X, \Omega^\bullet_{X/k})$), formée de k-espaces vectoriels de dimension finie. Si k est de caractéristique nulle, le théorème de dégénérescence de Hodge entraîne la dégénérescence de (0.11) en E_1 : des techniques standard (cf. n° 6) permettent en effet de se ramener d'abord à $k = \mathbb{C}$, puis à l'aide du lemme de Chow et de la résolution des singularités on réduit le cas propre au cas projectif ([D0]). On a longtemps cherché une démonstration purement algébrique de la dégénérescence de (0.11) en E_1 pour k de caractéristique nulle. Faltings [Fa1] fut le premier à en donner une preuve indépendante de la théorie de Hodge[1]. Une simplification de techniques cristallines dues à Ogus [Og1], Fontaine-Messing [F-M] et Kato [Ka1] conduisit, peu de temps après, à la démonstration élémentaire présentée dans [D-I]. Nous renvoyons à l'introduction de [D-I] et à [O] pour un aperçu de ses grandes lignes. Indiquons seulement que la dégénérescence de (0.11) (pour k de caractéristique nulle) se prouve par réduction au cas où k est de caractéristique > 0, où, pourtant, il peut arriver que la dégénérescence soit en défaut ! Celle-ci vaut cependant moyennant certaines hypothèses supplémentaires sur X (majoration de la dimension, relevabilité), qui suffisent (voir 5.6 pour un énoncé précis). Nous expliquons au n° 6 la technique bien connue permettant de remonter de la caractéristique > 0 à la caractéristique nulle. Le théorème de dégénérescence en caractéristique > 0 auquel nous venons de faire allusion résulte lui-même d'un théorème de décomposition (5.1), reposant sur des propriétés classiques du calcul différentiel en caractéristique > 0 (endomorphisme de Frobenius et isomorphisme de Cartier), que nous rappelons au n° 3, après avoir résumé, aux n° 1 et 2, le formalisme des différentielles et de la lissité sur les schémas. Le théorème de décomposition précédent fournit en même temps une démonstration algébrique du théorème d'annulation de Kodaira-Akizuki-Nakano pour les variétés projectives lisses sur un corps de caractéristique nulle (6.10 et [De] 11.7). Les deux derniers numéros sont de nature plus technique : nous esquissons l'évolution du sujet depuis la parution de [D-I], et, en appendice, donnons quelques compléments relatifs à des résultats de Mehta-Srinivas [Me-Sr] et Nakkajima [Na].

1. Schmas : diffrentielles, complexe de De Rham

[1] Les dmonstrations des thorÈmes de comparaison p-adiques dans [Fa1] et [Fa2] ont une lacune concernant le lemme de presque puret, que Faltings a comble dans [Fa3]. Voir [Fo] pour une mise È jour, utilisant la thorie de P. Scholze des espaces perfectoïdes. Noter aussi que la preuve de la dgnrescence de (0.11) qui en rsulte n'est pas entiÈrement algbrique, car elle utilise le thorÈme d'Artin-Grothendieck de comparaison entre cohomologie tale et cohomologie de Betti pour les varits propres et lisses sur $\mathbb{C}$.

Nous rappelons ici les définitions et propriétés de base du calcul différentiel sur les schémas. Le lecteur trouvera un exposé complet dans (EGA IV 16.1-16.6) ; voir aussi [B-L-R] 2.1 et [H2] II 8 pour une introduction.

1.1. On dit qu'un morphisme de schémas $i : T_0 \longrightarrow T$ est un *épaississement d'ordre* 1 (ou, par abus, que T est un épaississement d'ordre 1 de T_0) si i est une immersion fermée définie par un idéal de $\mathcal{O}_T$ de carré nul. Si T et T_0 sont affines, d'anneaux A et A_0, un tel morphisme correspond à un homomorphisme surjectif $A \longrightarrow A_0$ dont le noyau est un idéal de carré nul. Les schémas T et T_0 ont même espace sous-jacent, et l'idéal $\mathfrak{a}$ de i, annulé par $\mathfrak{a}$, est un $\mathcal{O}_{T_0}$ ($= \mathcal{O}_T/\mathfrak{a}$)-module quasi-cohérent.

Soit $j : X \longrightarrow Z$ une immersion, d'idéal I (par définition, j est un isomorphisme de X sur un sous-schéma fermé $j(X)$ d'un plus grand ouvert U de Z, et I est le faisceau quasi-cohérent d'idéaux de U définissant $j(X)$ dans U, (EGA I 4.1, 4.2)). Soit Z_1 le sous-schéma[2] de Z, de même espace sous-jacent que X, défini par l'idéal I^2. Alors j se factorise (de manière unique) en

$$X \xrightarrow{j_1} Z_1 \xrightarrow{h_1} Z$$

où h_1 est une immersion, et j_1 est un épaississement d'ordre 1, d'idéal I/I^2 ; on dit que (j_1, h_1), ou plus simplement Z_1 , est le *premier voisinage infinitésimal* de j (ou de X dans Z). L'idéal I/I^2 (qui est un $\mathcal{O}_X$-module quasi-cohérent) s'appelle le *faisceau conormal* de j (ou de X dans Z). On le note $\mathcal{N}_{X/Z}$.

1.2. Soit $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme de schémas. Soit $\Delta : X \longrightarrow Z := X \times_Y X$ le morphisme diagonal. C'est une immersion (*fermée* si et seulement si X est *séparé sur* Y) (EGA I 5.3). Le faisceau conormal de Δ s'appelle faisceau des 1-*différentielles de Kahler* de f (ou de X sur Y) et se note $\Omega^1_{X/Y}$; on écrit parfois $\Omega^1_{X/A}$ au lieu de $\Omega^1_{X/Y}$ si Y est affine d'anneau A. C'est donc un $\mathcal{O}_X$-module quasi-cohérent, défini par

$$\Omega^1_{X/Y} = I/I^2, \tag{1.2.1}$$

où I est l'idéal de Δ. Soit $X \xrightarrow{\Delta_1} Z_1 \longrightarrow Z$ le premier voisinage infinitésimal de Δ. Les deux projections de $Z = X \times_Y X$ sur X induisent, par composition avec $Z_1 \longrightarrow Z$, deux Y-morphismes $p_1, p_2 : Z_1 \longrightarrow X$, qui rétractent Δ_1. Le faisceau d'anneaux du schéma Z_1, qui a même espace sous-jacent que X, s'appelle *faisceau des parties principales d'ordre* 1 de X sur Y, et se note $\mathcal{P}^1_{X/Y}$. On a par construction une suite exacte de faisceaux abéliens

$$0 \longrightarrow \Omega^1_{X/Y} \longrightarrow \mathcal{P}^1_{X/Y} \longrightarrow \mathcal{O}_X \longrightarrow 0, \tag{1.2.2}$$

[2] On se permettra l'abus de confondre "immersion" (resp. "immersion ferme") et "sous-schma" (resp. "sous-schma ferm") ; cela revient ici à ngliger l'isomorphisme de X sur $j(X)$.

scindée par chacun des homomorphismes d'anneaux $j_1, j_2 : \mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{P}^1_{X/Y}$ déduits de p_1, p_2. La différence $j_2 - j_1$ est un homomorphisme de faisceaux abéliens de $\mathcal{O}_X$ dans $\Omega^1_{X/Y}$, qu'on appelle *différentielle*, et qu'on note

$$(1.2.3) \qquad d_{X/Y} \quad (\text{ou } d) : \quad \mathcal{O}_X \longrightarrow \Omega^1_{X/Y}.$$

Si M est un $\mathcal{O}_X$-module, on appelle *Y-dérivation* de $\mathcal{O}_X$ dans M tout homomorphisme de faisceaux de $f^{-1}(\mathcal{O}_Y)$-modules $D : \mathcal{O}_X \longrightarrow M$ (où f^{-1} désigne le foncteur image inverse pour les faisceaux abéliens) tel que

$$D(ab) = aDb + bDa$$

pour toutes sections locales a, b de $\mathcal{O}_X$. On note $\mathrm{Der}_Y(\mathcal{O}_X, M)$ l'ensemble des Y-dérivations de $\mathcal{O}_X$ dans M, qui est de manière naturelle un groupe abélien. La différentielle $d_{X/Y}$ est une Y-dérivation de $\mathcal{O}_X$ dans $\Omega^1_{X/Y}$. On montre qu'elle est *universelle*, dans le sens que pour toute Y-dérivation D de $\mathcal{O}_X$ dans un $\mathcal{O}_X$-module M (non nécessairement quasi-cohérent), il existe un unique homomorphisme de $\mathcal{O}_X$-modules $u : \Omega^1_{X/Y} \longrightarrow M$ tel que $u \circ d_{X/Y} = D$, i.e. l'homomorphisme

$$(1.2.4) \qquad \mathrm{Hom}(\Omega^1_{X/Y}, M) \longrightarrow \mathrm{Der}_Y(\mathcal{O}_X, M), \qquad u \longmapsto u \circ d_{X/Y}$$

est un isomorphisme. Le faisceau $\mathcal{H}om(\Omega^1_{X/Y}, \mathcal{O}_X)$ s'appelle *faisceau tangent* de f (ou de X sur Y), et se note

$$(1.2.5) \qquad T_{X/Y}$$

(ou parfois $\Theta_{X/Y}$). Pour tout ouvert U de X, (1.2.4) donne un isomorphisme $\Gamma(U, T_{X/Y}) \simeq \mathrm{Der}_Y(\mathcal{O}_U, \mathcal{O}_U)$. Rappelons qu'on appelle *Y-point* de X un Y-morphisme $T \longrightarrow X$. Par définition, $X \times_Y X$ "paramètre" l'ensemble des couples de Y-points de X (i.e. représente le foncteur correspondant sur la catégorie des Y-schémas). La signification géométrique du premier voisinage infinitésimal Z_1 de la diagonale de X sur Y est qu'*il paramètre les couples de Y-points de X voisins d'ordre* 1 (i.e. congrus modulo un idéal de carré nul) : plus précisément, si $i : T_0 \longrightarrow T$ est un épaississement d'ordre 1, d'idéal $\mathfrak{a}$, où T est un Y-schéma, et si $t_1, t_2 : T \longrightarrow X$ sont deux Y-points de X qui coıncident modulo $\mathfrak{a}$ (i.e. tels que $t_1 i = t_2 i = t_0 : T_0 \longrightarrow X$), alors il existe un unique Y-morphisme $h : T \longrightarrow Z_1$ tel que $p_1 h = t_1$ et $p_2 h = t_2$; de plus, si $t_1^*, t_2^* : \mathcal{O}_X \longrightarrow t_{0*}\mathcal{O}_T$ [3] sont les homomorphismes de faisceaux d'anneaux associés à t_1 et t_2, $t_2^* - t_1^*$ est une Y-dérivation de X à valeurs dans $t_{0*}\mathfrak{a}$, telle que

$$(1.2.6) \qquad (t_2^* - t_1^*)(s) = h^*(ds)$$

pour toute section locale s de $\mathcal{O}_X$, où $h^* : \Omega^1_{X/Y} \longrightarrow t_0^*\mathfrak{a}$ est l'homomophisme de $\mathcal{O}_X$-modules induit par h (sur les faisceaux conormaux correspondants, de X

[3] rappelons que T et T_0 ont même espace sous-jacent

dans Z_1 et T_0 dans T). Si f est un morphisme de schémas affines, correspondant à un homomorphisme d'anneaux $A \longrightarrow B$, alors $Z = \operatorname{Spec} B \otimes_A B, \Delta$ correspond à l'homomorphisme d'anneaux envoyant $b_1 \otimes b_2$ sur $b_1 b_2$, de noyau $J = \Gamma(Z, I)$. On a $\Gamma(X, \mathcal{P}^1_{X/Y}) = (B \otimes_A B)/J^2$, et l'on pose

$$\Gamma(X, \Omega^1_{X/Y}) = \Omega^1_{B/A}. \tag{1.2.7}$$

Le B-module $\Omega^1_{B/A} = J/J^2$, dont le faisceau quasi-cohérent associé est $\Omega^1_{X/Y}$, s'appelle *module des 1-différentielles de Kahler* de B sur A. L'application $d = d_{B/A} = \Gamma(X, d_{X/Y}) : B \longrightarrow \Omega^1_{B/A}$ est une A-dérivation, vérifiant une propriété universelle qu'on laisse au lecteur le soin de formuler. Les homomorphismes $j_1, j_2 : B \longrightarrow (B \otimes_A B)/J^2$ de 1.1 sont donnés par $j_1 b =$ classe de $b \otimes 1$, $j_2 b =$ classe de $1 \otimes b$. Comme J est engendré par les $1 \otimes b - b \otimes 1$, $\Omega^1_{B/A}$ est engendré, comme B-module, par l'image de d. Il en résulte que si f est un morphisme de schémas quelconques, $\Omega^1_{X/Y}$ est engendré, comme $\mathcal{O}_X$-module, par l'image de d.

1.3. Tout carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{g} & X \\ f' \downarrow & & \downarrow f \\ Y' & \xrightarrow{h} & Y \end{array} \tag{1.3.1}$$

définit de façon naturelle un homomorphisme de $\mathcal{O}_{X'}$-modules

$$g^* \Omega^1_{X/Y} \longrightarrow \Omega^1_{X'/Y'}, \tag{1.3.2}$$

dit canonique, envoyant $1 \otimes g^{-1}(d_{X/Y} s)$ sur $d_{X'/Y'}(1 \otimes g^{-1}(s))$ (si E est un $\mathcal{O}_X$-module, par définition $g^* E = \mathcal{O}_{X'} \otimes_{g^{-1}(\mathcal{O}_X)} g^{-1}(E)$). C'est un *isomorphisme* si le carré (1.3.1) est *cartésien*, i.e. si le morphisme $X' \longrightarrow Y' \times_Y X$ est un isomorphisme. En outre, dans ce cas, l'homomorphisme canonique

$$f'^* \Omega^1_{Y'/Y} \oplus g^* \Omega^1_{X/Y} \longrightarrow \Omega^1_{X'/Y} \tag{1.3.3}$$

est un isomorphisme.

1.4. Soient

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} S$$

des morphismes de schémas. Alors la suite d'homorphismes canoniques

$$f^* \Omega^1_{Y/S} \longrightarrow \Omega^1_{X/S} \longrightarrow \Omega^1_{X/Y} \longrightarrow 0 \tag{1.4.1}$$

est exacte.

1.5. Soit

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{i} & Z \\ f\downarrow & \swarrow g & \\ Y & & \end{array}$$

un triangle commutatif, où i est une immersion, d'idéal I. La différentielle $d_{Z/Y}$ induit un homomorphisme $d : \mathcal{N}_{X/Z} \longrightarrow i^*\Omega^1_{Z/Y}$, et la suite

(1.5.1) $$\mathcal{N}_{X/Z} \longrightarrow i^*\Omega^1_{Z/Y} \longrightarrow \Omega^1_{X/Y} \longrightarrow 0$$

est exacte.

1.6. Soit $X = \mathbb{A}^n_Y = Y[T_1, \ldots, T_n]$ l'espace affine de dimension n sur Y. Le $\mathcal{O}_X$-module $\Omega^1_{X/Y}$ est libre, de base les dT_i ($1 \leqslant i \leqslant n$). Si Y est affine, d'anneau A, et si $s \in A[T_1, \ldots, T_n]$, $ds = \sum(\partial s/\partial T_i)dT_i$, où les $\partial s/\partial T_i$ sont les dérivées partielles usuelles.

Les propriétés 1.3 à 1.6, dont la vérification est du reste triviale, sont fondamentales. C'est grâce à elles qu'on peut "calculer" les modules de différentielles. Pour plus de détails, voir les références indiquées supra.

1.7. Soit $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme de schémas. Pour $i \in \mathbb{N}$, on note

$$\Omega^i_{X/Y} = \Lambda^i\Omega^1_{X/Y}$$

la i-ième puissance extérieure du $\mathcal{O}_X$-module $\Omega^1_{X/Y}$ (on convient que $\Omega^0_{X/Y} = \mathcal{O}_X$). On montre qu'il existe une unique famille d'applications $d : \Omega^i_{X/Y} \longrightarrow \Omega^{i+1}_{X/Y}$ vérifiant les conditions suivantes :

(a) d est une Y-anti-dérivation de l'algèbre extérieure $\bigoplus \Omega^i_{X/Y}$, i.e. d est $f^{-1}(\mathcal{O}_Y)$-linéaire et $d(ab) = da \wedge b + (-1)^i a \wedge db$ pour a homogène de degré i,

(b) $d^2 = 0$,

(c) $da = d_{X/Y}(a)$ pour a de degré zéro.

Le complexe correspondant se nomme *complexe de De Rham* de X sur Y et se note

(1.7.1) $$\Omega^\bullet_{X/Y}$$

(ou $\Omega^\bullet_{X/A}$ si Y est affine d'anneau A). Il dépend fonctoriellement de f : un carré (1.3.1) donne un homomorphisme de complexes (qui est aussi un homomorphisme d'algèbres)

(1.7.2) $$\Omega^\bullet_{X/Y} \longrightarrow g_*\Omega^\bullet_{X'/Y'}.$$

Prendre garde cependant que, s'il est vrai que, pour chaque i, l'homomorphisme $\Omega^i_{X/Y} \longrightarrow g_*\Omega^i_{X'/Y'}$ est adjoint d'un homomorphisme $g^*\Omega^i_{X/Y} \longrightarrow \Omega^i_{X'/Y'}$, on ne peut en général définir un *complexe* $g^*\Omega^\bullet_{X/Y}$ dont la différentielle soit une Y'-anti-dérivation compatible à celle de $\Omega^\bullet_{X'/Y'}$.

2. Lissit et relÈvements

Il y a bien des façons d'exposer la théorie des morphismes lisses. Nous suivons (ou plutôt, résumons) ici la présentation des EGA, où la lissité est définie par l'existence locale de relèvements infinitésimaux (EGA IV 17). Outre son élégance, cette définition a l'avantage de se transposer à d'autres contextes, par exemple celui de la géométrie logarithmique (cf. [I6]). D'autres points de vue sont adoptés dans (SGA 1 II et III), où l'accent est mis sur la notion de morphisme étale, et [B-L-R] 2.2, où c'est le critère jacobien (cf. 2.8) qui est pris comme point de départ.

2.1. Soit $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme de schémas. On dit que f est *localement de type fini* (resp. *localement de présentation finie*) si, pour tout point x de X, il existe un voisinage ouvert affine U de x et un voisinage ouvert affine V de $y = f(x)$ tels que $f(U) \subset V$ et que l'homomorphisme d'anneaux $A \longrightarrow B$ associé à $U \longrightarrow V$ fasse de B une A-algèbre de type fini (i.e. quotient d'une algèbre de polynômes $A[t_1, \ldots, t_n]$) (resp. de présentation finie (i.e. quotient d'une algèbre de polynômes $A[t_1, \ldots, t_n]$ par un idéal de type fini)). Si Y est localement noethérien, "localement de type fini" équivaut à "localement de présentation finie", et s'il en est ainsi, X est alors localement noethérien.

Si $f : X \longrightarrow Y$ est localement de type fini (resp. de présentation finie), le $\mathcal{O}_X$-module $\Omega^1_{X/Y}$ est de type fini (resp. de présentation finie).

2.2. Soit $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme de schémas. On dit que f est *lisse* (resp. *net* (ou *non ramifié*), resp. *étale*) si f est localement de présentation finie et si la condition suivante est vérifiée :

Pour tout diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} & & & & X \\ & & g_0 & & \big\downarrow f \\ T_0 & \xrightarrow{i} & T & \longrightarrow & Y \end{array} \tag{2.2.1}$$

où i est un épaississement d'ordre 1 (1.1), il existe, localement pour la topologie de Zariski sur T, un (resp. au plus un, resp. un unique) Y-morphisme $g : T \longrightarrow X$ tel que $gi = g_0$. Il résulte aussitôt de la définition que le composé de deux morphismes lisses (resp. nets, resp. étales) est lisse (resp. net, resp. étale), et que si $f : X \longrightarrow Y$ est lisse (resp. net, resp. étale), il en est de même du morphisme $f' : X' \longrightarrow Y'$ déduit par un changement de base $Y' \longrightarrow Y$. Si pour $i = 1, 2$, $f_i : X_i \longrightarrow Y$ est lisse (resp. net, resp. étale), le produit fibré $f = f_1 \times_Y f_2 : X_1 \times_Y X_2 \longrightarrow Y$ est donc lisse (resp. net, resp. étale). Il est immédiat d'autre part que la projection de la droite affine $\mathbb{A}^1_Y = Y[t] \longrightarrow Y$ est lisse, et il en est donc de même de la projection de l'espace affine $\mathbb{A}^n_Y \longrightarrow Y$.

Remarques 2.3. (a) A cause de l'unicité, qui permet un recollement, on peut, dans la définition d'*étale* omettre *localement pour la topologie de Zariski*. Par contre, on ne peut le faire dans la définition de *lisse* : il existe une obstruction cohomologique, qu'on précisera plus loin, à l'existence d'un prolongement global g de g_0.

(b) Si n est un entier $\geqslant 1$, on dit qu'un morphisme de schémas $i : T_0 \longrightarrow T$ est un *épaississement d'ordre* n si i est une immersion fermée définie par un idéal I tel que $I^{n+1} = 0$. Si T_m désigne le sous-schéma fermé de T défini par I^{m+1}, i se factorise en une suite d'épaississements d'ordre 1 :

$$T_0 \longrightarrow T_1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow T_m \longrightarrow T_{m+1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow T_n.$$

Dans la définition 2.2, on peut donc remplacer *épaississement d'ordre* 1 par *épaississement d'ordre* n.

La proposition suivante résume les propriétés différentielles essentielles des morphismes lisses (resp. nets, resp. étales).

Proposition 2.4. (a) *si* $f : X \longrightarrow Y$ *est lisse* (*resp. net*), *le* $\mathcal{O}_X$*-module* $\Omega^1_{X/Y}$ *est localement libre de type fini* (*resp. nul*).

(b) *Dans la situation de* 1.4, *si* f *est lisse, la suite* (1.4.1) *prolongée par un zéro à gauche*

$$0 \longrightarrow f^*\Omega^1_{Y/S} \longrightarrow \Omega^1_{X/S} \longrightarrow \Omega^1_{X/Y} \longrightarrow 0 \tag{2.4.1}$$

est exacte et localement scindée. En particulier, si f *est étale, l'homomorphisme canonique* $f^*\Omega^1_{Y/S} \longrightarrow \Omega^1_{X/S}$ *est un isomorphisme.*

(c) *Dans la situation de* 1.5, *si* f *est lisse, la suite* (1.5.1) *prolongée par un zéro à gauche*

$$0 \longrightarrow \mathcal{N}_{X/Z} \longrightarrow i^*\Omega^1_{Z/Y} \longrightarrow \Omega^1_{X/Y} \longrightarrow 0 \tag{2.4.2}$$

est exacte et localement scindée. En particulier, si f *est étale, l'homomorphisme canonique* $\mathcal{N}_{X/Z} \longrightarrow i^*\Omega^1_{Z/Y}$ *est un isomorphisme.*

2.5. La vérification de 2.4 n'est pas difficile (EGA IV 17.2.3), mais malheureusement quelque peu éparpillée dans (EGA 0_{IV} 20). En voici une esquisse.

L'ingrédient clé est le suivant. Si $f : X \longrightarrow Y$ est un morphisme de schémas et I un $\mathcal{O}_X$-module quasi-cohérent, on appelle Y*-extension de* X *par* I un Y-morphisme $i : X \longrightarrow X'$ qui est un épaississement d'ordre 1 d'idéal I. Deux Y-extensions $i_1 : X \longrightarrow X_1$ et $i_2 : X \longrightarrow X_2$ de X par I sont dites *équivalentes* s'il existe un Y-isomorphisme g de X_1 sur X_2 tel que $gi_1 = i_2$ et que g induise l'identité sur I. Une construction analogue à celle de la "somme de Baer" pour les extensions de modules sur un anneau munit l'ensemble

$$\mathrm{Ext}_Y(X, I)$$

des classes d'équivalence de Y-extensions de X par I d'une structure de groupe abélien, d'élément neutre l'extension triviale définie par l'algèbre des nombres duaux $\mathcal{O}_X \oplus I$.

L'assertion (c) découle immédiatement de la définition : la lissité de f implique en effet que le premier voisinage infinitésimal i_1 de i se rétracte localement sur X, et le choix d'une rétraction r permet de scinder (2.4.2) (par la dérivation associée à $\mathrm{Id}_{Z_1} - i_1 \circ r$, cf. (1.2.6)).

Supposons f lisse. Si I est un $\mathcal{O}_X$-module quasi-cohérent et $i : X \longrightarrow Z$ est une Y-extension de X par I, la suite (2.4.2) est donc une extension de $\mathcal{O}_X$-modules $e(i)$ de $\Omega^1_{X/Y}$ par I. On vérifie que $i \longmapsto e(i)$ donne un isomorphisme

$$\mathrm{Ext}_Y(X, I) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_X}(\Omega^1_{X/Y}, I) \tag{2.5.1}$$

(cf. [I1] I, chap. II, 1.1.9 : on définit un inverse de (2.5.1) en associant à une extension M de $\Omega^1_{X/Y}$ par I la Y-extension Z de X définie de la manière suivante : identifions, grâce à j_1, le faisceau des parties principales $\mathcal{P}^1_{X/Y}$(1.2.2) à l'anneau des nombres duaux $\mathcal{O}_X \oplus \Omega^1_{X/Y}$, et notons $F = \mathcal{O}_X \oplus M$ l'anneau des nombres duaux sur M ; l'extension M fait de F une $f^{-1}(\mathcal{O}_Y)$-extension de $\mathcal{P}^1_{X/Y}$ par I ; soit $E = F \times_{\mathcal{P}^1_{X/Y}} \mathcal{O}_X$ le "pull-back" de F par l'homomorphisme $j_2 = j_1 + d_{X/Y} : \mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{P}^1_{X/Y}$; E est une $f^{-1}(\mathcal{O}_Y)$-extension de $\mathcal{O}_X$ par I, qui définit la Y-extension Z). Comme f est lisse, toute Y-extension de X par I est localement triviale, et donc, grâce à (2.5.1), il en résulte que le faisceau $\underline{\mathrm{Ext}}^1_{\mathcal{O}_X}(\Omega^1_{X/Y}, I)$ (associé au préfaisceau $U \longmapsto \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_U}(\Omega^1_{U/Y}, I_{|U})$) est nul, et donc aussi que $\underline{\mathrm{Ext}}^1_{\mathcal{O}_U}(\Omega^1_{U/Y}, J) = 0$ pour tout ouvert U de X et tout $\mathcal{O}_U$-module quasi-cohérent J. Comme $\Omega^1_{X/Y}$ est de type fini (2.1), il s'ensuit que $\Omega^1_{X/Y}$ est localement libre de type fini, ce qui prouve la partie de (a) relative au cas lisse (la partie relative au cas net est immédiate : pour tout Y-schéma X, si $i : X \longrightarrow Z$ est la Y-extension triviale de X par un $\mathcal{O}_X$-module quasi-cohérent I, l'ensemble des Y-rétractions de Z sur X s'identifie à $\mathrm{Hom}(\Omega^1_{X/Y}, I)$ par $r \longmapsto r - r_0$, où r_0 correspond à l'injection naturelle de $\mathcal{O}_X$ dans $\mathcal{O}_X \oplus I$, cf. (1.2.6)). Il résulte notamment de (a) et (2.5.1) que, si X est un schéma affine et est lisse sur Y, on a $\mathrm{Ext}_Y(X, I) = 0$ pour tout $\mathcal{O}_X$-module quasi-cohérent I. On en déduit finalement (b), en utilisant, pour X, Y, S affines, et f quelconque, la suite exacte naturelle (EGA 0_{IV} 20.2.3)

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow \mathrm{Der}_Y(\mathcal{O}_X, I) \longrightarrow \mathrm{Der}_S(\mathcal{O}_X, I) \longrightarrow \mathrm{Der}_S(\mathcal{O}_Y, f_*I) \longrightarrow \\ \xrightarrow{\partial} \mathrm{Ext}_Y(X, I) \longrightarrow \mathrm{Ext}_S(X, I) \longrightarrow \mathrm{Ext}_S(Y, f_*I), \end{aligned} \tag{2.5.2}$$

où les flèches autres que ∂ sont les flèches de fonctorialité évidentes, et ∂ associe à une S-dérivation $D : \mathcal{O}_Y \longrightarrow f_*I$ la Y-extension définie par l'anneau des nombres duaux $\mathcal{O}_X \oplus I$ et l'homomorphisme $a \longmapsto f^*a + Da$ de $\mathcal{O}_Y$ dans $f_*(\mathcal{O}_X \oplus I)$.

Observons que si $f : X \longrightarrow Y$ est un morphisme localement de présentation finie de schémas affines (i.e. correspondant à un homomorphisme d'anneaux

$A \longrightarrow B$ faisant de B une A-algèbre de présentation finie), alors, pour que f soit lisse, il faut et il suffit que, pour tout $\mathcal{O}_X$-module quasi-cohérent I, on ait $\mathrm{Ext}_Y(X, I) = 0$ (la suffisance découle de la définition, et la nécessité a déjà été notée plus haut).

Les assertions 2.4 (b) et (c) ont des réciproques, qui fournissent des critères de lissité très commodes. Leur vérification est facile à partir des considérations précédentes.

Proposition 2.6. (a) *Dans la situation de* 1.4, *supposons* gf *lisse. Alors, si la suite* (2.4.1) *est exacte et localement scindée,* f *est lisse. Si l'homomorphisme canonique* $f^*\Omega^1_{Y/S} \longrightarrow \Omega^1_{X/S}$ *est un isomorphisme,* f *est étale.*

(b) *Dans la situation de* 1.5, *supposons* g *lisse. Alors, si la suite* (2.4.2) *est exacte et localement scindée,* f *est lisse. Si l'homomorphisme canonique* $\mathcal{N}_{X/Z} \longrightarrow i^*\Omega^1_{Z/Y}$ *est un isomorphisme,* f *est étale.*

2.7. Soit $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme lisse, et soit x un point de X, notons $k(x)$ le corps résiduel de l'anneau local $\mathcal{O}_{X,x}$. Soient $s_1, \ldots, s_n$ des sections de $\mathcal{O}_X$ au voisinage de x dont les différentielles forment une base de $\Omega^1_{X/Y}$ en x, i.e., au choix, telles que les images $(ds_i)_x$ des ds_i dans $\Omega^1_{X/Y,x}$ forment une base de ce module sur $\mathcal{O}_{X,x}$, ou telles que les images $(ds_i)(x)$ des ds_i dans $\Omega^1_{X/Y} \otimes k(x)$ forment une base de cet espace vectoriel sur $k(x)$. Comme $\Omega^1_{X/Y}$ est localement libre de type fini, il existe un voisinage ouvert U de x tel que les s_i soient définies sur U et que les ds_i forment une base de $\Omega^1_{X/Y\,|U}$. Les s_i définissent alors un Y-morphisme de U dans l'espace affine de dimension n sur Y :

$$s = (s_1, \ldots, s_n) : U \longrightarrow \mathbb{A}^n_Y = Y[t_1, \ldots, t_n].$$

D'après 1.6 et 2.6 (a), s est *étale*. On dit que les s_i forment un *système de coordonnées locales* de X sur Y au-dessus de U (ou, si U n'est pas précisé, en x). Un morphisme lisse est donc localement composé d'un morphisme étale et de la projection d'un espace affine standard.

2.8. Plaçons-nous dans la situation de 1.5, en supposant g lisse, et soit x un point de X. D'après 2.4 (c) et 2.6 (b), pour que f soit lisse au voisinage de x, il faut et il suffit qu'il existe des sections $s_1, \ldots, s_r$ de I au voisinage de x, engendrant I_x et telles que les $(ds_i)(x)$ soient linéairement indépendants dans $\Omega^1_{Z/Y}(x) = \Omega^1_{Z/Y} \otimes k(x)$ (où $k(x)$ est le corps résiduel de $\mathcal{O}_{Z,x}$, qui est aussi celui de $\mathcal{O}_{X,x}$). Pour cette raison, 2.6 (b) porte le nom de *critère jacobien*.

Supposons f lisse au voisinage de x (ou en x, comme on dit parfois), et soient $s_1, \ldots, s_r$ des sections de I engendrant I au voisinage de x. Alors, pour que les s_i définissent un système *minimal* de générateurs de I_x (i.e. induisent une base de $I \otimes k(x) = I_x/\mathfrak{m}_x I_x$, ou encore forment une base de $I/I^2 = \mathcal{N}_{X/Z}$ dans un voisinage de x), il faut et il suffit que les $(ds_i)(x)$ soient linéairement indépendants dans $\Omega^1_{Z/Y}(x)$[4]. Lorsqu'il en est ainsi, si l'on complète les s_i par des sections s_j $(r+1 \leqslant j \leqslant r+n)$ de $\mathcal{O}_Z$ au voisinage de x telles que les $(ds_i)(x)$ $(1 \leqslant i \leqslant r+n)$ forment une base de $\Omega^1_{Z/Y}(x)$, alors les s_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ définissent un Y-morphisme étale s d'un voisinage ouvert U de x dans Z dans l'espace affine $\mathbb{A}^{n+r}_Y$, tel que $U \cap X$ soit l'image inverse du sous-espace linéaire d'équations $t_1 = \cdots = t_r = 0$:

$$\begin{array}{ccc} U \cap X & \longrightarrow & U \\ \downarrow & & \downarrow f \\ \mathbb{A}^n_Y & \longrightarrow & \mathbb{A}^{n+r}_Y. \end{array}$$

En géométrie algébrique, cet énoncé joue le rôle d'un *théorème des fonctions implicites*.

2.9. Soit k un corps et soit $f : X \longrightarrow Y = \operatorname{Spec} k$ un morphisme. Supposons f lisse ; alors X est *régulier* (i.e. pour tout point x de X, l'anneau local $\mathcal{O}_{X,x}$ est régulier, i.e. son idéal maximal $\mathfrak{m}_x$ peut être engendré par une suite régulière de paramètres) ; de plus, si x est un point *fermé*, $k(x)$ est une extension *finie séparable* de k, et la dimension de $\mathcal{O}_{X,x}$ est égale à la dimension $\dim_x X$ de la composante irréductible de X contenant x et au rang de $\Omega^1_{X/Y}$ en x. Inversement, si k est parfait, et si X est régulier, f est lisse.

Plus généralement, on a le critère suivant, de vérification facile à partir de 2.7 et 2.8 :

Proposition 2.10. *Soit $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme localement de présentation finie* (2.1). *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *f est lisse ;*

(ii) *f est plat et les fibres géométriques de f sont des schémas réguliers.*

(On dit que f est *plat* si, pour tout point x de X, $\mathcal{O}_{X,x}$ est un module plat sur $\mathcal{O}_{Y,f(x)}$. Une *fibre géométrique* de f est le schéma déduit d'une fibre $X_y = X \times_Y \operatorname{Spec} k(y)$ de f en un point y par une extension des scalaires à une clôture algébrique de $k(y)$.) Si $f : X \longrightarrow Y$ est lisse, et x est un point de X, l'entier

$$\dim_x(f) := \dim_{k(x)} \Omega^1_{X/Y} \otimes k(x) = \operatorname{rg}_{\mathcal{O}_{X,x}} \Omega^1_{X/Y,x}$$

s'appelle *dimension relative* de f en x. Par la théorie classique de la dimension (EGA IV 17.10.2), c'est la dimension de la composante irréductible de la fibre $X_{f(x)}$ contenant x. Comme $\Omega^1_{X/Y}$ est localement libre de type fini, c'est une fonction localement constante de x. Elle est nulle si et seulement si f est étale, en d'autres termes, f est étale si et seulement si f est localement de présentation finie, plat et net (c'est ce critère qui est pris comme définition d'un morphisme étale dans (SGA 1 I)).

---

[4] ou encore que la suite (s_i) soit $\mathcal{O}_Z$*-rguliÈre* en x, i.e. que le complexe de Koszul correspondant soit une rsolution de $\mathcal{O}_X$ au voisinage de x (cf. (SGA 6 VII 1.4) et (EGA IV 17.12.1)).

Si f est lisse et *purement de dimension relative* r, i.e. de dimension relative constante égale à l'entier r, alors le complexe de De Rham $\Omega^\bullet_{X/Y}$ (1.7.1) est nul en degré $> r$, et $\Omega^i_{X/Y}$ est localement libre de rang $\binom{r}{i}$; en particulier, $\Omega^r_{X/Y}$ est un $\mathcal{O}_X$-module inversible.

Les morphismes lisses donnent lieu à une excellente théorie de déformations infinitésimales. Les deux propositions qui suivent la résument. Elles sont toutefois de nature plus technique que les énoncés précédents, et comme elles ne serviront que dans la démonstration de 5.1, nous conseillons au lecteur de ne s'y reporter qu'à ce moment-là.

Proposition 2.11. *Soit un diagramme* (2.2.1), *avec f lisse. Soit I l'idéal de i.*

(a) *Il existe une obstruction*

$$c(g_0) \in \operatorname{Ext}^1(g_0^*\Omega^1_{X/Y}, I)$$

dont l'annulation est nécessaire et suffisante à l'existence d'un Y-morphisme (global) $g : T \longrightarrow X$ prolongeant g_0 (i.e. tel que $gi = g_0$).

(b) *Si $c(g_0) = 0$, l'ensemble des prolongements g de g_0 est un espace affine sous* $\operatorname{Hom}(g_0^*\Omega^1_{X/Y}, I)$.

Comme $\Omega^1_{X/Y}$ est localement libre de type fini, on a un isomorphisme canonique

$$\operatorname{Ext}^1(g_0^*\Omega^1_{X/Y}, I) \simeq H^1(T_0, \mathcal{H}om(g_0^*\Omega^1_{X/Y}, I)) \tag{2.11.1}$$

(et $\mathcal{H}om(g_0^*\Omega^1_{X/Y}, I) \simeq g_0^*T_{X/Y} \otimes I$, où $T_{X/Y}$ est le faisceau tangent (1.2.5)). Posons $G = \mathcal{H}om(g_0^*\Omega^1_{X/Y}, I)$. D'après (1.2.6), si U est un ouvert de T de trace U_0 sur T_0, deux prolongements de $g_{0|U_0}$ à U “diffèrent” par une section de G sur U_0 (et un prolongement étant donné, on peut le modifier en lui “ajoutant” une section de G). Comme g_0 se prolonge localement par définition de la lissité de f, on en conclut que le faisceau P sur T_0 associant à U_0 l'ensemble des prolongements de $g_0|U_0$ à U est un *torseur* sous G. Les assertions (a) et (b) en résultent : $c(g_0)$ est la classe de ce torseur. Plus concrètement, si $(U_i)_{i\in E}$ est un recouvrement ouvert de T et g_i un prolongement de g_0 sur U_i, alors, sur $U_i \cap U_j$, $g_i - g_j$ est une Y-dérivation D_{ij} de $\mathcal{O}_X$ à valeurs dans $g_{0\,*}(I_{|U_i\cap U_j})$, i.e. un homomorphisme de $\Omega^1_{X/Y}$ dans $g_{0\,*}(I_{|U_i\cap U_j})$, i.e. finalement une section de G sur $U_i \cap U_j$, et les (g_{ij}) forment un cocycle, dont la classe est $c(g_0)$.

Noter que si T (ou ce qui revient au même T_0) est affine, alors

$$H^1(T_0, \mathcal{H}om(g_0^*\Omega^1_{X/Y}, I)) = 0,$$

et par suite g_0 admet un prolongement global à T.

Proposition 2.12. *Soient $i : Y_0 \longrightarrow Y$ un épaississement d'ordre* 1 *d'idéal I, et $f_0 : X_0 \longrightarrow Y_0$ un morphisme lisse.*

(a) *Il existe une obstruction*

$$\omega(f_0) \in \mathrm{Ext}^2(\Omega^1_{X_0/Y_0}, f_0^*I)$$

dont l'annulation est nécessaire et suffisante à l'existence d'un relèvement lisse de X_0 sur Y, i.e. par définition, d'un Y-schéma lisse X muni d'un Y_0-isomorphisme $Y_0 \times_Y X \simeq X_0$ [5].

(b) *Si $\omega(f_0) = 0$, l'ensemble des classes d'isomorphie de relèvements de X_0 sur Y est un espace affine sous* $\mathrm{Ext}^1(\Omega^1_{X_0/Y_0}, f_0^*I)$ *(où par définition, si X_1 et X_2 sont des relèvements de X_0, un isomorphisme de X_1 sur X_2 est un Y-isomorphisme de X_1 sur X_2 induisant l'identité sur X_0).*

(c) *Si X est un relèvement de X_0 sur Y, le groupe des automorphismes de X (i.e. des Y-automorphismes de X induisant l'identité sur X_0) s'identifie naturellement à* $\mathrm{Hom}(\Omega^1_{X_0/Y_0}, f_0^*I)$.

Comme $\Omega^1_{X_0/Y_0}$ est localement libre de type fini, on a, pour tout $i \in \mathbb{Z}$, un isomorphisme canonique

$$\mathrm{Ext}^i(\Omega^1_{X_0/Y_0}, f_0^*I) \simeq H^i(X_0, \mathcal{H}om(\Omega^1_{X_0/Y_0}, f_0^*I)) \tag{2.12.1}$$

(et $\mathcal{H}om(\Omega^1_{X_0/Y_0}, f_0^*I) \simeq T_{X_0/Y_0} \otimes f_0^*I$). Si X_0 est affine, le second membre de (2.12.1) est nul pour $i \geqslant 1$, et par suite il existe un relèvement de X_0 sur Y, et deux tels relèvements sont isomorphes.

2.13. Voici une esquisse de démonstration de 2.12. La donnée d'un relèvement X équivaut à celle d'un carré cartésien

$$\begin{array}{ccc} X_0 & \xrightarrow{j} & X \\ {\scriptstyle f_0}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ Y_0 & \xrightarrow{i} & Y, \end{array}$$

avec f lisse. Soit J l'idéal de l'épaississement j. La platitude de f (2.10) implique que l'homomorphisme $f_0^*I \longrightarrow J$ déduit de ce carré est un isomorphisme (il est d'ailleurs facile de vérifier qu'inversement, si X est une Y-extension de X_0 par J telle que l'homomorphisme correspondant $f_0^*I \longrightarrow J$ soit un isomorphisme, alors X est automatiquement un relèvement de X_0). L'assertion (c) est donc cas particulier de 2.11 (b), l'identification consistant à associer à un automorphisme u de X la “dérivation” $u - \mathrm{Id}_X$. De même, si X_1 et X_2 sont deux relèvements de X_0, 2.11 (a) entraîne que X_1 et X_2 sont isomorphes si X_0 est affine, et que l'ensemble des isomorphismes de X_1 sur X_2 est alors un espace affine sous $\mathrm{Hom}(\Omega^1_{X_0/Y_0}, f_0^*I)$.

---

[5] Dans la suite, quand nous parlerons de *relÈvement* d'un Y_0-schma lisse, il sera sous-entendu, sauf mention du contraire, qu'il s'agit d'un relÈvement *lisse*.

Les assertions (a) et (b) en découlent formellement. La vérification de (b) est analogue à celle de 2.11 : si X_1 et X_2 sont deux relèvements de X_0, la “différence” de leurs classes d'isomorphie est la classe du torseur sous $\mathcal{H}om(\Omega^1_{X_0/Y_0}, f_0^*I)$ des isomorphismes locaux de X_1 sur X_2 (on peut aussi observer que les classes des Y-extensions X_1 et X_2 de X_0 par f_0^*I diffèrent par une unique Y_0-extension de X_0 par f_0^*I et invoquer (2.5.1)). Enfin, indiquons rapidement la construction de l'obstruction $\omega(f_0)$, en supposant pour simplifier X_0 séparé. Tout d'abord, par le critère jacobien (2.8), l'existence d'un relèvement global est assurée dans le cas où X_0 et Y_0 sont affines, et f_0 associé à un homomorphisme d'anneaux $A_0 \longrightarrow B_0$, où B_0 est quotient d'une A_0-algèbre de polynômes $A_0[t_1, \dots, t_n]$ par l'idéal engendré par une suite d'éléments $(g_1, \dots, g_r)$ telle que les dg_i soient linéairement indépendants en tout point x de X_0 (relever arbitrairement les g_i). Comme (toujours d'après (2.8)) f_0 est localement de la forme précédente, on peut choisir un recouvrement ouvert affine $\mathcal{U} = ((U_i)_0)_{i\in E}$ de X_0, et pour chaque i, un relèvement U_i de $(U_i)_0$ sur Y. Comme X_0 a été supposé séparé, chaque intersection $(U_{ij})_0 = (U_i)_0 \cap (U_j)_0$ est affine, et par suite, on peut choisir un isomorphisme de relèvements u_{ij} de $U_{i|(U_{ij})_0}$ sur $U_{j|(U_{ij})_0}$. Sur une intersection triple $(U_{ijk})_0 = (U_i)_0 \cap (U_j)_0 \cap (U_k)_0$, l'automorphisme $u_{ijk} = u_{ki}^{-1}u_{jk}u_{ij}$ de $U_{i|(U_{ijk})_0}$ diffère de l'identité par une section

$$c_{ijk} = u^*_{ijk} - \mathrm{Id}$$

du faisceau $\mathcal{H}om(\Omega^1_{X_0/Y_0}, f_0^*I)$. On vérifie que (c_{ijk}) est un 2-cocycle de $\mathcal{U}$ à valeurs dans $\mathcal{H}om(\Omega^1_{X_0/Y_0}, f_0^*I)$, que la classe de ce cocycle dans

$$H^2(X_0, \mathcal{H}om(\Omega^1_{X_0/Y_0}, f_0^*I))$$

ne dépend pas des choix, et qu'elle s'annule si et seulement si l'on peut, sur un recouvrement plus fin, modifier les u_{ij} de manière à ce qu'ils se recollent sur les intersections triples, et définissent ainsi un relèvement global X de X_0. C'est l'obstruction annoncée.

Remarque 2.14. La théorie des *gerbes* [Gi] et celle du *complexe cotangent* [I1] permettent, l'une et l'autre, de se débarrasser de l'hypothèse de séparation faite plus haut, et surtout, de donner une démonstration plus conceptuelle de 2.12.

3. Frobenius et isomorphisme de Cartier

Les références générales pour ce numéro sont (SGA 5 XV 1) pour les définitions et propriétés de base des morphismes de Frobenius absolus et relatifs, et [K1] 7 pour l'isomorphisme de Cartier (cf. aussi [I2] 0 2 et [D-I] 1).

Dans ce numéro, p désigne un nombre premier fixé.

3.1. On dit qu'un schéma X est *de caractéristique* p si $p\mathcal{O}_X = 0$, i.e. si le morphisme $X \longrightarrow \operatorname{Spec}\mathbb{Z}$ se factorise (nécessairement de manière unique) à travers

$\operatorname{Spec} \mathbb{F}_p$. Si X est un schéma de caractéristique p, on appelle *endomorphisme de Frobenius absolu* de X (ou, simplement endomorphisme de Frobenius, s'il n'y a pas de confusion à craindre) l'endomorphisme de X qui est l'identité sur l'espace sous-jacent à X et l'élévation à la puissance p-ième sur $\mathcal{O}_X$. On le note F_X. Si X est affine d'anneau A, F_X correspond à l'endomorphisme de Frobenius F_A de $A, a \longmapsto a^p$. Soit $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme de schémas. On a alors un carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{F_X} & X \\ f\downarrow & & \downarrow f \\ Y & \xrightarrow{F_Y} & Y. \end{array} \tag{3.1.1}$$

Notons $X^{(p)}$ (ou X', s'il n'y a pas d'ambiguïté) le schéma $(Y, F_Y) \times_Y X$ déduit de X par le changement de base F_Y. Le morphisme F_X définit un unique Y-morphisme $F = F_{X/Y} : X \longrightarrow X'$, donnant lieu à un diagramme commutatif

$$\begin{array}{cccccc} X & \xrightarrow{F} & X' & \longrightarrow & X \\ & f\searrow & \downarrow & & \downarrow f \\ & & Y & \xrightarrow{F_Y} & Y, \end{array} \tag{3.1.2}$$

où le composé supérieur est F_X et le carré est cartésien. On dit que F est le *Frobenius relatif* de X sur Y. Les morphismes de la ligne supérieure induisent des homéomorphismes sur les espaces sous-jacents (F_Y est un "homéomorphisme universel", i.e un homéomorphisme et le reste après tout changement de base). Si Y est affine d'anneau A, et X est l'espace affine $\mathbb{A}^n_Y = \operatorname{Spec} B$, où $B = A[t_1, \ldots, t_n]$, alors $X' = \mathbb{A}^n_Y$[6], et les morphismes $F : X \longrightarrow X'$ et $X' \longrightarrow X$ correspondent respectivement aux homomorphismes $t_i \longmapsto t_i^p$ et $at_i \longmapsto a^p t_i$ $(a \in A)$.

Proposition 3.2. *Soient Y un schéma de caractéristique p, et $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme lisse, purement de dimension relative n* (2.10)*. Alors le Frobenius relatif $F : X \longrightarrow X'$ est un morphisme fini et plat, et la $\mathcal{O}_{X'}$-algèbre $F_*\mathcal{O}_X$ est localement libre de rang p^n. En particulier, si f est étale, F est un isomorphisme, i.e. le carré* (3.1.1) *est cartésien.*

On traite d'abord le cas où $n = 0$, qui demande un peu d'algèbre commutative : le point est que F est étale, car, d'après 2.6 (a), un Y-morphisme entre Y-schémas étales est automatiquement étale, et qu'un morphisme qui est à la fois étale et radiciel[7] est une immersion ouverte ((SGA 1 I 5.1) ou (EGA IV 17.9.1)).

---

[6] Il n'est pas vrai en gnral que X et X' soient isomorphes en tant que Y-schmas, c'est le cas ici exceptionnellement.

[7] Un morphisme $g : T \longrightarrow S$ est dit radiciel si g est injectif et, pour tout point t de T, d'image s dans S, l'extension rsiduelle $k(s) \longrightarrow k(t)$ est radicielle.

Ensuite, le cas où X est l'espace affine $\mathbb{A}^n_Y$ est immédiat : les monômes $\prod t_i^{m_i}$, avec $0 \leqslant m_i < p-1$ forment une base de $F_*\mathcal{O}_X$ sur $\mathcal{O}_{X'}$. Le cas général s'en déduit grâce à 2.7.

Remarques 3.3. (a) Comme, d'après 2.10, $\Omega^i_{X/Y}$ est localement libre sur $\mathcal{O}_X$ de rang $\binom{n}{i}$, il résulte de 3.2 que $F_*\Omega^i_{X/Y}$ est localement libre sur $\mathcal{O}_{X'}$ de rang $p^n\binom{n}{i}$.

(b) L'énoncé 3.2 relatif à $n = 0$ admet une réciproque : si Y est de caractéristique p et si X est un Y-schéma tel que le Frobenius relatif $F_{X/Y}$ soit un isomorphisme, alors X est étale sur Y (SGA 5 XV 1 Prop. 2). Quand Y est le spectre d'un corps, c'est le "critère de Mac Lane".

3.4. Soient Y un schéma de caractéristique p et $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme. Posons $d = d_{X/Y}$(1.2.3). Si s est une section locale de $\mathcal{O}_X$, on a $d(s^p) = ps^{p-1}ds = 0$. Comme $d(s^p) = F_X^*(ds) = F^*(1 \otimes ds)$, il s'ensuit que

(a) les homomorphismes canoniques (1.3.2) associés à (F_X, F_Y) et F,

$$F_X^*\Omega^1_{X/Y} \longrightarrow \Omega^1_{X/Y}, \qquad F^*\Omega^1_{X'/Y} \longrightarrow \Omega^1_{X/Y}$$

sont nuls ;

(b) la différentielle du complexe $F_*\Omega^\bullet_{X/Y}$ est $\mathcal{O}_{X'}$-linéaire ; en particulier, les faisceaux de cycles Z^i, de bords B^i et de cohomologie $\mathcal{H}^i = Z^i/B^i$ du complexe $F_*\Omega^\bullet_{X/Y}$ sont des $\mathcal{O}_{X'}$-modules, et le produit extérieur fait du $\mathcal{O}_{X'}$-module gradué $\bigoplus Z^iF_*\Omega^\bullet_{X/Y}$ (resp. $\bigoplus \mathcal{H}^iF_*\Omega^\bullet_{X/Y}$) une algèbre graduée anti-commutative.

Ces faits sont à la source des miracles du calcul différentiel de caractéristique p. Le résultat principal est le théorème suivant, dû à Cartier [C] :

Théorème 3.5. *Soient Y un schéma de caractéristique p et $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme.*

(a) *Il existe un unique homomorphisme de $\mathcal{O}_{X'}$-algèbres graduées*

$$\gamma : \bigoplus \Omega^i_{X'/Y} \longrightarrow \bigoplus \mathcal{H}^iF_*\Omega^\bullet_{X/Y},$$

vérifiant les deux conditions suivantes :

(i) *pour $i = 0$, γ est donné par l'homomorphisme $F^* : \mathcal{O}_{X'} \longrightarrow F_*\mathcal{O}_X$;*

(ii) *pour $i = 1$, γ envoie $1 \otimes ds$ sur la classe de $s^{p-1}ds$ dans $\mathcal{H}^1F_*\Omega^\bullet_{X/Y}$ (où $1 \otimes ds$ désigne l'image de la section ds de $\Omega^1_{X/Y}$ dans $\Omega^1_{X'/Y}$.*

(b) *Si f est lisse, γ est un isomorphisme.*

Dans le cas (b), γ s'appelle l'*isomorphisme de Cartier*, et se note C^{-1}. Son inverse, ou le composé

$$\bigoplus Z^iF_*\Omega^\bullet_{X/Y} \longrightarrow \bigoplus \Omega^i_{X'/Y}$$

de son inverse avec la projection de $\bigoplus Z^i$ sur $\bigoplus \mathcal{H}^i$, où Z^i désigne le faisceau des cycles de $F_*\Omega^\bullet_{X/Y}$ en degré i, se note C : c'est ce dernier homomorphisme qui a été initialement défini par Cartier, et qu'on appelle parfois *l'opération de Cartier*. La présentation adoptée dans 3.5 est due à Grothendieck (notes manuscrites), et détaillée dans [K1] 7.

Quand Y est un schéma parfait, i.e. tel que F_Y soit un automorphisme, par exemple si Y est le spectre d'un corps parfait, l'un des cas les plus importants pour les applications, alors si f est lisse, C^{-1} donne par composition avec l'isomorphisme

$$\bigoplus \Omega^i_{X/Y} \longrightarrow \bigoplus (F_Y)_{X\,*}\Omega^i_{X'/Y}$$

(où $(F_Y)_X : X' \longrightarrow X$ est l'isomorphisme déduit de F_Y par changement de base) un isomorphisme

$$C^{-1}_{\mathrm{abs}} : \bigoplus \Omega^i_{X/Y} \longrightarrow \bigoplus \mathcal{H}^i F_{X\,*}\Omega^\bullet_{X/Y}$$

qu'on appelle *isomorphisme de Cartier absolu*.

Corollaire 3.6. *Soient Y un schéma de caractéristique p et $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme lisse. Alors, pour tout i, les faisceaux de $\mathcal{O}_{X'}$-modules $F_*\Omega^i_{X/Y}$, $Z^iF_*\Omega^\bullet_{X/Y}$, $B^iF_*\Omega^\bullet_{X/Y}$, $\mathcal{H}^iF_*\Omega^\bullet_{X/Y}$ sont localement libres de type fini (où Z^i resp. B^i désigne le faisceau de cycles resp. bords en degré i).*

Compte tenu de 3.3 (a) et de l'exactitude de F_*, il suffit d'appliquer 3.5 (b), en procédant par récurrence *descendante* sur i.

Indiquons rapidement la démonstration de 3.5, d'après [K1] 7. Pour (a), il revient au même, compte tenu de (1.3.2), de construire le composé de γ avec l'homomorphisme $\bigoplus \Omega^i_{X/Y} \longrightarrow \bigoplus (F_Y)_{X\,*}\Omega^i_{X'/Y}$, i.e. un homomorphisme de $\mathcal{O}_X$-algèbres graduées

$$\gamma_{\mathrm{abs}} : \bigoplus \Omega^i_{X/Y} \longrightarrow \bigoplus \mathcal{H}^i F_{X\,*}\Omega^\bullet_{X/Y}$$

vérifiant les conditions analogues à (i) et (ii), i.e. donné en degré zéro par F_X^*, et en degré 1 envoyant ds sur la classe de $s^{p-1}ds$. Or l'application de $\mathcal{O}_X$ dans $\mathcal{H}^1 F_{X\,*}\Omega^\bullet_{X/Y}$ envoyant une section locale s de $\mathcal{O}_X$ sur la classe de $s^{p-1}ds$ est une Y-dérivation (cela résulte de l'identité $p^{-1}((X+Y)^p - X^p - Y^p) = \sum_{0<i<p} p^{-1}\binom{p}{i}X^{p-i}Y^i$ dans $\mathbb{Z}[X,Y]$). Par (1.2.4), elle définit l'homomorphisme $(\gamma_{\mathrm{abs}})^1$ désiré. Comme l'algèbre extérieure $\bigoplus \Omega^i_{X/Y}$ est strictement anti-commutative ("strictement" voulant dire que les éléments de degré impair sont de carré nul), il en est de même de son sous-quotient $\bigoplus \mathcal{H}^i F_{X\,*}\Omega^\bullet_{X/Y}$, et par suite il existe un unique homomorphisme d'algèbres graduées γ_{abs} prolongeant les homomorphismes $(\gamma_{\mathrm{abs}})^0 = F_X^*$ et $(\gamma_{\mathrm{abs}})^1$. Pour (b), on peut supposer, d'après 2.7, que f se factorise en

$$X \xrightarrow{g} \mathbb{A}^n_Y \xrightarrow{h} Y,$$

où h est la projection canonique et g est *étale*. Le carré (3.1.1) relatif à g étant cartésien d'après 3.2, il en est de même du carré analogue avec les Frobenius relatifs à Y

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{F} & X' \\ g\downarrow & & \downarrow g' \\ Z & \xrightarrow{F} & Z', \end{array} \tag{3.6.1}$$

où l'on a posé $\mathbb{A}^n_Y = Z$ pour abréger. D'après 2.4 (b), l'homomorphisme $g^*\Omega^i_{Z/Y} \longrightarrow \Omega^i_{X/Y}$ est un isomorphisme. Le carré (3.6.1) étant cartésien et F fini, il fournit un isomorphisme de complexes de $\mathcal{O}_{X'}$-modules

$$g'^* F_*\Omega^\bullet_{Z/Y} \longrightarrow F_*\Omega^\bullet_{X/Y}. \tag{3.6.2}$$

Comme g' est étale, donc plat, l'homomorphisme

$$g'^* \mathcal{H}^i F_*\Omega^\bullet_{Z/Y} \longrightarrow \mathcal{H}^i F_*\Omega^\bullet_{X/Y} \tag{3.6.3}$$

déduit de (3.6.2) est un isomorphisme. Comme d'autre part $g'^*\Omega^i_{Z'/Y} \longrightarrow \Omega^i_{X'/Y}$ est un isomorphisme (g' étant étale), il s'ensuit (par fonctorialité de γ) qu'il suffit de prouver (b) pour Z. Par des arguments analogues (extension des scalaires et Kunneth) on se ramène facilement à $Y = \operatorname{Spec} \mathbb{F}_p$ et $n = 1$, i.e. $Z = \operatorname{Spec} \mathbb{F}_p[t]$. Alors $Z' = Z$, les monômes $1, t, \dots, t^{p-1}$ forment une base de $F_*\mathcal{O}_Z$ sur $\mathcal{O}_Z$, et comme la différentielle $d : F_*\mathcal{O}_Z \longrightarrow F_*\Omega^1_Z = (F_*\mathcal{O}_Z)dt$ envoie t^i sur $it^{i-1}dt$, on constate que $\mathcal{H}^0 F_*\Omega^\bullet_{Z/\mathbb{F}_p}$ (resp. $\mathcal{H}^1 F_*\Omega^\bullet_{Z/\mathbb{F}_p}$) est libre sur $\mathcal{O}_Z$ de base 1 (resp. $t^{p-1}dt$), et donc que γ est un isomorphisme.

3.7. Il existe un lien étroit entre isomorphisme de Cartier et relèvements de Frobenius. Il était connu de Cartier, et lui a servi de motivation pour sa construction. C'est lui qui est à l'origine des théorèmes de décomposition et de dégénérescence de [D-I], voir n° 5. Voici en quoi il consiste.

Soient $i : T_0 \longrightarrow T$ un épaississement d'ordre 1 et $g_0 : S_0 \longrightarrow T_0$ un morphisme plat. Par *relèvement* du T_0-schéma S_0 sur T on entend un T-schéma *plat* S muni d'un T_0-isomorphisme $T_0 \times_T S \simeq S_0$, i.e. un carré cartésien

$$\begin{array}{ccc} S_0 & \xrightarrow{j} & S \\ g_0\downarrow & & \downarrow g \\ T_0 & \xrightarrow{i} & T \end{array}$$

avec g plat. Si I (resp. J) est l'idéal de l' épaississement i (resp. j), la platitude de g implique que l'homomorphisme canonique $g_0^* I \longrightarrow J$ est un isomorphisme (cf. 2.13).

Prenons pour i l'épaississement $\operatorname{Spec} \mathbb{F}_p \longrightarrow \operatorname{Spec} \mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$, d'idéal engendré par p. Soit Y_0 un schéma de caractéristique p, et soit Y un relèvement de Y_0

sur $\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$. L'idéal de Y_0 dans Y est donc $p\mathcal{O}_Y$, et la platitude de Y sur $\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$ entraîne que la multiplication par p induit un isomorphisme

$$\boldsymbol{p} : \mathcal{O}_{Y_0} \xrightarrow{\sim} p\mathcal{O}_Y. \tag{3.7.1}$$

Soit maintenant $f_0 : X_0 \longrightarrow Y_0$ un morphisme *lisse* de $\mathbb{F}_p$-schémas. Notons

$$F_0 : X_0 \longrightarrow X_0'$$

le Frobenius de X_0 relatif à Y_0. Supposons donné un relèvement (lisse) X (resp. X') de X_0 (resp. X_0') sur Y et un Y-morphisme $F : X \longrightarrow X'$ relevant F_0, i.e. tel que le carré

$$\begin{array}{ccc} X_0 & \longrightarrow & X \\ {\scriptstyle F_0}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle F} \\ X_0' & \longrightarrow & X' \end{array}$$

commute. (On a vu qu'il existe des obstructions à l'existence de X, X', et F, cf. 2.11 et 2.12, et que ces objets, quand ils existent, ne sont pas uniques ; nous y reviendrons plus loin.)

Proposition 3.8. *Soient $f_0 : X_0 \longrightarrow Y_0$ et $F : X \longrightarrow X'$ donnés comme en* 3.7. *Alors :*

(a) *la multiplication par p induit un isomorphisme*

$$\boldsymbol{p} : \Omega^1_{X_0/Y_0} \xrightarrow{\sim} p\Omega^1_{X/Y}\ ;$$

(b) *l'image de l'homomorphisme canonique*

$$F^* : \Omega^1_{X'/Y} \longrightarrow F_*\Omega^1_{X/Y}$$

est contenue dans $pF_*\Omega^1_{X/Y}$;

(c) *Notons*

$$\varphi_F : \Omega^1_{X_0'/Y_0} \longrightarrow F_{0\,*}\Omega^1_{X_0/Y_0}$$

l'homomorphisme "déduit de F^* par division par p", i.e. l'unique homomorphisme rendant commutatif le carré

$$\begin{array}{ccc} \Omega^1_{X'/Y} & \xrightarrow{F^*} & p\,F_{0\,*}\Omega^1_{X/Y} \\ \downarrow & & \uparrow\boldsymbol{p} \\ \Omega^1_{X_0'/Y_0} & \longrightarrow & F_{0\,*}\Omega^1_{X_0/Y_0} \end{array}\ ;$$

alors l'image de φ_F est contenue dans le noyau de la différentielle du complexe de De Rham, i.e. dans le faisceau de cycles $Z^1F_{0\,*}\Omega^\bullet_{X_0/Y_0}$, et le composé de

φ_F avec la projection sur $\mathcal{H}^1 F_{0*}\Omega^\bullet_{X_0/Y_0}$ est l'isomorphisme de Cartier C^{-1} en degré 1 (*cf.* 3.5).

L'assertion (a) est triviale, (b) découle de 3.4 (a), et (c) est immédiat à partir de (a), (b) et la caractérisation de l'isomorphisme de Cartier : en effet, si a est une section locale de $\mathcal{O}_X$, de réduction a_0 modulo p, et a' relève dans $\mathcal{O}_{X'}$ l'image a'_0 de a_0 dans $\mathcal{O}_{X'_0}$, on a

$$F^*a' = a^p + pb$$

pour une section locale b de $\mathcal{O}_X$ (car la réduction modulo p de F^*a' est $F_0^*a'_0 = a_0^p$), et par suite

$$F^*(da') = pa^{p-1}da + pdb,$$

d'où

$$\varphi_F(da'_0) = a_0^{p-1}da_0 + db_0, \tag{3.8.1}$$

dont (c) résulte aussitôt.

3.9. Supposons – c'est, en pratique, l'un des cas les plus importants – que Y_0 soit le spectre d'un corps parfait k de caractéristique p. Alors le spectre Y de l'anneau $W_2(k)$ des vecteurs de Witt de longueur 2 sur k relève Y_0 sur $\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$ (c'est d'ailleurs, à isomorphisme près, l'unique relèvement (plat) de Y_0). Rappelons que $W_2(k)$ est l'ensemble des suites (a_1, a_2) d'éléments de k, muni de l'addition et de la multiplication données par

$$\begin{aligned}(a_1, a_2) + (b_1, b_2) &= (a_1 + b_1, S_2(a, b)),\\ (a_1, a_2)(b_1, b_2) &= (a_1b_1, P_2(a, b)),\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}S_2(a, b) &= a_2 + b_2 + p^{-1}(a_1^{p-1} + b_1^{p-1} - (a_1 + b_1)^p),\\ P_2(a, b) &= b_1^pa_2 + b_2a_1^p.\end{aligned}$$

L'homomorphisme $W_2(k) \longrightarrow k$ est donné par $(a_1, a_2) \longmapsto a_1$. Si $k = \mathbb{F}_p$, alors $W_2(k) \simeq \mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$, l'isomorphisme étant donné par $(a_1, a_2) \longmapsto \tau(a_1) + p\,\tau(a_2)$, où τ désigne la section multiplicative de $\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{F}_p$. (Pour un exposé d'ensemble de la théorie des vecteurs de Witt, voir [S] II 6, [D-G] V.)

Dans ce cas, si X_0 est un Y_0-schéma lisse (i.e. un k-schéma lisse), comme le Frobenius absolu de Y_0 est un automorphisme, relever X_0 sur $Y = \operatorname{Spec} W_2(k)$ équivaut à relever X'_0, et, d'après 2.12, l'obstruction à l'existence d'un tel relèvement se trouve dans $\operatorname{Ext}^2(\Omega^1_{X_0}, \mathcal{O}_{X_0}) \simeq H^2(X_0, T_{X_0})$ [8]. Si cette obstruction est nulle, on peut choisir un relèvement X' de X'_0 et un relèvement X de X_0, et alors l'obstruction à un relèvement $F : X \longrightarrow X'$ du Frobenius relatif F_0 se trouve

[8] On omet ici, pour abrger, $/Y_0$ de la notation des diffrentielles.

dans $\mathrm{Ext}^1(F_0^*\Omega^1_{X_0'}, \mathcal{O}_{X_0}) \simeq \mathrm{Ext}^1(\Omega^1_{X_0'}, F_{0*}\mathcal{O}_{X_0})$ (2.11)[9]. En tout cas, ces deux obstructions sont nulles localement, et même dès que X_0 est *affine*. Le choix d'un relèvement F fournit alors, d'après 3.8, une description relativement explicite de l'isomorphisme de Cartier en degré 1 (et donc en tout degré, par multiplicativité).

4. Catgories drives et suites spectrales

Il existe plusieurs textes de référence sur ce sujet, de divers niveaux. Le lecteur qui souhaiterait se mettre rapidement au courant pourra consulter [I3], qui peut servir d'introduction et contient une bibliographie étendue. Nous nous bornerons ici à rappeler quelques points fondamentaux dont nous ferons usage au numéro suivant.

4.1. Soit A une catégorie abélienne (en pratique, A sera la catégorie des $\mathcal{O}_X$-modules d'un schéma X). On désigne par $C(A)$ la catégorie des complexes de A, à différentielle de degré 1. On note $L^\bullet$ (ou L) un tel complexe

$$\cdots \longrightarrow L^i \xrightarrow{d} L^{i+1} \longrightarrow \cdots .$$

On dit que L est *à degrés bornés inférieurement* (resp. *supérieurement*, resp. *à degrés bornés*) si $L^i = 0$ pour i assez petit (resp. assez grand, resp. hors d'un intervalle borné de $\mathbb{Z}$). On note $Z^iL = \mathrm{Ker}\, d : L^i \longrightarrow L^{i+1}$, $B^iL = \mathrm{Im}\, d : L^{i-1} \longrightarrow L^i$, $H^iL = Z^iL/B^iL$ respectivement les objets de cycles, bords et cohomologie en degré i. Si A est la catégorie des $\mathcal{O}_X$-modules, on écrit $C(X)$ au lieu de $C(A)$, et souvent $\mathcal{H}^iL$ au lieu de H^iL pour un objet de $C(X)$ (afin d'indiquer qu'il s'agit du *faisceau* de cohomologie en degré i, et non du groupe de cohomologie global $H^i(X, L)$).

Pour $n \in \mathbb{Z}$, le *tronqué naïf* $L^{\leqslant n}$ (resp. $L^{\geqslant n}$) d'un complexe L est le quotient (resp. le sous-complexe) de L qui coïncide avec L en degré $\leqslant n$ (resp. $\geqslant n$) et est à composantes nulles ailleurs. Le *tronqué canonique* $\tau_{\leqslant n}L$ (resp. $\tau_{\geqslant n}L$) est le sous-complexe (resp. quotient) de L de composantes L^i pour $i < n$, Z^iL pour $i = n$ et 0 pour $i > n$ (resp. L^i pour $i > n$, L^i/B^iL pour $i = n$ et 0 pour $i < n$). On pose $\tau_{<n}L = \tau_{\leqslant n-1}L$. L'inclusion $\tau_{\leqslant n}L \hookrightarrow L$ induit un isomorphisme sur H^i pour $i \leqslant n$. La projection $L \twoheadrightarrow \tau_{\geqslant n}L$ induit un isomorphisme sur H^i pour $i \geqslant n$. Pour $n \in \mathbb{Z}$, le *translaté* $L[n]$ d'un complexe L est le complexe de composantes $L[n]^i = L^{n+i}$ et de différentielle $d_{L[n]} = (-1)^n d_L$. Un complexe L est dit *concentré en degré* r (resp. *dans l'intervalle* $[a, b]$) si $L^i = 0$ pour $i \neq r$ (resp. $i \notin [a, b]$). Un

[9] On peut montrer ([Me-Sr] Appendix) que l'obstruction à un choix de (X, X', F) tel que X' soit l'image inverse de X par l'automorphisme de Frobenius de $W_2(k)$ se trouve dans $\mathrm{Ext}^1(\Omega^1_{X_0'}, B^1F_*\Omega^\bullet_{X_0})$; plus prcisment, un tel triplet (X, X', F) existe si et seulement si la classe de l'extension

$$0 \longrightarrow B^1F_*\Omega^\bullet_{X_0} \longrightarrow Z^1F_*\Omega^\bullet_{X_0} \xrightarrow{C} \Omega^1_{X_0'} \longrightarrow 0$$

(cas particulier $i = 1$ de l'isomorphisme de Cartier 3.5) est nulle. Voir [Sr] pour une application à une autre dmonstration du thorème principal de [D-I].

objet E de A est souvent considéré comme complexe concentré en degré zéro. Le complexe $E[-n]$ est alors concentré en degré n, de composante E en ce degré.

Un homomorphisme de complexes $u : L \longrightarrow M$ est appelé un *quasi-isomorphisme* si $H^i u$ est un isomorphisme pour tout i. On dit qu'un complexe K est *acyclique* si $H^i K = 0$ pour tout i.

Si $u : L \longrightarrow M$ est un homomorphisme de complexes, le *cône* $N = C(u)$ de u est le complexe défini par $N^i = L^{i+1} \oplus M^i$, de différentielle $d(x, y) = (-d_L x, ux + d_M y)$. Pour que u soit un quasi-isomorphisme, il faut et il suffit que $C(u)$ soit acyclique.

4.2. Désignons par $K(A)$ la catégorie des complexes de A à homotopie près, i.e. la catégorie ayant mêmes objets que $C(A)$ mais dont l'ensemble des flèches de L dans M est l'ensemble des classes d'homotopie de morphismes de L dans M. La *catégorie dérivée* de A, notée $D(A)$, est la catégorie déduite de $K(A)$ en inversant formellement les (classes d'homotopie de) quasi-isomorphismes : les quasi-isomorphismes de $K(A)$ deviennent des isomorphismes dans $D(A)$ et $D(A)$ est universelle pour cette propriété. Quand A est la catégorie des $\mathcal{O}_X$-modules sur une espace annelé X, on écrit $D(X)$ au lieu de $D(A)$. Les catégories $K(A)$ et $D(A)$ sont des catégories additives, et l'on a des foncteurs additifs canoniques

$$C(A) \longrightarrow K(A) \longrightarrow D(A).$$

La catégorie $D(A)$ a *mêmes objets* que $C(A)$. Ses flèches se calculent "par fractions" à partir de celles de $K(A)$: une flèche $u : L \longrightarrow M$ de $D(A)$ est définie par un couple de flèches de $C(A)$ du type

$$L \xleftarrow{s} L' \xrightarrow{f} M \qquad \text{ou} \qquad L \xrightarrow{g} M' \xleftarrow{t} M,$$

où s et t sont des quasi-isomorphismes. Plus précisément, on montre que les classes d'homotopie de quasi-isomorphismes de source M (resp. but L) forment une catégorie filtrante[10] (resp. l'opposé d'une catégorie filtrante) et que l'on a

$$\mathrm{Hom}_{D(A)}(L, M) = \varinjlim_{t : M \to M'} \mathrm{Hom}_{K(A)}(L, M') = \varinjlim_{s : L' \to L} \mathrm{Hom}_{K(A)}(L', M)$$

où t (resp. s) parcourt la catégorie précédente (resp. son opposée). Si L, M sont des complexes, on pose, pour $i \in \mathbb{Z}$,

$$\mathrm{Ext}^i(L, M) = \mathrm{Hom}_{D(A)}(L, M[i]) = \mathrm{Hom}_{D(A)}(L[-i], M).$$

[10] Une catgorie I est dite *filtrante* si elle vrife les conditions (a) et (b) suivantes :
(a) pour tout couple de flEches $f, g : i \longrightarrow j$, il existe une flEche $h : j \longrightarrow k$ telle que $hf = hg$,
(b) quels que soient les objets i et j, il existe un objet k et des flEches $f : i \longrightarrow k$, $g : j \longrightarrow k$.

Les foncteurs H^i et les foncteurs de *troncation canonique* $\tau_{\leqslant i}$, $\tau_{\geqslant i}$ sur $C(A)$ se prolongent naturellement à $D(A)$. Par contre, il n'en est pas de même des foncteurs de troncation naïve.

4.3. On désigne par $D^+(A)$ (resp. $D^-(A)$, resp. $D^b(A)$) la sous-catégorie pleine de $D(A)$ formée des complexes L *cohomologiquement bornés inférieurement* (resp. *supérieurement*, resp. *bornés*), i.e. tels que $H^iL = 0$ pour i assez petit (resp. assez grand, resp. hors d'un intervalle borné). Si A possède suffisamment d'injectifs (i.e. si tout objet de A se plonge dans un injectif), par exemple si A est la catégorie des $\mathcal{O}_X$-modules sur un schéma X, alors tout objet de $D^+(A)$ est isomorphe à un complexe, à degrés bornés inférieurement, formé d'injectifs, et la catégorie $D^+(A)$ est équivalente à la sous-catégorie pleine de $K(A)$ formée de tels complexes.

4.4. Les catégories $K(A)$ et $D(A)$ ne sont pas abéliennes en général, mais possèdent une structure de *catégorie triangulée*, au sens de Verdier [V]. Cette structure est définie par la famille des *triangles distingués*. Un *triangle* est une suite de flèches $T = (L \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow L[1])$ de $K(A)$ (resp. $D(A)$). Un *morphisme* de T dans $T' = (L' \longrightarrow M' \longrightarrow N' \longrightarrow L'[1])$ est un triplet (u : $L \longrightarrow L'$, $v : M \longrightarrow M'$, $w : N \longrightarrow N'$) tel que les trois carrés formés avec u, v, w, $u[1]$ commutent. Un triangle est dit *distingué* s'il est isomorphe à un triangle de la forme

$$L \xrightarrow{u} M \xrightarrow{i} C(u) \xrightarrow{p} L[1],$$

où u est le cône d'un morphisme de complexes u, et i (resp. p) désigne l'inclusion (resp. l'*opposée* de la projection) évidente. Toute suite exacte courte de complexes $0 \longrightarrow E \xrightarrow{u} F \longrightarrow G \longrightarrow 0$ définit un triangle distingué de $D(A)$, au moyen du quasi-isomorphisme naturel $C(u) \longrightarrow G$, et tout triangle distingué de $D(A)$ est isomorphe à un triangle distingué de ce type.

Tout triangle distingué $T = (L \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow L[1])$ de $D(A)$ donne naissance à des suites exactes longues

$$\begin{gathered}\cdots \longrightarrow H^iL \longrightarrow H^iM \longrightarrow H^iN \xrightarrow{d} H^{i+1}L \longrightarrow \cdots, \\ \cdots \longrightarrow \operatorname{Ext}^i(E,L) \longrightarrow \operatorname{Ext}^i(E,M) \longrightarrow \operatorname{Ext}^i(E,N) \longrightarrow \operatorname{Ext}^{i+1}(E,L) \longrightarrow \cdots, \\ \cdots \longrightarrow \operatorname{Ext}^i(N,E) \longrightarrow \operatorname{Ext}^i(M,E) \longrightarrow \operatorname{Ext}^i(L,E) \longrightarrow \operatorname{Ext}^{i+1}(N,E) \longrightarrow \cdots,\end{gathered}$$

pour $E \in \operatorname{ob} D(A)$. Si le triangle T est associé à une suite exacte courte comme expliqué ci-dessus, l'opérateur d de la première de ces suites est l'opérateur bord usuel (c'est la raison de la convention de signe dans la définition de p).

4.5. Soient L un complexe de A et $i \in \mathbb{Z}$. Le quotient $\tau_{\leqslant i}L/\tau_{\leqslant i-1}L$ s'envoie quasi-isomorphiquement sur $H^iL[-i]$. On a donc un triangle distingué canonique de $D(A)$

$$\tau_{\leqslant i-1}L \longrightarrow \tau_{\leqslant i}L \longrightarrow H^iL[-i] \longrightarrow \tau_{\leqslant i-1}L[1].$$

On définit de même un triangle distingué canonique

$$H^{i-1}L[-i+1] \longrightarrow \tau_{\geqslant i-1}L \longrightarrow \tau_{\geqslant i}L \longrightarrow H^{i-1}L[-i+2].$$

Enfin,

$$\tau_{[i-1,i]}L := \tau_{\geqslant i-1}\tau_{\leqslant i}L = \tau_{\leqslant i}\tau_{\geqslant i-1}L = (0 \longrightarrow L^{i-1}/B^iL \longrightarrow Z^iL \longrightarrow 0)$$

définit un triangle distingué

$$H^{i-1}L[-i+1] \longrightarrow \tau_{[i-1,i]}L \longrightarrow H^iL[-i] \longrightarrow,$$

qui fournit un élément canonique

$$c_i \in \operatorname{Ext}^2(H^iL, H^{i-1}L). \tag{4.5.1}$$

Le triplet $(H^{i-1}L,\ H^iL,\ c_i)$ est un invariant de L dans $D(A)$. Il permet sa reconstruction à isomorphisme près si L est cohomologiquement concentré en degré $i-1$ et i. On peut montrer que les c_i réalisent universellement les différentielles d_2 des suites spectrales de foncteurs dérivés appliqués à L (cf. la thèse de Verdier[11], ou [D3]).

4.6. Soit L un objet de $D^b(A)$. On dit que L est *décomposable* si L est isomorphe, dans $D(A)$, à un complexe à différentielle nulle. Si L est décomposable, et si $u : L' \longrightarrow L$ est un isomorphisme de $D(A)$, avec L' à différentielle nulle, alors u induit des isomorphismes $L'^i \xrightarrow{\sim} H^iL$, en particulier L' est à degrés bornés et $L' = \bigoplus L'^i[-i]$ (dans $C(A)$) (4.1), donc

$$L \simeq \bigoplus H^iL[-i] \tag{4.6.1}$$

(dans $D(A)$). Inversement, si L vérifie (4.6.1), L est trivialement décomposable. Si L est décomposable, on appelle *décomposition* de L le choix d'un isomorphisme (4.6.1) *induisant l'identité* sur H^i pour tout i. Il existe une suite finie d'obstructions à la décomposabilité de L : les premières sont les classes c_i (4.5.1) ; si les c_i sont nulles, il y a des obstructions secondaires dans $\operatorname{Ext}^3(H^iL, H^{i-2}L)$, etc. D'autre part, si L est décomposable, L admet en général plusieurs décompositions.

Au numéro suivant, on s'intéressera surtout au cas où L est concentré en degrés 0 et 1 : $L = (L^0 \longrightarrow L^1)$. Dans ce cas :

(a) la classe $c_1 \in \operatorname{Ext}^2(H^1L, H^0L)$ est l'obstruction à la décomposabilité de L ;

(b) la donnée d'une décomposition de L équivaut à celle d'un morphisme $H^1L[-1] \longrightarrow L$ induisant l'identité sur H^1 ;

[11] qui devrait paraßtre prochainement dans *Astrisque*

(c) L'ensemble des décompositions de L est un espace affine sous $\mathrm{Ext}^1(H^1L, H^0L)$ ([D-I] 3.1).

4.7. Nous renvoyons par exemple à [H1], II pour la définition des foncteurs dérivés $\overset{L}{\otimes}$, $R\mathcal{H}om$ [12], $R\,\mathrm{Hom}$, Rf_*, Lf^*, $R\Gamma$ dans les catégories dérivées $D(X)$, où X est un schéma variable, et la description de certaines relations remarquables entre ces foncteurs. Rappelons seulement que ces foncteurs sont, par rapport à chaque argument, des foncteurs *exacts*, i.e. transforment triangles distingués en triangles distingués, et se "calculent" de la manière suivante :

(a) pour $E \in \mathrm{ob}\, D(X)$, $F \in \mathrm{ob}\, D^-(X)$, $E \overset{L}{\otimes} F \simeq E \otimes F'$ si $F \simeq F'$ dans $D(X)$, avec F' à degrés bornés supérieurement (4.1) et à composantes plates ; pour F donné, il existe un quasi-isomorphisme $F' \longrightarrow F$ avec F' du type précédent, les classes d'homotopie de tels quasi-isomorphismes forment d'ailleurs un système coinitial (dans la catégorie des classes de quasi-isomorphismes de but F, cf. 4.2) ;

(b) pour $E \in \mathrm{ob}\, D(X)$, $F \in \mathrm{ob}\, D^+(X)$, si $F \simeq F'$, avec F' à degrés bornés inférieurement et à composantes injectives, alors $R\mathcal{H}om(E, F) \simeq \mathcal{H}om^\bullet(E, F')$ et $R\,\mathrm{Hom}(E, F) \simeq \mathrm{Hom}^\bullet(E, F')$; pour F donné, il existe un quasi-isomorphisme $F \longrightarrow$ F' avec F' du type précédent (et les classes d'homotopie de tels quasi-isomorphismes forment un système cofinal) ;

(c) pour $f : X \longrightarrow Y$ et $E \in \mathrm{ob}\, D^+(X)$, si $E \simeq E'$, avec E' à degrés bornés inférieurement et à composantes flasques (par exemple, injectives), alors $Rf_*E \simeq f_*E'$ et $R\Gamma(X, E) \simeq \Gamma(X, E')$; on écrit simplement $H^i(X, E)$ au lieu de $H^iR\Gamma(X, E)$; on définit plus généralement, de la même façon, $Rf_* : D^+(X, f^{-1}(\mathcal{O}_Y)) \longrightarrow D^+(Y)$, où $D(X, f^{-1}(\mathcal{O}_Y))$ désigne la catégorie dérivée de la catégorie des complexes de $f^{-1}(\mathcal{O}_Y)$-modules (le complexe de de Rham $\Omega^\bullet_{X/Y}$ est un tel complexe) ;

(d) pour $f : X \longrightarrow Y$ et $F \in \mathrm{ob}\, D^-(Y)$, $Lf^*F \simeq f^*F'$ si $F \simeq F'$, avec F' à degrés bornés supérieurement et à composantes plates.

4.8. Les suites spectrales sont peut-être l'un des objets à la fois les plus effrayants et les plus utiles des mathématiques. Les catégories dérivées permettent parfois de s'en passer, mais elles restent indispensables. Il existe de nombreuses références, la plus ancienne ([C-E], XV) restant l'une des meilleures. Dans ces notes, nous nous intéresserons surtout à la *suite spectrale* dite *de Hodge vers De Rham*, dont nous allons rappeler la définition.

Soit $T : A \longrightarrow B$ un foncteur additif entre catégories abéliennes. Supposons que A possède suffisamment d'injectifs. Alors T admet un dérivé droit

$$RT : D^+(A) \longrightarrow D^+(B),$$

[12] Une erreur de signe s'est glisse dans la dfinition du complexe $\mathrm{Hom}^\bullet(L, M)$ dans [H1] p. 64 : pour $u \in \mathrm{Hom}(L^i, M^{i+n})$, il faut lire $du = d \circ u + (-1)^{n+1} u \circ d$.

qui se calcule par $RT(K) \simeq T(K')$ si $K \longrightarrow K'$ est un quasi-isomorphisme avec K' à degrés bornés inférieurement et à composantes injectives. Les objets de cohomologie $H^i \circ RT : D^+(A) \longrightarrow B$ sont notés R^iT. Pour $K \in \operatorname{ob} D(A)$, à degrés bornés inférieurement, on a une suite spectrale

$$E_1^{i\,j} = R^jT(K^i) \Longrightarrow R^*T(K), \tag{4.8.1}$$

dite *première suite spectrale d'hypercohomologie* de T. Elle s'obtient de la façon suivante : on choisit une résolution $K \longrightarrow L$ de K par un bicomplexe L, telle que chaque colonne $L^{i\,\bullet}$ soit une résolution injective de K^i ; si $\boldsymbol{s}L$ désigne le complexe simple associé, l'homomorphisme de complexes $K \longrightarrow \boldsymbol{s}L$ qui s'en déduit est un quasi-isomorphisme, donc $RT(K) \simeq T(\boldsymbol{s}L) = \boldsymbol{s}T(L)$, $RT(K^i) \simeq T(L^{i\,\bullet})$, et la filtration de $\boldsymbol{s}T(L)$ par le *premier* degré de L donne naissance à (4.8.1).

Soient k un corps et X un k-schéma. Le groupe (cf. (1.7.1) et 4.7 (c))

$$H^i_{\mathrm{DR}}(X/k) = H^i(X, \Omega^\bullet_{X/k}) = \Gamma(\operatorname{Spec} k, R^if_*(\Omega^\bullet_{X/k})) \tag{4.8.2}$$

(où $f : X \longrightarrow \operatorname{Spec} k$ est le morphisme structural) s'appelle i-ième groupe de *cohomologie de De Rham* de X/k. C'est un k-espace vectoriel. La suite spectrale (4.8.1) relative au foncteur $\Gamma(X, \bullet)$ et au complexe $\Omega^\bullet_{X/k}$ s'appelle *suite spectrale de Hodge vers De Rham* de X/k :

$$E_1^{i\,j} = H^j(X, \Omega^i_{X/k}) \Longrightarrow H^*_{\mathrm{DR}}(X/k). \tag{4.8.3}$$

C'est une suite spectrale de k-espaces vectoriels. Les groupes $H^j(X, \Omega^i_{X/k})$ s'appellent *groupes de cohomologie de Hodge* de X sur k. Si X est *propre* sur k ([H2] II 4) (par exemple, projectif sur k, i.e. sous-schéma fermé d'un espace projectif $\mathbb{P}^n_k$), comme les $\Omega^i_{X/k}$ sont des faisceaux cohérents (2.1), le théorème de finitude de Serre-Grothendieck ([H2] III 5.2 dans le cas projectif, (EGA III 3) dans le cas général) implique que les groupes de cohomologie de Hodge de X sur k sont des k-espaces vectoriels *de dimension finie*. Par la suite spectrale (4.8.3), il en résulte que les groupes de cohomologie de de Rham $H^n_{\mathrm{DR}}(X/k)$ sont aussi de dimension finie sur k. De plus, pour chaque n, on a

$$\sum_{i+j=n} \dim_k H^j(X, \Omega^i_{X/k}) \geqslant \dim_k H^n_{\mathrm{DR}}(X/k), \tag{4.8.4}$$

avec égalité pour tout n si et seulement si la suite spectrale de Hodge vers De Rham de X sur k dégénère en E_1, i.e. est de différentielle d_r nulle pour tout $r \geqslant 1$.

5. ThorÈmes de dcomposition, de dgnrescence et d'annulation en caractristique $p > 0$

Dans ce numéro, comme au n° 3, p désigne un nombre premier fixé.

Le résultat principal est le théorème suivant ([D-I] 2.1, 3.7) :

Théorème 5.1. *Soit S un schéma de caractéristique p. Supposons donné un relèvement (plat) T de S sur $\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$ (3.7). Soit X un S-schéma lisse; notons, comme en 3.1, $F : X \longrightarrow X'$ le Frobenius relatif de X/S. Alors, si X' admet un relèvement (lisse) sur T, le complexe de $\mathcal{O}_{X'}$-modules $\tau_{<p}F_*\Omega^\bullet_{X/S}$ (4.1) est décomposable dans la catégorie dérivée $D(X')$ des $\mathcal{O}_{X'}$-modules (4.6).*

5.2. Avant d'aborder la démonstration, notons qu'une décomposition de $\tau_{<p}$ $F_*\Omega^\bullet_{X/S}$ équivaut à la donnée d'une flèche de $D(X')$

$$\bigoplus_{i<p} \mathcal{H}^i F_*\Omega^\bullet_{X/S}[-i] \longrightarrow F_*\Omega^\bullet_{X/S}$$

induisant l'identité sur $\mathcal{H}^i$ pour tout $i < p$. D'après le théorème de Cartier (3.5), cette donnée équivaut encore à celle d'une flèche de $D(X')$

$$\varphi : \bigoplus_{i<p} \Omega^i_{X'/S}[-i] \longrightarrow F_*\Omega^\bullet_{X/S} \tag{5.2.1}$$

induisant C^{-1} sur $\mathcal{H}^i$ pour tout $i < p$. La démonstration consiste en fait à associer canoniquement une telle flèche φ à chaque relèvement de X' sur T. Elle comprend trois étapes.

Etape A. On commence par traiter le cas où F admet un relèvement global.

Proposition 5.3. *Sous les hypothèses de 5.1, supposons que $F : X \longrightarrow X'$ admette un relèvement global $G : Z \longrightarrow Z'$, où Z (resp. Z') relève X (resp. X') sur T. Soit*

$$\varphi_G : \bigoplus \Omega^i_{X'/S}[-i] \longrightarrow F_*\Omega^\bullet_{X/S} \tag{5.3.1}$$

l'homomorphisme de complexes, de i-ième composante φ^i_G, défini de la manière suivante:

$$\varphi^0_G = F^* : \mathcal{O}_X \longrightarrow F_*\mathcal{O}_X\,; \qquad \varphi^1_G : \Omega^1_{X'/S} \longrightarrow F_*\Omega^1_{X/S}$$

est l'homomorphisme "G^*/p" défini en 3.8 (c); pour $i \geqslant 1$, φ^i_G est composé de $\Lambda^i\varphi^1_G$ et du produit $\Lambda^i F_*\Omega^1_{X/S} \longrightarrow F_*\Omega^i_{X/S}$. Alors φ_G est un quasi-isomorphisme, induisant l'isomorphisme de Cartier C^{-1} sur $\mathcal{H}^i$ pour tout i.

C'est immédiat.

Etape B. C'est l'étape principale. On montre que la donnée d'un relèvement Z' de X' sur T permet de définir une décomposition de $\tau_{\leqslant 1}F_*\Omega^\bullet_{X/S}$, i.e. un homomorphisme

$$\varphi^1_{Z'} : \Omega^1_{X'/S}[-1] \longrightarrow F_*\Omega^\bullet_{X/S}$$

de $D(X')$ (et non $C(X')$) induisant C^{-1} sur $\mathcal{H}^1$. On a besoin, pour ce faire, de comparer les homomorphismes φ^1_G de (5.3.1) associés à divers relèvement de F de but Z'.

Lemme 5.4. *A tout couple ($G_1 : Z_1 \longrightarrow Z'$, $G_2 : Z_2 \longrightarrow Z'$) de relèvements de F est associé canoniquement un homomorphisme*

$$h(G_1, G_2) : \Omega^1_{X'/S} \longrightarrow F_*\mathcal{O}_X \tag{5.4.1}$$

tel que $\varphi^1_{G_2} - \varphi^1_{G_1} = dh(G_1, G_2)$. Si $G_3 : Z_3 \longrightarrow Z'$ est un troisième relèvement de F, on a

$$h(G_1, G_2) + h(G_2, G_3) = h(G_1, G_3). \tag{5.4.2}$$

Supposons d'abord que Z_1 et Z_2 soient isomorphes (au sens de 2.12 (b)). Choisissons un isomorphisme $u : Z_1 \xrightarrow{\sim} Z_2$. Alors G_2u et G_1 relèvent F, i.e. prolongent à Z_1 le composé $X \xrightarrow{F} Z \hookrightarrow Z'$, donc, d'après 2.11 (b), diffèrent par un homomorphisme h_u de $F^*\Omega^1_{X'/S}$ dans $\mathcal{O}_X$, ou ce qui revient au même, de $\Omega^1_{X'/S}$ dans $F_*\mathcal{O}_X$. Si v est un second isomorphisme de Z_1 sur Z_2, alors, compte tenu de 3.4 (a), il résulte de 2.11 (b) que u et v diffèrent par un homomorphisme "$u - v$" : $\Omega^1_{X/S} \longrightarrow \mathcal{O}_X$, donc G_2u et G_2v diffèrent par le composé de "$u - v$" et l'homomorphisme $F^*\Omega^1_{X'/S} \longrightarrow \Omega^1_{X/S}$, qui est nul, donc $G_2u = G_2v$. Donc h_u ne dépend pas du choix de u. Comme Z_1 et Z_2 sont localement isomorphes d'après 2.11 (a), on en déduit un homomorphisme (5.4.1) caractérisé par la propriété que si u est un isomorphisme de Z_1 sur Z_2 au dessus d'un ouvert U de X (rappelons encore que Z_1, Z_2 et X ont même espace sous-jacent), la restriction de $h(G_1, G_2)$ à U est l'homomorphisme h_u, "différence" entre G_1 et G_2u. La formule $\varphi^1_{G_2} - \varphi^1_{G_1} = dh(G_1, G_2)$ résulte de la description explicite de φ^1_G donnée en (3.8.1), et la formule (5.4.2) est immédiate.

Fixons maintenant le relèvement Z' de X' sur T. D'après 2.11 (a) et 2.12 (a), on peut choisir un recouvrement ouvert $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$ de X de telle manière qu'on ait, pour chaque i, un relèvement Z_i de U_i sur T et un relèvement $G_i : Z_i \longrightarrow Z'$ de $F_{|U_i}$. On dispose alors, pour chaque i, de l'homomorphisme de complexes

$$f_i = \varphi^1_{G_i} : \Omega^1_{X'/S\,|U_i}[-1] \longrightarrow F_*\Omega^\bullet_{X/S\,|U_i}$$ [13]

de (5.3.1), et pour chaque couple (i, j), de l'homomorphisme

$$h_{ij} = h(G_{i\,|U_{ij}}, G_{j\,|U_{ij}}) : \Omega^1_{X'/S\,|U_{ij}} \longrightarrow F_*\mathcal{O}_{X\,|U_{ij}}$$

de (5.4.1), où $U_{ij} = U_i \cap U_j$. Ces données sont reliées par

$$\begin{aligned} f_j - f_i &= dh_{ij} \quad (\text{sur } U_{ij}), \\ h_{ij} + h_{jk} &= h_{ik} \quad (\text{sur } U_{ijk} = U_i \cap U_j \cap U_k). \end{aligned}$$

[13] On identifie les espaces sous-jacents E X et X' au moyen de F (3.1).

Elles permettent de définir un homomorphisme de complexes de $\mathcal{O}_{X'}$-modules

$$\varphi^1_{Z',(\mathcal{U},(G_i))} : \Omega^1_{X'/S}[-1] \longrightarrow \check{\mathcal{C}}(\mathcal{U}, F_*\Omega^\bullet_{X/S}),$$

où $\check{\mathcal{C}}(\mathcal{U}, F_*\Omega^\bullet_{X/S})$ est le complexe simple associé au bicomplexe de Čech du recouvrement $\mathcal{U}$ à valeurs dans $F_*\Omega^\bullet_{X/S}$. Ce complexe a pour composantes

$$\check{\mathcal{C}}(\mathcal{U}, F_*\Omega^\bullet_{X/S})^n = \bigoplus_{a+b=n} \check{\mathcal{C}}^b(\mathcal{U}, F_*\Omega^a_{X/S})$$

et pour différentielle $d = d_1 + d_2$, où d_1 est induite par la différentielle du complexe de De Rham et d_2 est, en bidegré (a, b), égale à $(-1)^a(\sum(-1)^i\partial^i)$ (voir [G] 5.2 ou [H2] III 4.2). En particulier,

$$\check{\mathcal{C}}(\mathcal{U}, F_*\Omega^\bullet_{X/S})^1 = \check{\mathcal{C}}^1(\mathcal{U}, F_*\mathcal{O}_X) \oplus \check{\mathcal{C}}^0(\mathcal{U}, F_*\Omega^1_{X/S}).$$

Le morphisme $\varphi^1_{Z',(\mathcal{U},(G_i))}$ est défini comme ayant pour composantes (φ_1, φ_2) en degré 1, avec

$$(\varphi_1\omega)(i,j) = h_{ij}(\omega)_{|U_{ij}}, \qquad (\varphi_2\omega)(i) = f_i(\omega)_{|U_i}.$$

Utilisant le fait que les f_i sont des morphismes de complexes et les formules supra reliant les f_i et les h_{ij}, on vérifie que $\varphi^1_{Z',(\mathcal{U},(G_i))}$ ainsi défini est bien un morphisme de complexes. On dispose d'autre part de l'augmentation naturelle

$$\varepsilon : F_*\Omega^\bullet_{X/S} \longrightarrow \check{\mathcal{C}}(\mathcal{U}, F_*\Omega^\bullet_{X/S}),$$

qui est un quasi-isomorphisme, car, pour tout a, le complexe $\check{\mathcal{C}}(\mathcal{U}, F_*\Omega^a_{X/S})$ est une résolution de $F_*\Omega^a_{X/S}$ (cf. [Go] ou [H2] loc. cit.). On définit alors

$$\varphi^1_{Z'} : \Omega^1_{X'/S}[-1] \longrightarrow F_*\Omega^\bullet_{X/S}$$

comme la flèche de $D(X')$ composée de $\varphi^1_{Z',(\mathcal{U},(G_i))}$ et de l'inverse de ε (4.2). Si ($\mathcal{U} = (U_i)_{i\in I}$, $(G_i)_{i\in I}$) et ($\mathcal{V} = (V_j)_{j\in J}$, $(G_j)_{j\in J}$) sont deux choix de systèmes de relèvements de Frobenius, la considération du recouvrement $\mathcal{U} \amalg \mathcal{V}$, indexé par $I \amalg J$, formé des U_i et des V_j, montre que $\varphi^1_{Z'}$ ne dépend pas des choix (cf. [D-I] p. 253). De plus, $\varphi^1_{Z'}$ induit C^{-1} sur $\mathcal{H}^1$: la question est en effet locale, donc on peut supposer qu'on dispose d'un relèvement global de F, et l'on applique 5.3. Ceci achève l'étape B.

Etape C. On fixe à nouveau un relèvement Z' de X'. On montre comment prolonger la décomposition de $\tau_{\leqslant 1}F_*\Omega^\bullet_{X/S}$ définie par $\varphi^i_{Z'}$ $(i = 0, 1)$ en une décomposition de $\tau_{<p}F_*\Omega^\bullet_{X/S}$. On utilise pour cela la structure multiplicative du complexe de De Rham. De $\varphi^1_{Z'}$ on déduit, pour tout $i \geqslant 1$, une flèche de $D(X')$

$$(\varphi^1_{Z'})^{\overset{L}{\otimes} i} = \varphi^1_{Z'} \overset{L}{\otimes} \cdots \overset{L}{\otimes} \varphi^1_{Z'} : (\Omega^1_{X'/S}[-1])^{\overset{L}{\otimes} i} \longrightarrow (F_*\Omega^\bullet_{X/S})^{\overset{L}{\otimes} i}.$$

Comme $\Omega^1_{X'/S}$ est localement libre de type fini, on a (4.7 (a))

$$(*) \qquad (\Omega^1_{X'/S}[-1])^{\overset{L}{\otimes} i} \simeq (\Omega^1_{X'/S})^{\otimes i}[-i],$$

et de même, comme les $F_*\Omega^a_{X/S}$ sont localement libres de type fini (3.3 (a)),

$$(**) \qquad (F_*\Omega^\bullet_{X/S})^{\overset{L}{\otimes} i} \simeq (F_*\Omega^\bullet_{X/S})^{\otimes i}.$$

On définit alors, pour $i < p$,

$$\varphi^i_{Z'} : \Omega^i_{X'/S}[-i] \longrightarrow F_*\Omega^\bullet_{X/S}$$

comme la composée (via $(*)$ et $(**)$) de la flèche d'antisymétrisation standard

$$\Omega^i_{X'/S}[-i] \longrightarrow (\Omega^1_{X'/S})^{\otimes i}[-i], \qquad \omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_i \longmapsto \frac{1}{i!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_i} \mathrm{sgn}(\sigma) \omega_{\sigma(1)} \wedge \cdots \wedge \omega_{\sigma(i)}$$

(bien définie à cause de l'hypothèse $i < p$), de la flèche $(\varphi^1_{Z'})^{\overset{L}{\otimes} i}$, et de la flèche de produit $(F_*\Omega^\bullet_{X/S})^{\otimes i} \longrightarrow F_*\Omega^\bullet_{X/S}$. Comme la flèche d'antisymétrisation est une section de la projection de $(\Omega^1_{X'/S})^{\otimes i}$ sur $\Omega^i_{X'/S}$, la propriété multiplicative de l'isomorphisme de Cartier entraîne que $\varphi^i_{Z'}$ induit C^{-1} sur $\mathcal{H}^i$, et cela achève la démonstration du théorème.

Compte tenu de 3.9, on en déduit :

Corollaire 5.5. *Soit k un corps parfait de caractéristique p, et soit X un schéma lisse sur $S = \operatorname{Spec} k$. Si X se relève sur $T = \operatorname{Spec} W_2(k)$, alors $\tau_{<p} F_*\Omega^\bullet_{X/S}$ est décomposable dans $D(X')$. Si de plus X est de dimension $< p$, $F_*\Omega^\bullet_{X/S}$ est décomposable.*

Remarque 5.5.1. D'après 5.3, si X est lisse sur $\operatorname{Spec} k$ et si X et F se relèvent sur $W_2(k)$, alors $F_*\Omega^\bullet_{X/S}$ est décomposable (et ce sans hypothèse de dimension sur X). C'est le cas par exemple si X est *affine*. Par contre, si X est propre, il est rare que X admette un relèvement sur $W_2(k)$ où F se relève. On peut montrer que si X et F se relèvent, alors X est *ordinaire*, i.e. vérifie $H^j(X, B^i\Omega^\bullet_{X/S}) = 0$ pour tout (i, j) (cf. 8.6). La notion de variété ordinaire, qui n'a de sens qu'en caractéristique non nulle, a d'abord été introduite pour les courbes et les variétés abéliennes. Elle intervient dans d'assez nombreuses questions de géométrie arithmétique, voir [I4] pour une introduction et quelques références.

Corollaire 5.6. *Soit k un corps parfait de caractéristique p, et soit X un k-schéma propre et lisse, de dimension $< p$. Si X se relève sur $W_2(k)$, la suite spectrale de Hodge vers De Rham* (4.8.3) *de X sur k*

$$E_1^{ij} = H^j(X, \Omega^i_{X/k}) \Longrightarrow H^*_{\mathrm{DR}}(X/k)$$

dégénère en E_1.

Grâce à la compatibilité des Ω^i au changement de base (1.3.2), l'isomorphisme de Frobenius absolu $F_S : S \longrightarrow S$ (où $S = \operatorname{Spec} k$) induit, pour tout (i, j), un isomorphisme $F_S^* H^j(X, \Omega^i_{X/k}) \xrightarrow{\sim} H^j(X', \Omega^i_{X'/k})$, et en particulier, on a

$$\dim_k H^j(X, \Omega^i_{X/k}) = \dim_k H^j(X', \Omega^i_{X'/k}).$$

D'autre part, comme $F : X \longrightarrow X'$ est un homéomorphisme, on a canoniquement, pour tout n,

$$H^n(X', F_*\Omega^\bullet_{X/k}) \xrightarrow{\sim} H^n(X, \Omega^\bullet_{X/k}) = H^n_{\mathrm{DR}}(X/k).$$

Enfin, si X se relève sur $W_2(k)$, une décomposition $\varphi : \bigoplus \Omega^i_{X'/S}[-i] \xrightarrow{\sim} F_*\Omega^\bullet_{X/S}$ de $F_*\Omega^\bullet_{X/S}$ dans $D(X')$ induit, pour tout n, un isomorphisme

$$\bigoplus_{i+j=n} H^j(X', \Omega^i_{X'/k}) \xrightarrow{\sim} H^n(X', F_*\Omega^\bullet_{X/k}).$$

Il en résulte qu'on a, pour tout n,

$$\sum_{i+j=n} \dim_k H^j(X, \Omega^i_{X/k}) = \dim_k H^n_{\mathrm{DR}}(X/k),$$

et, d'après 4.8, cela entraîne la dégénérescence en E_1 de la suite spectrale de Hodge vers De Rham.

5.7. Pour les rappels qui suivent, le lecteur pourra consulter [H2] II, III. Soient k un anneau et X un k-schéma *projectif*, i.e. admettant une k-immersion fermée i dans un espace projectif standard $P = \mathbb{P}^r_k = \operatorname{Proj}_k[t_0, \ldots, t_n]$. Soit L un faisceau inversible sur X. Rappelons qu'on dit que :

(i) L est *très ample* si l'on a $L \simeq i^*\mathcal{O}_P(1)$ pour une telle immersion fermée i, ce qui signifie qu'il existe des sections globales $s_j \in \Gamma(X, L)(0 \leqslant j \leqslant r)$ définissant une immersion fermée $x \longmapsto (s_0(x), \ldots, s_r(x))$ de X dans P ;

(ii) L est *ample* s'il existe $n > 0$ tel que $L^{\otimes n}$ soit très ample.

Supposons L ample. Alors, d'après les *théorèmes de Serre* ([H2] II 5.17, III 5.2) :

(a) pour tout faisceau cohérent E sur X, il existe un entier n_0 tel que, pour tout $n \geqslant n_0, E \otimes L^{\otimes n}$ soit engendré par un nombre fini de ses sections globales, i.e. quotient de $\mathcal{O}_X^N$ pour N convenable;

(a) pour tout faisceau cohérent E sur X, il existe un entier n_0 tel que, pour tout $n \geqslant n_0$ et tout $i \geqslant 1$, on ait

$$H^i(X, E \otimes L^{\otimes n}) = 0.$$

Le théorème qui suit est un analogue, en caractéristique p, du théorème d'annulation de Kodaira-Akizuki-Nakano [KAN], [AkN] :

Théorème 5.8. *Soit k un corps de caractéristique p, et soit X un k-schéma projectif lisse. Soit L un faisceau inversible ample sur X. Alors, si X est purement de dimension $d < p$ (cf. 2.10) et se relève sur $W_2(k)$, on a*

$$H^j(X, L \otimes \Omega^i_{X/k}) = 0 \qquad \textit{pour } i+j > d, \tag{5.8.1}$$

$$H^j(X, L^{\otimes -1} \otimes \Omega^i_{X/k}) = 0 \qquad \textit{pour } i+j < d. \tag{5.8.2}$$

C'est un corollaire de 5.5, dû à Raynaud. La démonstration est analogue à celle de 5.6 à partir de 5.5. Tout d'abord, par le théorème de dualité de Serre ([H2] III 7.7, 7.12), si M est un faisceau inversible sur X, et si $i+i' = d = j+j'$, alors les k-espaces vectoriels de dimension finie $H^j(X, M \otimes \Omega^i_{X/k})$ et $H^{j'}(X, M^{\otimes -1} \otimes \Omega^{i'}_{X/k})$ sont canoniquement duaux. Les formules (5.8.1) et (5.8.2) sont donc équivalentes. Il sera plus commode de prouver (5.8.2). Par le théorème d'annulation de Serre (5.7 (b)), il existe $n \geqslant 0$ tel que $H^j(X, L^{\otimes p^n} \otimes \Omega^i_{X/k}) = 0$ pour tout $j > 0$ et tout i. Par dualité de Serre, il s'ensuit que $H^j(X, L^{\otimes -p^n} \otimes \Omega^i_{X/k}) = 0$ pour tout $j < d$ et tout i, et *en particulier pour tout* (i,j) tel que $i+j < d$. Procédant par récurrence descendante sur n, il suffit donc de prouver l'assertion suivante :

(∗) *si M est un faisceau inversible sur X tel que $H^j(X, M^{\otimes p} \otimes \Omega^i_{X/k}) = 0$ pour tout (i,j) tel que $i+j < d$, alors $H^j(X, M \otimes \Omega^i_{X/k}) = 0$ pour tout (i,j) tel que $i+j < d$.*

Notons, comme dans 5.1, X' le schéma déduit de X par le changement de base par le Frobenius absolu de $S = \operatorname{Spec} k$. Si F_X désigne le Frobenius absolu de X, on a un isomorphisme canonique $F_X^* M \simeq M^{\otimes p}$, induit par l'application $m \longmapsto m^{\otimes p}$, et donc un isomorphisme $F'^* M' \simeq M^{\otimes p}$, où $F : X \longrightarrow X'$ est le Frobenius relatif et M' est l'image inverse de M sur X'. On en déduit, pour tout i, des isomorphismes de $\mathcal{O}_{X'}$-modules

$$M' \otimes F_* \Omega^i_{X/k} \simeq F_*(F^* M' \otimes \Omega^i_{X/k}) \simeq F_*(M^{\otimes p} \otimes \Omega^i_{X/k}). \tag{∗∗}$$

Considérons la suite spectrale (4.8.1) relative au foncteur $T = \Gamma(X', \bullet)$ et au complexe $K = M' \otimes F_* \Omega^\bullet_{X/k}$:

$$E_1^{ij} = H^j(X', M' \otimes F_* \Omega^i_{X/k}) \Longrightarrow H^*(X', M' \otimes F_* \Omega^\bullet_{X/k}).$$

L'hypothèse et (∗∗) impliquent que $E_1^{ij} = 0$ pour $i+j < d$. Donc

$$H^n(X', M' \otimes F_* \Omega^\bullet_{X/k}) = 0 \quad \text{pour } n < d.$$

Mais comme, d'après 5.5, $F_* \Omega^\bullet_{X/k}$ est décomposable, on a (dans $D(X')$)

$$F_* \Omega^\bullet_{X/k} \simeq \bigoplus \Omega^i_{X'/k}[-i],$$

donc
$$H^n(X', M' \otimes F_*\Omega^\bullet_{X/k}) \simeq \bigoplus_{i+j=n} H^j(X', M' \otimes \Omega^i_{X'/k}),$$
et donc
$$H^j(X', M' \otimes \Omega^i_{X'/k}) = 0 \quad \text{pour } i+j < d.$$
La conclusion de $(*)$ en découle, puisqu'on a
$$F_S^* H^j(X, M \otimes \Omega^i_{X/k}) \simeq H^j(X', M' \otimes \Omega^i_{X'/k})$$
(cf. la fin de la démonstration de 5.6).

Remarques 5.9. Le lecteur trouvera dans [D-I] de nombreux compléments aux résultats exposés ci-dessus. En voici quelques uns.

(1) Plaçons-nous sous les hypothèses de 5.1. Alors :

(a) X' se relève sur T si et seulement si $\tau_{\leqslant 1} F_*\Omega^\bullet_{X/S}$ est décomposable dans $D(X')$ (ou, ce qui revient au même, $\tau_{<p} F_*\Omega^\bullet_{X/S}$ l'est). Rappelons qu'il existe une obstruction $\omega \in \mathrm{Ext}^2(\Omega^1_{X'/S}, \mathcal{O}_{X'})$ au relèvement de X' (2.12 (a) et (3.7.1)), et que, compte tenu de l'isomorphisme de Cartier, c'est dans ce même groupe que se trouve l'obstruction c_1 à la décomposabilité de $\tau_{\leqslant 1} F_*\Omega^\bullet_{X/S}$(4.6($a$)) : on montre qu'avec des conventions de signes convenables, $\omega = c_1$.

(b) Si X' se relève sur T, l'ensemble des classes d'isomorphie de relèvements de X' est un espace affine sous $\mathrm{Ext}^1(\Omega^1_{X'/S}, \mathcal{O}_{X'})$(2.12 (b) et (3.7.1)), et (toujours compte tenu de l'isomorphisme de Cartier) l'ensemble des décompositions de $\tau_{\leqslant 1} F_*\Omega^\bullet_{X/S}$ est un espace affine sous le même groupe (4.6(c)) : on montre que l'application $Z' \longmapsto \varphi_{Z'}$ construite dans la démonstration de 5.1 est une bijection affine entre ces deux espaces.

(c) On donne en fait dans [D-I] 3.5 un énoncé coiffant (a) et (b), faisant appel à la théorie des *gerbes* de Giraud [Gi].

(2) Le théorème de dégénérescence 5.6 a une variante relative. Plaçons-nous sous les hypothèses de 5.1, notons $f : X \longrightarrow S$ le morphisme structural. On dispose alors de la suite spectrale (4.8.1) relative au foncteur f_* et au complexe $\Omega^\bullet_{X/S}$,
$$E_1^{ij} = R^j f_*\Omega^i_{X/S} \Longrightarrow R^* f_*(\Omega^\bullet_{X/S}),$$
qu'on appelle *suite spectrale de Hodge vers De Rham relative* (de X sur S). Alors, si X est propre et lisse de dimension relative $< p$, et si X' se relève sur T, cette suite spectrale dégénère en E_1 et les faisceaux $R^j f_*\Omega^i_{X/S}$ sont localement libres de type fini ([D-I] 4.1.5).

(3) La dernière assertion de 5.5 et les conclusions de 5.6 et 5.8 restent encore vraies si l'on suppose seulement X de dimension $\leqslant p$ ([D-I] 2.3). C'est une conséquence de la dualité de Grothendieck pour le morphisme F.

(4) Il existe de nombreux exemples de *surfaces propres et lisses* X sur un corps algébriquement clos k de caractéristique p pour lesquelles la suite spectrale de Hodge vers De Rham ne dégénère pas en E_1 et qui ne vérifient pas la propriété d'annulation de type Kodaira-Akizuki-Nakano de 5.8 (compte tenu de (3) si $p = 2$, ou 5.6 et 5.8 si $p > 2$, ces surfaces ne se relèvent donc pas sur $W_2(k)$). Voir ([D-I] 2.6 et 2.10) pour une bibliographie sur ce sujet.

(5) Les formules (5.8.1) et (5.8.2) sont encore valables si $d = 2 \leqslant p$, X est relevable sur $W_2(k)$ et L est seulement supposé *numériquement positif*, i.e. vérifie $L \cdot L > 0$ et $L \cdot \mathcal{O}(D) \geqslant 0$ pour tout diviseur effectif D, voir [D-I] 2.

6. De la caractristique $p > 0$ Ȁ la caractristique nulle

6.0. Il existe une technique standard, en géométrie algébrique, qui permet de prouver certains énoncés, de nature géométrique[14], formulés sur un corps de base de caractéristique nulle, à partir d'énoncés analogues sur un corps de caractéristique $p > 0$, voire un corps fini. Elle consiste, grosso modo, à écrire, un peu brutalement, le corps de base K donné, qui est de caractéristique nulle, comme limite inductive de ses sous-$\mathbb{Z}$-algèbres de type fini A_i : les données sur K, pourvu qu'elles vérifient certaines conditions de finitude, proviennent, par extension des scalaires, de données analogues sur l'une des A_i, disons $A_{i_0} = B$; il suffit alors de résoudre le problème similaire sur $T = \operatorname{Spec} B$, ce qui est, en apparence, plus difficile ; l'avantage, cependant, est que les points fermés de T sont alors des spectres de corps finis, et qu'en un sens qu'on peut préciser, il y a beaucoup de tels points, de sorte qu'il suffit de vérifier l'énoncé posé sur T après spécialisation en suffisamment de ces points : on a alors affaire à un problème de caractéristique $p > 0$, où l'on dispose de la panoplie des méthodes correspondantes (Frobenius, isomorphisme de Cartier, etc.) ; on peut de plus exploiter le fait de pouvoir choisir la caractéristique assez grande.

Les deux ingrédients de la méthode sont : (a) des résultats de passage à la limite, exposée en grande généralité dans (EGA IV 8), permettant "d'étendre" [15] certaines données et propriétés sur K en des données et propriétés analogues sur B ; (b) des propriétés de densité des points fermés de schémas tels que les schémas de type fini sur un corps ou sur $\mathbb{Z}$ (EGA IV 10).

6.1. Soit $((A_i)_{i \in I}, u_{ij} : A_i \longrightarrow A_j \ (i \leqslant j))$ un système inductif filtrant d'anneaux, de limite inductive A ; notons $u_i : A_i \longrightarrow A$ l'homomorphisme canonique. Les deux exemples les plus importants sont : (i) un anneau A écrit comme limite inductive de ses sous-$\mathbb{Z}$-algèbres de type fini ; (ii) le localisé $A_{\mathfrak{p}}$ d'un anneau A en un idéal premier $\mathfrak{p}$ écrit comme limite inductive des localisés A_f ($= A[1/f]$) pour $f \notin \mathfrak{p}$.

Le prototype des problèmes et résultats du type (a) ci-dessus est le suivant. Soit $(E_i) = ((E_i)_{i \in I}, v_{ij} : E_i \longrightarrow E_j)$ un système inductif de A_i-modules, ayant

[14] i.e. stables par extension de la base, par opposition aux noncs *de nature arithmtique*, oȞ la base joue un rôle essentiel

[15] en anglais, "spreading out"

pour limite inductive le A-module E. Convenons de dire que (E_i) est *cartésien* si, pour tout $i \leqslant j$, v_{ij} (qui est un homomorphisme A_i-linéaire de E_i dans E_j considéré comme A_i-module via u_{ij}) induit, par adjonction, un isomorphisme (A_j-linéaire) de $u_{ij}^* E_i = A_j \otimes_{A_i} E_i$ dans E_j. Dans ce cas, l'homomorphisme canonique $v_i : E_i \longrightarrow E$ induit, pour tout i, un isomorphisme $u_i^* E_i \ (= A \otimes_{A_i} E_i) \xrightarrow{\sim} E$. Soit $((F_i)_i \in I, w_{ij})$ un second système inductif de A_i-modules. Si (E_i) est cartésien, les $\operatorname{Hom}_{A_i}(E_i, F_i)$ forment un système inductif de A_i-modules : l'application de transition pour $i \leqslant j$ associe à $f_i : E_i \longrightarrow F_i$ l'homomorphisme $E_j \longrightarrow F_j$ composé de l'inverse de l'isomorphisme de $A_j \otimes E_i$ dans E_j défini par v_{ij}, de $A_j \otimes f_i : A_j \otimes E_i \longrightarrow A_j \otimes F_i$, et de l'application de $A_j \otimes F_i$ dans F_j définie par w_{ij}. Si F désigne la limite inductive des F_i, on a des applications analogues de $\operatorname{Hom}_{A_i}(E_i, F_i)$ dans $\operatorname{Hom}_A(E, F)$, qui définissent un homomorphisme

$$\lim\operatorname{ind}\operatorname{Hom}_{A_i}(E_i, F_i) \longrightarrow \operatorname{Hom}_A(E, F). \tag{6.1.1}$$

On peut alors se poser les deux questions suivantes :

(1) Etant donné un A-module E, existe-t-il $i_0 \in I$ et un A_{i_0}-module E_{i_0} tel que E se déduise de E_{i_0} par extension des scalaires de A_{i_0} à A (ou, ce qui revient au même, existe-t-il un système inductif cartésien (E_i), indexé par $\{i \in I | i \geqslant i_0\}$, dont la limite soit E) ?

(2) S'il existe i_0 tel que (E_i) et (F_i) soient cartésiens pour $i \geqslant i_0$, l'application (6.1.1) (où la limite inductive est prise pour $i \geqslant i_0$) est-elle un isomorphisme ?

On a une réponse positive aux deux questions moyennant des hypothèses de présentation finie (rappelons qu'un module est dit de *présentation finie* s'il est conoyau d'un homomorphisme entre modules libres de type fini). Plus précisément, on a l'énoncé suivant, de vérification immédiate :

Lemme 6.1.2. *Avec les notations précédentes* :

(a) *si E est un A-module de présentation finie, il existe $i_0 \in I$ et un A_{i_0}-module de présentation finie E_{i_0} tel que $u_{i_0}^* E_{i_0} \simeq E$;*

(b) *Soient (E_i), (F_i) deux systèmes inductifs, cartésiens pour $i \geqslant i_0$, de limites inductives respectives E et F ; si E_{i_0} est de présentation finie, l'application* (6.1.1) *est un isomorphisme.*

Il en résulte que, si E est de présentation finie, le E_{i_0} dont il provient par extension des scalaires est essentiellement unique, en ce sens que si E_{i_1} est un autre choix (E_{i_0} et E_{i_1} étant tous deux de présentation finie), il existe i_2 avec $i_2 \geqslant i_1$ et $i_2 \geqslant i_0$ tel que E_{i_0} et E_{i_1} deviennent isomorphes par extension des scalaires à A_{i_2}.

Les $S_i = \operatorname{Spec} A_i$ forment un système projectif de schémas dont $S = \operatorname{Spec} A$ est la limite projective. Si $(X_i, v_{ij} : X_j \longrightarrow X_i)$ est un système projectif de S_i-schémas, nous dirons que ce sytème est *cartésien* pour $i \geqslant i_0$ si, pour $i_0 \leqslant i \leqslant j$, la flèche de transition v_{ij} donne un carré cartésien

$$\begin{array}{ccc} X_j & \longrightarrow & X_i \\ \downarrow & & \downarrow \\ S_j & \longrightarrow & S_i. \end{array}$$

Dans ce cas, le S-schéma déduit de X_{i_0} par extension des scalaires à S est la limite projective des X_i. Si (Y_i) est un second système projectif de S_i-schémas, cartésien pour $i \geqslant i_0$, de limite projective Y $(= S \times_{S_{i_0}} Y_{i_0})$, les $\mathrm{Hom}_{S_i}(X_i, Y_i)$ forment un système projectif, et l'on a une application analogue à (6.1.1) :

$$\text{(6.1.3)} \qquad \operatorname{lim\,proj} \mathrm{Hom}_{S_i}(X_i, Y_i) \longrightarrow \mathrm{Hom}_S(X, Y).$$

On peut alors formuler des questions similaires à (1) et (2) ci-dessus. Elles ont des réponses analogues, à condition de remplacer les hypothèses de présentation finie pour les modules par des hypothèses de présentation finie pour les schémas (un morphisme de schémas $X \longrightarrow Y$ est dit de *présentation finie* s'il est localement de présentation finie (2.1) et "*quasi-compact et quasi-séparé*", ce qui signifie que X est réunion finie d'ouverts affines U_α au-dessus d'un ouvert affine V_α de Y et que les intersections $U_\alpha \cap U_\beta$ ont la même propriété; si Y est noethérien, X est de présentation finie sur Y si et seulement si X est de type fini sur Y, i.e. localement de type fini sur Y (2.1) et noethérien) :

Proposition 6.2. *(a) Si X est un S-schéma de présentation finie, il existe $i_0 \in I$ et un S_{i_0}-schéma X_{i_0} de présentation finie dont X se déduit par changement de base.*

(b) *Si (X_i), (Y_i) sont deux systèmes projectifs de S_i-schémas, cartésiens pour $i \geqslant i_0$, et si X_{i_0} et Y_{i_0} sont de présentation finie sur S_{i_0}, alors l'application* (6.1.3) *est bijective.*

Comme précédemment, il en résulte que le X_{i_0} de 6.2 (a) est essentiellement unique (deux tels schémas deviennent S_i-isomorphes pour i assez grand). De plus, les propriétés usuelles d'un S-schéma de présentation finie (ou d'un morphisme entre tels) se lisent déjà, en quelque sorte, sur S_i pour i assez grand. En voici quelques unes, dont nous nous servirons (le lecteur en trouvera une longue liste dans (EGA IV 8, 11.2, 17.7)) :

Proposition 6.3. *Soit X un S-schéma de présentation finie. On suppose que X possède l'une des propriétés $\mathcal{P}$ suivantes : projectif, propre, lisse. Alors il existe $i_0 \in I$ et un S_{i_0}-schéma X_{i_0} de présentation finie, possédant la même propriété $\mathcal{P}$, dont X se déduit par changement de base.*

Le cas où $\mathcal{P}$ est "projectif" est facile : X est le sous-schéma fermé d'un espace projectif standard $P = \mathbb{P}^r_S$ défini par un idéal localement de type fini, il suffit de relever P, puis l'immersion fermée (i.e. le quotient de $\mathcal{O}_P$ correspondant, cf. 6.11). Le cas "propre" est moins immédiat mais, en gros, s'y ramène, par un résultat classique, qu'on appelle le *lemme de Chow* (cf. EGA IV 8.10.5). Le cas “lisse” est un peu plus difficile (on utilise le critère 2.10), voir (EGA IV 11.2.6 et 17.7.8). En ce qui concerne les propriétés de type (b) évoquées en 6.0, nous aurons seulement besoin du résultat suivant :

Proposition 6.4. *Soit S un schéma de type fini sur $\mathbb{Z}$. Alors :*

(a) *Si x est un point fermé de S, le corps résiduel $k(x)$ est un corps fini*;

(b) *toute partie localement fermée non vide Z de S contient un point fermé de S.*

Nous renvoyons pour la démonstration à (EGA IV 10.4.6, 10.4.7), ou, dans le cas où S est affine, auquel on se ramène d'ailleurs aussitôt, à (Bourbaki, Alg. Com. V, par. 3, n° 4) (c'est une conséquence du théorème des zéros de Hilbert).

Nous aurons à appliquer 6.4 (b) au cas où Z est le lieu de lissité de S, S étant supposé intègre[16] :

Proposition 6.5. *Soit S un schéma intègre de type fini sur $\mathbb{Z}$. L'ensemble des points x de S en lesquels S est lisse sur* $\operatorname{Spec}\mathbb{Z}$ *est un ouvert non vide de S. En particulier, si A est une $\mathbb{Z}$-algèbre de type fini, intègre, il existe $s \in A$, $s \neq 0$, tel que* $\operatorname{Spec} A_s$ *soit lisse sur $\mathbb{Z}$.*

L'ouverture de l'ensemble des points de lissité d'un morphisme localement de présentation finie est un fait général, qui résulte par exemple du critère jacobien 2.6 (a), cf. (EGA IV 12.1.6). Que dans le cas présent cet ouvert soit non vide découle d'une variante locale de 2.10 et du fait que la fibre générique de S est lisse sur $\mathbb{Q}$ en son point générique, $\mathbb{Q}$ étant parfait.

Nous aurons enfin à utiliser des résultats standard de compatibilité des images directes au changement de base (ou, comme on dit parfois, de *propreté cohomologique*). Pour ne pas alourdir l'exposition, nous ne les énoncerons que dans le cas où nous aurons à nous en servir, pour la cohomologie de Hodge et la cohomologie de De Rham.

Proposition 6.6. *Soient S un schéma affine*[17] *noethérien intègre et $f : X \longrightarrow S$ un morphisme propre et lisse.*

(a) *Les faisceaux $R^j f_* \Omega^i_{X/S}$ et $R^n f_* \Omega^\bullet_{X/S}$ sont cohérents. Il existe un ouvert non vide U de S tel que, pour tout (i,j) et tout n, les restrictions à U de ces faisceaux soient localement libres de type fini.*

(b) *Pour tout $i \in \mathbb{Z}$ et pour tout morphisme $g : S' \longrightarrow S$, si f' : $X' \longrightarrow$ S' désigne le schéma déduit de X par le changement de base g, les flèches canoniques de $D(S')$ (dites de changement de base)*

(6.6.1) $$Lg^* Rf_* \Omega^i_{X/S} \longrightarrow Rf'_* \Omega^i_{X'/S'}$$

(6.6.2) $$Lg^* Rf_* \Omega^\bullet_{X/S} \longrightarrow Rf'_* \Omega^\bullet_{X'/S'}$$

---

[16] Un schma est dit *intÈgre* s'il est irrductible et rduit.

[17] L'hypothÈse “affine” est inutile, nous ne la faisons que pour faciliter la preuve de (b).

sont des isomorphismes.

(c) *Fixons $i \in \mathbb{Z}$, et supposons que, pour tout j, le faisceau $R^j f_* \Omega^i_{X/S}$ soit localement libre sur S, de rang constant h^{ij}. Alors, pour tout j, la flèche de changement de base* (*déduite de* (6.6.1))

$$g^* R^j f_* \Omega^i_{X/S} \longrightarrow R^j f'_* \Omega^i_{X'/S'} \tag{6.6.3}$$

est un isomorphisme. En particulier, $R^j f'_* \Omega^i_{X'/S'}$ est localement libre de rang h^{ij}.

(d) *Supposons que, pour tout n, $R^n f_* \Omega^\bullet_{X/S}$ soit localement libre de rang constant h^n. Alors, pour tout n, la flèche de changement de base* (*déduite de* (6.6.2))

$$g^* R^n f_* \Omega^\bullet_{X/S} \longrightarrow R^n f'_* \Omega^\bullet_{X'/S'} \tag{6.6.4}$$

est un isomorphisme. En particulier, $R^n f'_* \Omega^\bullet_{X'/S'}$ est localement libre de rang h^n.

Indiquons rapidement la démonstration. Le fait que les $R^j f_* \Omega^i_{X/S}$ soient cohérents est un cas particulier du théorème de finitude de Grothendieck (EGA III 3) (ou [H2] III 8.8 dans le cas projectif). La cohérence des $R^n f_* \Omega^\bullet_{X/S}$ en résulte par la suite spectrale de Hodge vers De Rham relative (5.9(2)). Pour la deuxième assertion de (a), notons A l'anneau (intègre) de S, K son corps des fractions, qui est donc l'anneau local de S en son point générique η. Posons pour abréger $R^j f_* \Omega^i_{X/S} = \mathcal{H}^{ij}, R^n f_* \Omega^\bullet_{X/S} = \mathcal{H}^n$. La fibre de $\mathcal{H}^{ij}$ (resp. $\mathcal{H}^n$) en η est libre de type fini (un K-espace vectoriel de dimension finie), et est la limite inductive des $\mathcal{H}^{ij}_{|D(s)}$ (resp. $\mathcal{H}^n_{|D(s)}$), pour s parcourant A, $D(s)$ désignant "l'ouvert d'inversibilité" de s, i.e. $\operatorname{Spec} A_s = X - V(s)$. Par 6.1.2 il en résulte qu'il existe s tel que $\mathcal{H}^{ij}_{|D(s)}$ (resp. $\mathcal{H}^n_{|D(s)}$) soit libre de type fini. Pour (b), choisissons un recouvrement fini $\mathcal{U}$ de X par des ouverts affines, notons $\mathcal{U}'$ le recouvrement ouvert de X' déduit de $\mathcal{U}$ par changement de base. Comme S est affine et que X est propre, donc séparé, sur S, les intersections finies d'ouverts de $\mathcal{U}$ sont affines, et de même les intersections finies d'ouverts de $\mathcal{U}'$ sont (relativement) affines[18] sur S'. Par suite (cf. [H2] III 8.7), $Rf_* \Omega^i_{X/S}$ (resp. $Rf'_* \Omega^i_{X'/S'}$) est représenté par $f_* \check{\mathcal{C}}(\mathcal{U}, \Omega^i_{X/S})$ (resp. $f'_* \check{\mathcal{C}}(\mathcal{U}', \Omega^i_{X'/S'})$), où l'on désigne ici par $\check{\mathcal{C}}(\mathcal{U}, \bullet)$ le complexe des cochaînes *alterné*. Par la compatibilité des Ω^i au changement de base, on a un isomorphisme canonique de complexes

$$g^* f_* \check{\mathcal{C}}(\mathcal{U}, \Omega^i_{X/S}) \xrightarrow{\sim} f'_* \check{\mathcal{C}}(\mathcal{U}', \Omega^i_{X'/S'}).$$

Comme le complexe $f_* \check{\mathcal{C}}(\mathcal{U}, \Omega^i_{X/S})$ est borné et à composantes plates, cet isomorphisme réalise l'isomorphisme (6.6.1). De même, $Rf_* \Omega^\bullet_{X/S}$ (resp. $Rf'_* \Omega^\bullet_{X'/S'}$)) est

[18] Un morphisme de schmas est dit *affine* si l'image inverse de tout ouvert affine est affine.

représenté par $f_*\check{\mathcal{C}}(\mathcal{U}, \Omega^\bullet_{X/S})$ (resp. $f'_*\check{\mathcal{C}}(\mathcal{U}', \Omega^\bullet_{X'/S'})$) (où $\check{\mathcal{C}}$ désigne cette fois le complexe simple associé au bicomplexe de Čech), et l'on a un isomorphisme canonique de complexes

$$g^* f_*\check{\mathcal{C}}(\mathcal{U}, \Omega^\bullet_{X/S}) \xrightarrow{\sim} f'_*\check{\mathcal{C}}(\mathcal{U}', \Omega^\bullet_{X'/S'}),$$

qui réalise l'isomorphisme (6.6.2). Les assertions (c) et (d) résultent de (b) et du lemme suivant, dont nous laissons la vérification au lecteur :

Lemme 6.7. *Soient A un anneau noethérien et E un complexe de A-modules tel que $H^i(E)$ soit projectif de type fini pour tout i et nul pour presque tout i. Alors :*

(a) *E est isomorphe, dans $D(A)$, à un complexe borné à composantes projectives de type fini ;*

(b) *si E est borné et à composantes projectives de type fini, alors, pour toute A-algèbre B, et pour tout i, l'homomorphisme canonique*

$$B \otimes_A H^i(E) \longrightarrow H^i(B \otimes_A E)$$

est un isomorphisme.

Remarques 6.8. (a) Un complexe de A-modules isomorphe, dans $D(A)$, à un complexe borné à composantes projectives de type fini est dit *parfait*. Prendre garde que, si E est parfait, il n'est pas vrai, en général, que les $H^i(E)$ soient projectifs de type fini. On peut montrer que, sous les hypothèses de 6.6, les complexes $Rf_*\Omega^i_{X/S}$ et $Rf_*\Omega^\bullet_{X/S}$ sont parfaits sur S (et non seulement sur U). La notion de complexe parfait joue un rôle important dans de nombreuses questions de géométrie algébrique.

(b) Dans les énoncés de 6.6 concernant $\Omega^i_{X/S}$, on peut remplacer $\Omega^i_{X/S}$ par n'importe quel $\mathcal{O}_X$-module F localement libre de type fini (voire cohérent et plat relativement à S) : les conclusions de (a), (b) et (c) sont encore valables, à condition de remplacer $\Omega^i_{X'/S'}$ par le faisceau F' image inverse de F sur X'. De même, le complexe Rf_*F est parfait sur S.

Nous sommes maintenant en mesure d'énoncer et de démontrer l'application promise de 5.6 :

Théorème 6.9 (théorème de dégénérescence de Hodge)**.** *Soient K un corps de caractéristique nulle, et X un K-schéma propre et lisse. Alors la suite spectrale de Hodge de X sur K* (4.8.3)

$$E_1^{ij} = H^j(X, \Omega^i_{X/K}) \Longrightarrow H^*_{\mathrm{DR}}(X/K)$$

dégénère en E_1.

Posons $\dim_K H^j(X, \Omega^i_{X/K}) = h^{ij}$, $\dim H^n_{\mathrm{DR}}(X/K) = h^n$. Il s'agit de prouver que, pour tout n, $h^n = \sum_{i+j=n} h^{ij}$ (cf. (4.8.3)). Ecrivons K comme limite inductive de la famille $(A_\lambda)_{\lambda\in L}$ de ses sous-$\mathbb{Z}$-algèbres de type fini. D'après 6.3, il existe $\alpha \in L$ et un S_α-schéma propre et lisse X_α (où $S_\alpha = \operatorname{Spec} A_\alpha$) dont X se déduit par le changement de base $\operatorname{Spec} K \longrightarrow S_\alpha$. Quitte à remplacer A_α par $A_\alpha[t^{-1}]$ pour un $t \in A_\alpha$ non nul convenable, on peut supposer, d'après 6.5, que S_α est lisse sur $\operatorname{Spec}\mathbb{Z}$. Abrégeons A_α en A, S_α en S, X_α en $\mathfrak{X}$, et notons $f : \mathfrak{X} \longrightarrow S$ le morphisme structural. Quitte à nouveau à remplacer A par $A[t^{-1}]$, on peut, d'après 6.6 (a), supposer que les faisceaux $R^j f_*\Omega^i_{\mathfrak{X}/S}$ (resp. $R^n f_*\Omega^\bullet_{\mathfrak{X}/S}$) sont libres de rang constant, nécessairementégal alors à $h^{i\,j}$ (resp. h^n) d'après 6.6 (c) et (d). Comme la dimension relative de $\mathfrak{X}$ sur S est une fonction localement constante et que X est quasi-compact, on peut d'autre part choisir un entier d qui majore cette dimension en tout point de X et donc la dimension des fibres de X sur S en tout point de S. Appliquant 6.4 (b) à $Z = \operatorname{Spec} A[1/N]$ pour N convenable (disons, le produit des nombres premiers $\leqslant d$), on peut choisir un point fermé s de S, dont le corps résiduel $k = k(s)$ (un corps fini) est de caractéristique $p > d$. Comme S est lisse sur $\operatorname{Spec}\mathbb{Z}$, le morphisme canonique $\operatorname{Spec} k \longrightarrow S$ (une immersion fermée) se prolonge (par définition de la lissité (2.2)) en un morphisme $g : \operatorname{Spec} W_2(k) \longrightarrow S$, où $W_2(k)$ est l'anneau des vecteurs de Witt de longueur 2 sur k (3.9). Notons $Y = \mathfrak{X}_s$ la fibre de $\mathfrak{X}$ en $s = \operatorname{Spec} k$ et Y_1 le schéma sur $\operatorname{Spec} W_2(k)$ déduit de $\mathfrak{X}$ par le changement de base g. On a donc des carrés cartésiens :

$$\begin{array}{ccccccc}
Y & \longrightarrow & Y_1 & \longrightarrow & \mathfrak{X} & \longleftarrow & X \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
s & \longrightarrow & \operatorname{Spec} W_2(k) & \xrightarrow{g} & S & \longleftarrow & \operatorname{Spec} K.
\end{array}$$

Par construction, Y est un k-schéma propre et lisse, de dimension $< p$, relevé sur $W_2(k)$. Donc, d'après 5.6, la suite spectrale de Hodge vers De Rham de Y sur k dégénère en E_1. On a donc, pour tout n,

$$\sum_{i+j=n} \dim_k H^j(Y, \Omega^i_{Y/k}) = \dim_k H^n_{\mathrm{DR}}(Y/k).$$

Mais d'après 6.6 (c) et (d), on a, pour tout (i,j) et pour tout n,

$$\dim_k H^j(Y, \Omega^i_{Y/k}) = h^{i\,j}, \qquad \dim_k H^n_{\mathrm{DR}}(Y/k) = h^n.$$

Donc $\sum_{i+j=n} h^{i\,j} = h^n$ pour tout n, ce qui achève la démonstration.

Théorème 6.10 (théorème d'annulation de Kodaira-Akizuki-Nakano [KAN], [AkN])**.** *Soient K un corps de caractéristique nulle, X un K-schéma projectif et lisse, purement de dimension d, et L un faisceau inversible ample sur X. Alors on a :*

(6.10.1) $$H^j(X, L \otimes \Omega^i_{X/K}) = 0 \quad \textit{pour } i+j > d,$$

(6.10.2) $$H^j(X, L^{\otimes -1} \otimes \Omega^i_{X/K}) = 0 \quad \textit{pour } i+j < d.$$

On déduit 6.10 de 5.8 comme 6.9 de 5.6. On a besoin pour cela d'un résultat de passage à la limite pour les modules, généralisant et précisant 6.1.2 (cf. (EGA IV 8.5, 8.10.5.2)) :

Proposition 6.11. *Soit, comme en 6.1, $(S_i)_{i\in I}$ un système projectif filtrant de schémas affines, de limite S. Soient $i_0 \in I$, X_{i_0} un S_{i_0}-schéma de présentation finie, et considérons le système projectif cartésien (X_i) qui s'en déduit pour $i \geqslant i_0$, de limite $X = S \times_{S_{i_0}} X_{i_0}$.*

(a) *Si E est un $\mathcal{O}_X$-module de présentation finie, il existe $i \geqslant i_0$ et un $\mathcal{O}_{X_i}$-module E_i de présentation finie dont E se déduit par extension des scalaires. Si E est localement libre (resp. localement libre de rang r), il existe $j \geqslant i$ tel que $E_j = \mathcal{O}_{X_j} \otimes_{\mathcal{O}_{X_i}} E_i$ soit localement libre (resp. localement libre de rang r). Si X est projectif sur S et E est un $\mathcal{O}_X$-module inversible ample (resp. très ample) (5.7), il existe $j \geqslant i$ tel que X_j soit projectif sur S_j et E_j soit inversible ample (resp. très ample).*

(b) *Soient E_{i_0}, F_{i_0} des $\mathcal{O}_{X_{i_0}}$-modules de présentation finie, et considérons les systèmes (E_i), (F_i) qui s'en déduisent par extension des scalaires sur les X_i pour $i \geqslant i_0$, ainsi que les modules E et F qui s'en déduisent par extension des scalaires sur X. On a alors une application naturelle*

$$\lim\operatorname{ind}_{i\geqslant i_0} \operatorname{Hom}_{\mathcal{O}_{X_i}}(E_i, F_i) \longrightarrow \operatorname{Hom}_{\mathcal{O}_X}(E, F),$$

qui est bijective.

La vérification de (b) puis des deux premières assertions de (a) se ramène à 6.1.2. Pour la dernière de (a), il suffit de traiter le cas où E est très ample, i.e. correspond à une immersion fermée $h : X \longrightarrow P = \mathbb{P}^r_S$ telle que $h^*\mathcal{O}_P(1) \simeq E$. Pour i assez grand, on relève h en un S_i-morphisme $h_i : X_i \longrightarrow P_i = \mathbb{P}^r_{S_i}$ et E en E_i inversible sur X_i. Quitte à agrandir i, h_i est une immersion fermée et l'isomorphisme $h^*\mathcal{O}_P(1) \simeq E$ provient d'un isomorphisme $h_i^*\mathcal{O}_{P_i}(1) \simeq E_i$, E_i est alors très ample.

Prouvons 6.10. Procédant comme dans la démonstration de 6.9, et appliquant en outre 6.11, on peut trouver un sous-anneau A de K de type fini et lisse sur $\mathbb{Z}$, un morphisme projectif et lisse $f : \mathcal{X} \longrightarrow S = \operatorname{Spec} A$, purement de dimension relative d, dont $X \longrightarrow \operatorname{Spec} K$ se déduit par changement de base, et un $\mathcal{O}_X$-module inversible ample $\mathcal{L}$ dont L se déduit par extension des scalaires. Grâce à 6.6 et 6.8 (b), on peut de plus, quitte à remplacer A par $A[t^{-1}]$, supposer que les faisceaux $R^j f_*(\mathcal{M}\otimes\Omega^i_{\mathcal{X}}/S)$, où $\mathcal{M} = \mathcal{L}$ (resp. $\mathcal{L}^{\otimes -1}$), sont libres de type fini, de rang constant, nécessairement égal, d'après 6.8 (b), à $h^{ij}(L) = \dim_K H^j(X, L \otimes \Omega^i_{X/K})$ (resp. $h^{ij}(L^{\otimes -1}) = H^j(X, L^{\otimes -1} \otimes \Omega^i_{X/K})$). Choisissons alors $g : \operatorname{Spec} W_2(k) \longrightarrow S$ comme dans la démonstration de 6.9. Le faisceau $\mathcal{L}_s$ image inverse de $\mathcal{L}$ sur $Y = X_s$ est ample. D'après 6.6 et 6.8 (b), on a $\dim_k H^j(Y, \mathcal{L}_s \otimes \Omega^i_{Y/k}) = h^{ij}(L)$, et $\dim_k H^j(Y, \mathcal{L}_s^{\otimes -1} \otimes \Omega^i_{Y/k}) = h^{ij}(L^{\otimes -1})$. La conclusion résulte alors de 5.8.

Remarque 6.12. De manière analogue, le théorème d'annulation de Ramanujam sur les surfaces [Ram] résulte de la variante de 5.8 relative aux faisceaux numériquement positifs (cf. 5.9 (5)).

7. Dveloppements rcents et problÈmes ouverts

A. Diviseurs à croisements normaux, réduction semi-stable, et structures logarithmiques

7.1. Soient S un schéma, X un S-schéma lisse, et D un sous-schéma fermé de X. On dit que D est un *diviseur à croisements normaux relativement à* S (ou simplement, *relatif*) si, “localement pour la topologie étale sur X”, le couple (X, D) est “isomorphe” au couple formé de l'espace affine standard $\mathbb{A}^n_S = S[t_1, \ldots, t_n]$ et du diviseur $V(t_1 \cdots t_r)$ d'équation $t_1 \cdots t_r = 0$, pour $0 \leqslant r \leqslant n$ (le cas $r = 0$ correspondant à $t_1 \cdots t_r = 1$ et $V(t_1 \cdots t_r) = \emptyset$). Cela signifie qu'il existe un recouvrement *étale* $(X_i)_{i \in I}$ de X (i.e. une famille de morphismes étales $X_i \longrightarrow X$ dont la réunion des images est X) tel que, si $D_i = X_i \times_X D$ est le sous-schéma fermé induit par D sur X_i, il existe un morphisme étale $X_i \longrightarrow \mathbb{A}^n_S$ tel qu'on ait un carré cartésien

$$\begin{array}{ccc} D_i & \longrightarrow & X_i \\ \downarrow & & \downarrow \\ V(t_1 \cdots t_r) & \longrightarrow & \mathbb{A}^n_S \end{array}$$

(n et r dépendant de i), en d'autres termes, qu'il existe un système de coordonnées $(x_1, \ldots, x_n)$ sur X_i au sens de 2.7 (définissant le morphisme étale $X_i \longrightarrow \mathbb{A}^n_S$) tel que D_i soit le sous-schéma fermé d'équation $x_1 \cdots x_r = 0$. Cette définition est calquée sur la définition analogue en géométrie analytique complexe (cf. [D1]), où “localement pour la topologie étale” est remplacé par “localement pour la topologie classique”, et “morphisme étale” par “isomorphisme local”. Un exemple standard de diviseur à croisements normaux relativement à $S = \operatorname{Spec} k$, k un corps de caractéristique différente de 2, est la cubique à point double $D = \operatorname{Spec} k[x, y]/(y^2 - x^2(x - 1))$ dans le plan affine $X = \operatorname{Spec} k[x, y]$ (observer, dans cet exemple, qu'il n'existe pas de système de coordonnées (x_j) comme ci-dessus sur un recouvrement ouvert *de Zariski* de X, une extension étale (extraction d'une racine carrée de $x - 1$) étant nécessaire pour faire apparaître un tel système au voisinage de l'origine).

La notion de diviseur à croisements normaux $D \hookrightarrow X$ relativement à S est stable par localisation étale sur X et par changement de base $S' \longrightarrow S$.

Si $D \hookrightarrow X$ est un diviseur à croisements normaux relatif, et si $j : U = X \smallsetminus D \hookrightarrow X$ est l'inclusion de l'ouvert complémentaire, on définit un sous-complexe

$$\Omega^\bullet_{X/S}(\log D) \tag{7.1.1}$$

de $j_* \Omega^\bullet_{U/S}$, dit *complexe de De Rham de* X/S *à pôles logarithmiques le long de* D, par la condition qu'une section locale ω de $j_* \Omega^i_{U/S}$ appartient à $\Omega^i_{X/S}(\log D)$

si et seulement si ω et $d\omega$ ont au plus un pôle simple le long de D (i.e. sont telles que, si f est une équation locale de D, $f\omega$ (resp. $f\,d\omega$) soit section de $\Omega^i_{X/S}$ (resp. $\Omega^{i+1}_{X/S}$) (NB. f est nécessairement non diviseur de zéro dans $\mathcal{O}_X$)). On voit facilement que les $\mathcal{O}_X$-modules $\Omega^i_{X/S}(\log D)$ sont localement libres de type fini, que $\Omega^i_{X/S}(\log D) = \Lambda^i\Omega^1_{X/S}(\log \mathrm{D})$, et que, si, comme plus haut, $(x_1, \ldots, x_n)$ sont des coordonnées sur un X' étale sur X où D a pour équation $x_1 \cdots x_r = 0$, $\Omega^1_{X/S}(\log D)$ est libre de base $(dx_1/x_1, \ldots, dx_r/x_r, dx_{r+1}, \ldots, dx_n)$.

Il existe une variante naturelle, en géométrie analytique complexe, de la construction (7.1.1) (cf. [D1]). Si $S = \operatorname{Spec}\mathbb{C}$ et $D \subset X$ est un diviseur à croisements normaux (algébrique), le complexe de faisceaux analytiques associé à (7.1.1) sur l'espace analytique X^{an} associé à X,

$$\Omega^\bullet_{X/\mathbb{C}}(\log D)^{\mathrm{an}} = \Omega^\bullet_{X^{\mathrm{an}}/\mathbb{C}}(\log D^{\mathrm{an}}),$$

calcule la cohomologie transcendante de U à valeurs dans $\mathbb{C}$: on a un isomorphisme canonique (dans la catégorie dérivée $D(X^{\mathrm{an}}, \mathbb{C})$)

$$Rj_*\mathbb{C} \simeq \Omega^\bullet_{X/S}(\log D)^{\mathrm{an}}, \tag{7.1.2}$$

et par suite des isomorphismes

$$H^i(U^{\mathrm{an}}, \mathbb{C}) \simeq H^i(X^{\mathrm{an}}, \Omega^\bullet_{X/S}(\log D)^{\mathrm{an}}) \tag{7.1.3}$$

(loc. cit.). Quand de plus X est propre sur $\mathbb{C}$, le théorème de comparaison de Serre [GAGA] permet de déduire de (7.1.3) des isomorphismes

$$H^i(U^{\mathrm{an}}, \mathbb{C}) \simeq H^i(X, \Omega^\bullet_{X/S}(\log D)). \tag{7.1.4}$$

En outre, la filtration F de $H^*(X, \Omega^\bullet_{X/S}(\log D))$, aboutissement de la première suite spectrale d'hypercohomologie de X à valeurs dans $\Omega^\bullet_{X/S}(\log \mathrm{D})$,

$$E_1^{p\,q} = H^q(X, \Omega^p_{X/S}(\log D) \Longrightarrow H^{p+q}(X, \Omega^\bullet_{X/S}(\log D)) \tag{7.1.5}$$

est la *filtration de Hodge* de la *structure de Hodge mixte* naturelle de $H^*(U^{\mathrm{an}}, \mathbb{Z})$ définie par Deligne et la suite spectrale (7.1.5) dégénère en E_1 ([D2]).

Tout comme dans le cas où $D = \emptyset$ (6.9), cette dégénérescence peut se démontrer par réduction à la caractéristique $p > 0$. On a en effet le résultat suivant, qui généralise 5.1 et dont la preuve est analogue ([D-I] 4.2.3) :

Théorème 7.2. *Soient S un schéma de caractéristique $p > 0$, $S^\sim$ un relèvement plat de S sur $\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$, X un S-schéma lisse et $D \subset X$ un diviseur à croisements normaux relatif. Notons $F : X \longrightarrow X'$ le Frobenius relatif de X/S. Si le couple (X', D') admet un relèvement $(X'^\sim, D'^\sim)$ sur $S^\sim$, où $X'^\sim$ est lisse et $D'^\sim \subset X'^\sim$ est un diviseur à croisements normaux relatif, le complexe de $\mathcal{O}_{X'}$-modules $\tau_{<p}F_*\Omega^\bullet_{X/S}(\log D)$ est décomposable dans la catégorie dérivée $D(X')$.*

Le lecteur trouvera dans [D-I] divers compléments à 7.2 et dans [E-V] une autre présentation des mêmes résultats, et des applications à des théorèmes d'amplitude et d'annulation.

7.3. La théorie qui précède s'étend sans grands changements à une classe de morphismes qui ne sont plus lisses, mais n'en sont pas très éloignés, les morphismes dits "de réduction semi-stable". Soit T un schéma. L'exemple type de tels morphismes est le morphisme

$$s : \mathbb{A}^n_T = T[x_1, \ldots , x_n] \longrightarrow \mathbb{A}^1_T = T[t], \qquad t \longmapsto x_1 \cdots x_n \quad (n \geqslant 1);$$

en d'autres termes, si $S = \mathbb{A}^1_T$, le schéma $\mathbb{A}^n_T$, considéré comme S-schéma par s, est le sous-S-schéma de $\mathbb{A}^n_S = S[x_1, \ldots , x_n] = T[x_1, \ldots , x_n, t]$ d'équation $x_1 \cdots x_n = t$. Le morphisme s est lisse hors de 0 et sa fibre en 0 est le diviseur D d'équation $(x_1 \cdots x_n = 0)$, un diviseur à croisements normaux relativement à T, mais non à S (un diviseur "vertical"). Plus généralement, si S est un T-schéma lisse de dimension relative 1 et $E \subset S$ un diviseur à croisement normaux relatif (si T est le spectre d'un corps algébriquement clos, E est donc simplement un ensemble fini de points rationnels de S), on dit qu'un S-schéma X a *réduction semi-stable le long de* E si, localement pour la topologie étale (sur X et sur S) le morphisme $X \longrightarrow S$ est de la forme $s \circ g$, avec g lisse, s étant le morphisme considéré ci-dessus. Le diviseur $D = X \times_S E \subset X$ est alors un diviseur à croisements normaux relativement à T (mais non à S)[19]. Un exemple élémentaire est fourni par la "famille de Legendre" $X = \operatorname{Spec} k[x, y, t]/(y^2 - x(x-1)(x-t))$ au-dessus de $S = \operatorname{Spec} k[t] = \operatorname{Spec} k$, k un corps de caractéristique $\neq 2$), qui a réduction semi-stable en $\{0\} \cup \{1\}$, la fibre en chacun de ces points étant isomorphe à la cubique à point double envisagée plus haut. L'intérêt de la notion de réduction semi-stable vient de la *conjecture de réduction semi-stable*, qui, en gros, affirme que localement, après ramification convenable de la base, un morphisme lisse peut se prolonger en un morphisme à réduction semi-stable, conjecture établie par Grothendieck-Deligne-Mumford et Artin-Winters ([G], [A-W], [D-M]) en caractéristique quelconque mais dimension relative 1, et Mumford ([M]) en caractéristique nulle et dimension relative quelconque.

Si $f : X \longrightarrow S$ a réduction semi-stable le long de E, on définit un complexe de De Rham à pôles logarithmiques relatif

$$\omega^\bullet_{X/S} = \Omega^\bullet_{X/S}(\log D/E), \tag{7.3.1}$$

de composantes $\omega^i_{X/S} = \Lambda^i \omega^1_{X/S}$, où $\omega^1_{X/S}$ est le quotient de $\Omega^1_{X/T}(\log D)$ par l'image de $f^*\Omega^1_{S/T}(\log E)$ et la différentielle est déduite de celle de $\Omega^\bullet_{X/T}(\log D)$ par passage au quotient. Ce complexe est à composantes localement libres de type fini (dans le cas du morphisme s ci-dessus, $\omega^1_{X/S}$ est isomorphe à

19 On peut même dfinir une notion de rduction semi-stable le long de E sans hypothEse sur la dimension relative de S sur T, cf. [I5].

$(\bigoplus \mathcal{O}_X dx_i/x_i)/\mathcal{O}_X(\sum dx_i/x_i)$ (donc libre de base dx_i/x_i, $i \geqslant 2$)). Il induit sur l'ouvert de lissité U de X sur S le complexe de De Rham usuel $\Omega^\bullet_{U/S}$, et l'on peut montrer que c'est l'unique prolongement sur X de ce complexe qui soit à composantes localement libres de type fini. De plus, si l'on pose, pour abréger, $\omega^\bullet_{X/T} = \Omega^\bullet_{X/T}(\log D)$, $\omega^\bullet_{S/T} = \Omega^\bullet_{S/T}(\log E)$, on a une suite exacte

$$0 \longrightarrow \omega^1_{S/T} \otimes \omega^\bullet_{X/S}[-1] \longrightarrow \omega^\bullet_{X/T} \longrightarrow \omega^\bullet_{X/S} \longrightarrow 0, \tag{7.3.2}$$

où la flèche de gauche est $a \otimes b \longmapsto f^*a \wedge b$. Cette suite exacte joue un rôle important dans le *théorème de régularité de la connexion de Gauss-Manin* (cf. [K2] et l'article de Bertin-Peters dans ce volume). Il existe aussi une variante, en géométrie analytique complexe, de ces constructions. Supposons que $T = \operatorname{Spec} \mathbb{C}$, que S soit une courbe lisse sur $\mathbb{C}, E \subset S$ le diviseur réduit à un point 0, et que $f : X \longrightarrow S$ soit un morphisme à réduction semi-stable en $\{0\}$, de fibre Y en 0 (Y est donc un diviseur à croisement normaux dans X relativement à $\mathbb{C}$). On peut alors considérer le complexe

$$\omega^\bullet_Y = \mathbb{C}_{\{0\}} \otimes_{\mathcal{O}_S} \omega^\bullet_{X/S}, \tag{7.3.3}$$

de composantes les faisceaux localement libres de type fini $\omega^i_Y = \mathcal{O}_Y \otimes_{\mathcal{O}_X} \omega^i_{X/S}$. Steenbrink [St] a montré que le complexe analogue $\omega^\bullet_{Y^{\mathrm{an}}}$ sur Y^{an} (qui est aussi le complexe de faisceaux associé à $\omega^\bullet_Y$ sur Y^{an}) incarne le *complexe des cycles proches* $R\Psi(\mathbb{C})$ de f en 0, de sorte que, si de plus f est propre, $H^*(Y, \omega^\bullet_Y)$ "calcule" $H^*(X^{\mathrm{an}}_t, \mathbb{C})$ pour t "assez voisin" de 0. Steenbrink montre en outre que (sous cette hypothèse supplémentaire) les suites spectrales

$$E_1^{p\,q} = R^q f_* \omega^p_{X/S} \Longrightarrow R^{p+q} f_* \omega^\bullet_{X/S} \tag{7.3.4}$$

et

$$E_1^{p\,q} = H^q(Y, \omega^p_Y) \Longrightarrow H^{p+q}(Y, \omega^\bullet_Y) \tag{7.3.5}$$

dégénèrent en E_1 et que les faisceaux $R^q f_* \omega^p_{X/S}$ sont localement libres de type fini et de formation compatible à tout changement de base. Ces résultats font partie de la construction d'une *structure de Hodge mixte limite* sur $H^*(X^{\mathrm{an}}_t, \mathbb{Z})$ pour t tendant vers 0 (loc. cit.). Ils peuvent, eux aussi, se démontrer par réduction à la caractéristique $p > 0$ ([I5]). Pour T de caractéristique $p > 0$, et $f : X \longrightarrow S$ à réduction semi-stable le long de $E \subset S$, les complexes $\omega^\bullet_{X/S}$ et

$$\omega^\bullet_D = \mathcal{O}_D \otimes_{\mathcal{O}_S} \omega^\bullet_{X/S} \tag{7.3.6}$$

(où $D = E \times_S X$) donnent en effet lieu à des isomorphismes de Cartier (du type de 3.5), et, sous des hypothèses de relevabilité modulo p^2 convenables, $\tau_{<p} F_* \omega^\bullet_{X/S}$ et $\tau_{<p} F_* \omega^\bullet_D$ se décomposent (dans $D(X')$) (voir [I5] 2.2 pour un énoncé précis, qui généralise 7.2, et divers corollaires (énoncés de dégénérescence et d'annulation)).

7.4. Le complexe $\omega_D^\bullet$ ci-dessus ne dépend pas seulement de D, mais de X/S. Il n'en dépend toutefois que localement (au voisinage de D). En cherchant à élucider la structure supplémentaire sur D nécessaire pour le définir, J.-M. Fontaine et l'auteur ont été conduits à introduire la notion de *structure logarithmique*. Celle-ci a donné lieu à une théorie, la *géométrie logarithmique*, extension naturelle de la théorie des schémas. Largement développée par K. Kato et son école, elle permet d'unifier les diverses constructions de complexes à pôles logarithmiques envisagés ci-dessus et de considérer les variétés toriques de Mumford et al. et les morphismes à réduction semi-stable comme cas particuliers d'une nouvelle notion de lissité, voir [I6] pour une introduction. Les résultats de décomposition, de dégénérescence et d'annulation précédents admettent des généralisations dans ce cadre, voir [Ka2] et [Og2].

B. Dégénérescence mod p^n et cristaux

7.5. Le théorème de décomposition 5.1 a été obtenu initialement comme sous-produit des travaux d'Ogus [Og1], Fontaine-Messing [F-M] et Kato [Ka1] en cohomologie cristalline (voir [I4] pour un panorama de cette théorie). Le lien (un peu technique) entre 5.1 et le point de vue cristallin est expliqué dans [D-I] 2.2 (iv). Bornons-nous à énoncer un résultat de dégénérescence mod p^n ([F-M], [Ka1]) analogue à 5.6 :

Théorème 7.6. *Soient k un corps parfait de caractéristique $p > 0$, $W = W(k)$ l'anneau des vecteurs de Witt sur k, X un W-schéma propre et lisse de dimension relative $< p$. Alors, pour tout entier $n \geqslant 1$, la suite spectrale de Hodge vers De Rham*

$$E_1^{ij} = H^j(X_n, \Omega^i_{X_n/W_n}) \Longrightarrow H^{i+j}_{\mathrm{DR}}(X_n/W_n) \tag{7.6.1}$$

dégénère en E_1, $W_n = W_n(k) = W/p^nW$ désignant l'anneau des vecteurs de Witt de longueur n sur k et X_n le schéma sur W_n déduit de X par réduction modulo p^n (i.e. par extension des scalaires de W à W_n).

7.7. Pour $n = 1$, on a $W_n = k$ et l'on retrouve l'énoncé 5.6, à cela près que, dans 7.6, on suppose donné un relèvement de X sur W (plutôt que sur W_2)[20]. Sous les hypothèses de 7.6, il n'est pas vrai en général, pour $n \geqslant 2$, que le complexe de De Rham $\Omega^\bullet_{X_n/W_n}$ (qui est, a priori, seulement un complexe de faisceaux de W_n-modules sur X_n (ou X_1, X_n et X_1 ayant le même espace sous-jacent)) soit décomposable dans la catégorie dérivée correspondante $D(X_1, W_n)$. Toutefois, les résultats d'Ogus ([Og1] 8.20) impliquent que, si σ désigne l'automorphisme de Frobenius

[20] En fait, Ogus a montr – mais c'est plus difficile – qu'tant donn $n \geqslant 1$ et Z propre et lisse sur W_n de dimension $< p$, alors, si Z admet un relEvement (propre et lisse) sur W_{n+1}, la suite spectrale de Hodge vers De Rham de Z/W_n dgnEre en E_1 ([Og2] 8.2.6) ; ce rsultat gnralise vritablement 5.6.

de W_n, $\sigma^*\Omega^\bullet_{X_n/W_n}$ est isomorphe, dans la catégorie dérivée $D(X_1, W_n)$ des faisceaux de W_n-modules sur X_1, au complexe $\Omega^\bullet_{X_n/W_n}(p)$ déduit de $\Omega^\bullet_{X_n/W_n}$ en multipliant la différentielle par p (NB. pour $n = 1$, on a $\Omega^\bullet_{X_n/W_n}(p) = \bigoplus \Omega^i_{X_1/k}[-i]$). La conclusion de 7.6 en découle aisément, ainsi que diverses propriétés supplémentaires de $H^*_{\mathrm{DR}}(X_n/W_n)$ (structure dite “de Fontaine-Laffaille” – comprenant notamment le fait que la filtration de Hodge est formée de facteurs directs), voir [F-M] et [Ka1].

7.8. Les résultats de dégénérescence et de décomposition dont nous avons parlé jusqu' à présent portent sur des complexes de De Rham de schémas, éventuellement à pôles logarithmiques. On peut, plus généralement, considérer des complexes de De Rham à coefficients dans des modules à connexion intégrable. Plusieurs généralisations de ce type ont été obtenues : pour des coefficients de Gauss-Manin [I5], des faisceaux de modules de Fontaine-Laffaille [Fa2], des T-cristaux [Og2] (ces derniers objets fournissant d'ailleurs une généralisation commune des deux précédents).

C. Problèmes ouverts

7.9. Soient k un corps parfait de caractéristique $p > 0$, X un k-schéma lisse, de dimension d, X' le schéma déduit de X par changement de base par l'automorphisme de Frobenius de k, $F : X \longrightarrow X'$ le Frobenius relatif (3.1). On a vu en 5.9 (1) (a) (avec $S = \operatorname{Spec} k$, $T = \operatorname{Spec} W_2(k)$) que les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) X' – ou, ce qui revient au même ici, X – se relève (en un schéma propre et lisse) sur $W_2(k)$;

(ii) $\tau_{\leqslant 1} F_* \Omega^\bullet_{X/k}$ est décomposable dans $D(X')$ (4.6) ;

(iii) $\tau_{<p} F_* \Omega^\bullet_{X/k}$ est décomposable dans $D(X')$.

Nous dirons que X est DR-*décomposable* si $F_*\Omega^\bullet_{X/k}$ est décomposable (dans $D(X')$). Comme on l'a observé en 5.2, cette condition équivaut, compte tenu de l'isomorphisme de Cartier (3.5), à l'existence d'un isomorphisme

$$\bigoplus \Omega^i_{X'/k}[-i] \xrightarrow{\sim} F_*\Omega^\bullet_{X/k}$$

de $D(X')$ induisant C^{-1} sur $\mathcal{H}^i$. Les arguments de 5.6 et 5.8 montrent que :

(a) si X est propre sur k et DR-décomposable, la suite spectrale de Hodge vers De Rham de X/k dégénère en E_1 ;

(b) si X est projectif sur k, purement de dimension d, et DR-décomposable, et si L est un faisceau inversible ample sur X, on a les résultats d'annulation à la Kodaira-Akizuki-Nakano (5.8.1) et (5.8.2).

En vertu de l'équivalence entre les conditions (i) et (ii) ci-dessus, une condition nécessaire pour que X soit DR-décomposable est que X se relève sur $W_2(k)$.

D'après [D-I], elle est suffisante si $d \leqslant p$ (5.5 et 5.9 (3)). On ignore si elle l'est en général :

Problème 7.10. *Soit X un k-schéma lisse de dimension $d > p$, relevable sur $W_2(k)$. Est-ce que X est DR-décomposable ?*

7.11. Rappelons (5.5.1) que si X et F se relèvent sur $W_2(k)$, X est DR-décomposable ; c'est le cas si X est affine, ou est un espace projectif sur k. Comme il est signalé dans [D-I] 2.6 (iv), si X est relevable sur $W_2(k)$ et si, pour tout entier $n \geqslant 1$, le morphisme de produit $(\Omega^1_{X/k})^{\otimes n} \longrightarrow \Omega^n_{X/k}$ admet une section, X est DR-décomposable (voir 8.1 pour une démonstration) ; cette seconde condition est vérifiée notamment si X est *parallélisable*, i.e. si $\Omega^1_{X/k}$ est un $\mathcal{O}_X$-module libre (ou, ce qui revient au même, le fibré tangent $T_{X/k}$, dual de $\Omega^1_{X/k}$, est trivial), donc par exemple si X est une *variété abélienne*. Par un théorème de Grothendieck (cf. [Oo] et [I7] Appendice 1), toute variété abélienne sur k se relève sur $W_2(k)$ (et même sur $W(k)$). Donc toute variété abélienne sur k est DR-décomposable. Une autre classe intéressante de k-schémas relevables (sur $W(k)$) est formée des *intersections complètes* dans $\mathbb{P}^r_k$ (voir l'exposé de Deligne (SGA 7 XI) pour les définitions et propriétés de base de ces objets). Mais on ignore si celles-ci sont DR-décomposables. Le premier cas inconnu est celui d'une quadrique (lisse) de dimension 3 en caractéristique 2. On ignore également si les *grassmanniennes*, et plus généralement, les *variétés de drapeaux*, qui sont, elles aussi relevables sur $W(k)$, sont DR-décomposables (le seul exemple connu est l'espace projectif !).

Le problème 7.10, avec “relevable sur $W_2(k)$” remplacé par “relevable sur $W(k)$”, est tout aussi ouvert. Par contre, on ne peut remplacer “relevable sur $W(k)$” par “relevable sur A”, où A est une extension *totalement ramifiée* de $W(k)$ (= anneau de valuation discrète complet, fini et plat sur $W(k)$, de corps résiduel k, et de degré > 1 sur $W(k)$) : Lang [L] a en effet construit, en toute caractéristique $p > 0$, une k-surface projective lisse X relevable sur un tel anneau A de degré 2 sur $W(k)$ telle que la suite spectrale de Hodge vers De Rham de X/k ne dégénère pas en E_1.

7.12. Les énoncés de décomposition auxquels on a fait allusion à la fin de 7.3 s'appliquent notamment à une *courbe lisse* S sur $T = \operatorname{Spec} k$ et à un schéma X sur S ayant réduction semi-stable le long d'un diviseur à croisements normaux $E \subset S$ (donc étale sur k), pourvu que certaines hypothèses de relevabilité modulo p^2 soient satisfaites. Plus précisément, si l'on suppose que :

(i) il existe un relèvement $(E^{\sim} \subset S^{\sim})$ de $(E \subset S)$ sur $W_2 = W_2(k)$ (avec $S^{\sim}$ lisse et $E^{\sim}$ diviseur à croisements normaux relatif, i.e. étale sur W_2), admettant un relèvement $F^{\sim} : S^{\sim} \longrightarrow S^{\sim}$ du Frobenius (absolu) de S tel que $(F^{\sim})^{-1}(E^{\sim}) = pE^{\sim}$ [21]

[21] Cette notation dsigne le diviseur dduit de $E^{\sim}$ par lvation Ë la puissance p-iËme de ses quations locales.

(ii) f se relève en $f^{\sim} : X^{\sim} \longrightarrow S^{\sim}$ ayant réduction semi-stable le long de $E^{\sim}$, alors $\tau_{<p}F_*\omega^{\bullet}_{X/S}$ et $\tau_{<p}F_*\omega^{\bullet}_D$ (où $D = E \times_S X$) sont décomposables, (et donc $F_*\omega^{\bullet}_{X/S}$ et $F_*\omega^{\bullet}_D$ le sont aussi si X est de dimension relative $< p$ sur S).

7.13. Le résultat relatif à $\omega^{\bullet}_D$ suggère le problème suivant en inégale caractéristique. Désignons maintenant par S le spectre de $W = W(k)$, et $E = \operatorname{Spec} k$ le point fermé de S. Soit X un S-schéma. Par analogie avec la définition donnée en 7.3, on dit que X a *réduction semi-stable* si, localement pour la topologie étale (sur X et sur S), X est lisse sur le sous-schéma de $\mathbb{A}^n_S = S[x_1, \ldots, x_n]$ d'équation $x_1 \cdots x_n = p$. Supposons que X ait réduction semi-stable. Alors X est un schéma régulier, sa fibre X_K au point générique $\operatorname{Spec} K$ de S ($K =$ le corps des fractions de W) est lisse, et sa fibre $D = E \times_S X$ au point fermé est un “diviseur à croisements normaux absolu” dans X. Dans cette situation, on définit un complexe $\omega^{\bullet}_{X/S}$ analogue à (7.3.1), qui est l'unique prolongement, à composantes localement libres de type fini, du complexe de De Rham de U sur S, où U est l'ouvert de lissité de X sur S ; si $X = S[x_1, \ldots, x_n]/(x_1 \cdots x_n - p)$, le $\mathcal{O}_X$-module $\omega^1_{X/S}$, considéré comme sous-faisceau de $\Omega^1_{X_K/K}$, s'identifie à $(\bigoplus \mathcal{O}_X dx_i/x_i)/\mathcal{O}_X(\sum dx_i/x_i)$. Le complexe $\omega^{\bullet}_D$, défini par la formule (7.3.6), est à composantes localement libres de type fini sur D, et coıncide avec le complexe de De Rham $\Omega^{\bullet}_{D/k}$ sur l'ouvert de lissité de D. On a $\omega^i_{X/S} = \Lambda^i \omega^1_{X/S}$ et $\omega^i_D = \Lambda^i \omega^1_D$. D'après un résultat de Hyodo [Hy] (généralisé par Kato dans [Ka2]), le complexe $\omega^{\bullet}_D$ donne lieu à un isomorphisme de Cartier $C^{-1} : \omega^i_{D'} \simeq \mathcal{H}^i F_*\omega^{\bullet}_D$. Les complexes $\omega^{\bullet}_{X/S}$ et $\omega^{\bullet}_D$ jouent un rôle important dans les développements récents de la théorie des périodes p-adiques (cf. [I4] pour un aperçu).

Problème 7.14. Avec les notations de 7.13, soit X un S-schéma semi-stable, de fibre D au point fermé de S. Est-ce que $\tau_{<p}F_*\omega^{\bullet}_D$ est décomposable (dans $D(D')$) ?

Noter que la décomposabilité de $\tau_{<p}F_*\omega^{\bullet}_D$ équivaut à celle de $\tau_{\leqslant 1}F_*\omega^{\bullet}_D$ (même argument que dans l'étape C de la démonstration de 5.1). La réponse est oui d'après 5.5 si X est *lisse* sur S (NB. ce qui était appelé X (resp. S) en 5.5 est ici D (resp. E)). La réponse est encore oui (pour des raisons de trivialité de cohomologie (cf. 4.6 (a))) si X est affine, ou si X est de dimension relative $\leqslant 1$. Mais le cas général est inconnu.

7.15. Enfin, en ce qui concerne les *théorèmes d'annulation*, signalons qu'on ne sait pas prouver, par des méthodes de caractéristique $p > 0$, les résultats classiques de Grauert-Riemenschneider ou Kawamata-Viehweg. On ne sait pas non plus généraliser 5.9 (5) en dimension > 2. Voir [E-V] pour une discussion de ces questions.

8. Appendice : paralllisabilit et ordinarit

Dans ce numéro, k désigne un corps parfait de caractéristique $p > 0$. On note $W_n = W_n(k)$ l'anneau des vecteurs de Witt de longueur n sur k. Nous commencerons par donner une démonstration du résultat mentionné en 7.11 :

Proposition 8.1. *Soit X un k-schéma lisse. Supposons que X se relève sur W_2 et que, pour tout $n \geqslant 1$, le morphisme produit $(\Omega^1_{X/k})^{\otimes n} \longrightarrow \Omega^n_{X/k}$ admette une section. Alors X est DR-décomposable* (7.9).

Nous utiliserons le lemme suivant :

Lemme 8.2. *Soient S et T comme en* 5.1, *X un schéma lisse sur S, Z' un relèvement (lisse) de X' sur T. Notons*

$$\varphi^1 : \Omega^1_{X'/S}[-1] \longrightarrow F_*\Omega^\bullet_{X/S}$$

l'homomorphisme $\varphi^1_{Z'}$ de $D(X')$ défini dans l'étape B de la démonstration de 5.1, *et, pour $n \geqslant 1$,*

$$\psi^n : (\Omega^1_{X'/S})^{\otimes n}[-n] \longrightarrow F_*\Omega^\bullet_{X/S}$$

l'homomorphisme composé $\pi \circ (\varphi^1)^{\overset{L}{\otimes} n}$, où $\pi : (F_*\Omega^\bullet_{X/S})^{\overset{L}{\otimes} n} \longrightarrow F_*\Omega^\bullet_{X/S}$ est l'homomorphisme produit. Notons également $\pi : (\Omega^1_{X'/S})^{\otimes n} \longrightarrow \Omega^n_{X'/S}$ l'homomorphisme produit. Alors, pour toute section locale ω de $(\Omega^1_{X'/S})^{\otimes n}$, on a

$$\mathcal{H}^n\psi^n(\omega) = C^{-1} \circ \pi(\omega),$$

où $C^{-1} : \Omega^n_{X'/S} \longrightarrow \mathcal{H}^n F_*\Omega^\bullet_{X/S}$ est l'isomorphisme de Cartier.

Il suffit de le vérifier pour ω de la forme $\omega_1 \otimes \cdots \otimes \omega_n$, où ω_i est une section locale de $\Omega^1_{X'/S}$. Par fonctorialité, en les $E_i \in D(X')$, du produit

$$\mathcal{H}^1 E_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{H}^1 E_n \longrightarrow \mathcal{H}^n(E_1 \overset{L}{\otimes} \cdots \overset{L}{\otimes} E_n), \qquad a_1 \otimes \cdots \otimes a_n \longmapsto a_1 \cdots a_n,$$

on a

$$\mathcal{H}^n((\varphi^1)^{\overset{L}{\otimes} n})(\omega_1 \otimes \cdots \otimes \omega_n) = (\mathcal{H}^1\varphi^1)(\omega_1) \cdots (\mathcal{H}^1\varphi^1)(\omega_n)$$

dans $\mathcal{H}^n((F_*\Omega^\bullet_{X/S})^{\overset{L}{\otimes} n})$. Comme $\mathcal{H}^1\varphi^1 = C^{-1}$, il s'ensuit que

$$\mathcal{H}^n\psi^n(\omega_1 \otimes \cdots \otimes \omega_n) = C^{-1}(\omega_1) \wedge \cdots \wedge C^{-1}(\omega_n)$$

dans $\mathcal{H}^n F_*\Omega^\bullet_{X/S}$, et donc que

$$\mathcal{H}^n\psi^n(\omega_1 \otimes \cdots \otimes \omega_n) = C^{-1}(\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_n) = C^{-1} \circ \pi(\omega_1 \otimes \cdots \otimes \omega_n)$$

par la propriété multiplicative de l'isomorphisme de Cartier.

Prouvons maintenant 8.1. Choisissons, pour chaque n, une section s du produit $\pi : (\Omega^1_{X/k})^{\otimes n} \longrightarrow \Omega^n_{X/k}$. Notons encore π et s les morphismes relatifs à X' qui s'en déduisent. Choisissons (*cf.* 3.9) un relèvement Z' de X' sur W_2, et définissons ψ^n comme en 8.2, avec $\varphi^1 = \varphi^1_{Z'}$. Notons

$$\varphi^n : \Omega^n_{X'/k}[-n] \longrightarrow F_*\Omega^\bullet_{X/S}$$

le morphisme composé $\psi^n \circ s$ (où s désigne encore, par abus, la section correspondante de $(\Omega^1_{X/k}[-1])^{\otimes n} \longrightarrow \Omega^n_{X/k}[-n]$). Il s'agit de vérifier que $\mathcal{H}^n\varphi^n = C^{-1}$. Or, d'après 8.2, si a est une section locale de $\Omega^n_{X'/k}$,

$$\mathcal{H}^n\varphi^n(a) = (\mathcal{H}^n\psi^n)(sa) = C^{-1}(\pi sa) = C^{-1}(a),$$

ce qui achève la démonstration.

Corollaire 8.3. *Soit X un k-schéma lisse parallélisable, i.e. tel que le $\mathcal{O}_X$-module $\Omega^1_{X/k}$ soit libre (de type fini). Alors, pour que X soit DR-décomposable, il faut et il suffit que X se relève sur W_2.*

Il suffit de prouver la suffisance. On peut supposer k algébriquement clos. Choisissons un point rationnel x de X sur k et un *isomorphisme* $\alpha : \Omega^1_{X/k} \simeq f^*E$, où $f : X \longrightarrow \operatorname{Spec} k$ est la projection et E est le k-espace vectoriel $x^*(\Omega^1_{X/k})$. Via α, une section de l'homomorphisme surjectif $E^{\otimes n} \longrightarrow \Lambda^n E$ se prolonge en une section de $(\Omega^1_{X/k})^{\otimes n} \longrightarrow \Omega^n_{X/k}$. On conclut grâce à 8.1.

Rappelons (5.5.1) la définition suivante :

Définition 8.4. *Soit X un k-schéma propre et lisse. On dit que X est ordinaire si, pour tout (i,j), on a $H^j(X, B\Omega^i_{X/k}) = 0$, où $B\Omega^i_{X/k} = d\Omega^{i-1}_{X/k}$ est le faisceau des bords, en degré i, du complexe de De Rham.*

Cette condition équivaut à $H^j(X', F_*B\Omega^i_{X/k}) = 0$ pour tout (i,j). Rappelons (3.6) que $F_*B\Omega^i_{X/k} = B^iF_*\Omega^\bullet_{X/k}$ et $F_*Z\Omega^i_{X/k} = Z^iF_*\Omega^\bullet_{X/k}$ sont des $\mathcal{O}_{X'}$-modules localement libres de type fini.

8.5. Pour un k-schéma propre et lisse X donné, il existe un lien, mis en évidence par Mehta et Srinivas [Me-Sr], entre les propriétés d'être DR-décomposable, parallélisable, et ordinaire. Ce lien s'exprime par le biais d'une notion voisine de celle de DR-décomposabilité, introduite antérieurement par Mehta et Ramanathan [Me-Ra], qui est la suivante. On dit qu'un k-schéma lisse X est *Frobenius-décomposé* ("Frobenius-split") si l'homomorphisme canonique $\mathcal{O}_{X'} \longrightarrow F_*\mathcal{O}_X$ admet une rétraction, i.e. la suite exacte de $\mathcal{O}_{X'}$-modules (cf. 3.5)

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{X'} \longrightarrow F_*\mathcal{O}_X \xrightarrow{d} F_*B\Omega^1_{X/k} \longrightarrow 0 \tag{8.5.1}$$

est scindée. Observons d'abord que *si X est Frobenius-décomposé*, X est relevable sur W_2 (ou, ce qui revient au même (5.9 (1) (a)), $\tau_{<p}F_*\Omega^\bullet_{X/k}$ est décomposable) : l'obstruction au relèvement, qui est la classe de l'extension

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{X'} \longrightarrow F_*\mathcal{O}_X \xrightarrow{d} F_*Z\Omega^1_{X/k} \xrightarrow{C} \Omega^1_{X'/k} \longrightarrow 0,$$

composée de (8.5.1) et de l'extension

$$0 \longrightarrow F_*B\Omega^1_{X/k} \longrightarrow F_*Z\Omega^1_{X/k} \xrightarrow{C} \Omega^1_{X'/k} \longrightarrow 0, \tag{8.5.2}$$

est nulle. On ignore en général si “Frobenius-décomposé” entraîne “DR-décomposable”. C’est le cas, d’après 8.3, si X est parallélisable. Mais la réciproque est fausse. On a en effet le résultat suivant ([Me-Sr] 1.1) : si X est un k-schéma propre et lisse, parallélisable, les conditions suivantes sont équivalentes :

(a) X est Frobenius décomposé ;

(b) l’extension (8.5.2) est scindée ;

(c) X est ordinaire ;

(d) (pour X purement de dimension d) l’homomorphisme $F^* : H^d(X', \mathcal{O}_{X'}) \longrightarrow H^d(X, \mathcal{O}_X)$ induit par Frobenius est un isomorphisme.

En particulier, si X est ordinaire et parallélisable, X se relève sur W_2 (Nori-Srinivas ([Me-Sr] Appendix) montrent en fait que, pour X projectif, X se relève en un schéma projectif lisse sur W). En outre – c’est le résultat principal de [Me-Sr] – si k est algébriquement clos et X connexe, il existe un revêtement étale galoisien $Y \longrightarrow X$ d’ordre une puissance de p tel que Y soit une variété abélienne.

Si X est projectif et lisse sur k, ordinaire et parallélisable, Nori-Srinivas (loc. cit.) montrent plus précisément qu’il existe un unique couple (Z, F_Z), où Z est un relèvement (projectif et lisse) de X sur W_2 (resp. W_n ($n \geqslant 2$ donné), resp. W) et $F_Z : Z \longrightarrow Z'$ un relèvement de $F : X \longrightarrow X'$, où Z' est l’image inverse de Z par l’automorphisme de Frobenius de W_2 (resp. W_n, resp. W). L’existence et l’unicité de ce relèvement, dit *canonique*, avaient été établies pour la première fois par Serre-Tate [Se-Ta] dans le cas des variétés abéliennes. Comme on l’a signalé en 5.5.1, ce résultat admet une réciproque, sans hypothèse de parallélisabilité :

Proposition 8.6. *Soit X un k-schéma propre et lisse. On suppose qu’il existe des schémas Z et Z' relevant respectivement X et X' sur W_2 et un W_2-morphisme $G : Z \longrightarrow Z'$ relevant $F : X \longrightarrow X'$* [22]. *Alors X est ordinaire.*

Ce résultat a été obtenu indépendamment par Nakkajima [Na].

8.7. Prouvons 8.6. Soient $G : Z \longrightarrow$ Z’ un relèvement de F et $\varphi = \varphi_G : \bigoplus \Omega^i_{X'}[-i] \longrightarrow F_*\Omega^\bullet_X$ l’homomorphisme de complexes associé, défini en (5.3.1) (on omet $/k$ de la notation des différentielles). Cet homomorphisme envoie $\Omega^i_{X'}$ dans $F_*Z\Omega^i_X$ (notations de 8.4) et scinde la suite exacte (cf. 3.5)

$$0 \longrightarrow F_*B\Omega^i_X \longrightarrow F_*Z\Omega^i_X \xrightarrow{C} \Omega^i_{X'} \longrightarrow 0. \tag{8.7.1}$$

Prouvons, par récurrence descendante sur i, que $H^*(X, B\Omega^i_X) = 0$ (i.e. que $H^n(X, B\Omega^i_X) = 0$ pour tout n). Pour $i > \dim X$, $B\Omega^i_X = 0$. Fixons i, supposons prouvé $H^*(X, B\Omega^j_X) = 0$ pour $j \geqslant i$, et prouvons que $H^*(X, B\Omega^{i-1}_X) = 0$. Par la suite exacte de cohomologie de la suite exacte

$$0 \longrightarrow F_*Z\Omega^{i-1}_X \longrightarrow F_*\Omega^{i-1}_X \xrightarrow{d} F_*B\Omega^i_X \longrightarrow 0, \tag{8.7.2}$$

[22] On ne suppose pas que Z' est l’image inverse de Z par le Frobenius de W_2.

l'hypothèse de récurrence entraîne que, pour tout n, on a

$$H^n(X', F_* Z\Omega_X^{i-1}) \xrightarrow{\sim} H^n(X, \Omega_X^{i-1}),$$

et donc

$$\dim H^n(X', F_* Z\Omega_X^{i-1}) = \dim H^n(X, \Omega_X^{i-1}) = \dim H^n(X', \Omega_{X'}^{i-1}). \tag{8.7.3}$$

La suite (8.7.1) (relative à $i-1$) étant scindée, la suite exacte de cohomologie donne des suites exactes courtes

$$0 \longrightarrow H^n(X', F_* B\Omega_X^{i-1}) \longrightarrow H^n(X', F_* Z\Omega_X^{i-1}) \xrightarrow{C} H^n(X', \Omega_{X'}^{i-1}) \longrightarrow 0.$$

L'égalité (8.7.3) entraîne que, dans celles-ci, C est un isomorphisme, et donc que $H^n(X', F_* B\Omega_X^{i-1}) = 0$, ce qui achève la démonstration.

Remarque 8.8. Le lecteur familier avec les structures logarithmiques aura noté que 8.6 et sa démonstration s'étendent au cas où k est remplacé par un point logarithmique $\underline{k} = (k, M)$ de point sous-jacent k et X par un log schéma $\underline{X} = (X, L)$ log lisse et de type de Cartier sur $\underline{k}$ ([Ka2]), propre sur k ; si l'on suppose que $(\underline{X}, \underline{F})$ se relève sur $W_2(\underline{k})$ (cf. [Hy-Ka] 3.1), alors $\underline{X}$ est ordinaire, i.e. $H^j(X, B\omega^i_{\underline{X}}) = 0$ pour tout i et tout j.

Bibliographie

[AkN] Y. Akizuki, S. Nakano, *Note on Kodaira-Spencer's proof of Lefschetz's theorem,* Proc. Jap. Acad. Sc. A 30 (1954), 266-272.

[A-W] M. Artin and G. Winters, *Degenerate fibers and reduction of curves,* Topology **10** (1971), 373-383.

[Be-Pe] J. Bertin et C. Peters, *Variations de structure de Hodge, varits de Calabi-Yau et symtrie miroir,* ce volume.

[B-L-R] S. Bosch, W. Lütkebohmert and M. Raynaud, *Nron Models,* Ergebnisse der Math. Bd **21**, Springer-Verlag (1990).

[C] P. Cartier, *Une nouvelle opration sur les formes diffrentielles,* C. R. Ac. Sc. Paris, **244** (1957), 426-428.

[C-E] H. Cartan and S. Eilenberg, *Homological Algebra,* Princeton Univ. Press (1956).

[D0] P. Deligne, *ThorÈme de Lefschetz et critÈres de dgnrescence de suites spectrales,* Publ. Math. IHES **35** (1968), 107-126.

[D1] P. Deligne, *Equations diffrentielles È points singuliers rguliers,* Lecture Notes in Math. **163**, Springer-Verlag (1970).

[D2] P. Deligne, *Thorie de Hodge II,* Pub. math. IHES **40** (1972), 5-57.

[D3] P. Deligne, *Dcompositions dans la catgorie drive,* Proc. Symp. Pure Math. **55** Part I (1994), 115-128.

[D-G] M. Demazure et P. Gabriel, *Groupes algbriques,* tome I, Masson et North-Holland Pub. Comp. (1970).

[D-I] P. Deligne et L. Illusie, *RelÈvements modulo p^2 et dcomposition du complexe de De Rham,* Inv. Math. **89** (1987), 247-270.

[D-M] P. Deligne and D. Mumford, *The irreducibility of the space of curves of given genus,* Pub. IHES **36** (1969), 75-109.

[De] J.-P. Demailly, *Thorie de Hodge L^2 et thorEmes d'annulation,* ce volume.

[E-V] H. Esnault and E. Viehweg, *Lectures on vanishing theorems,* DMV Seminar Band **20**, Birkhäuser Verlag (1992).

[Fa1] G. Faltings, *p-adic Hodge Theory,* Journal of the AMS **1** (1988), 255-299.

[Fa2] G. Faltings, *Crystalline cohomology and p-adic Galois representations,* Algebraic Analysis, Geometry and Number Theory, The Johns Hopkins Univ. Press 1989, 25-80.

[F-M] J.-M. Fontaine and W. Messing, *p-adic periods and p-adic tale cohomology,* Contemp. Math. **67** (179-207), 1987.

[G] A. Grothendieck, *ModEles de Nron et monodromie,* Exp. IX in SGA 7, 313-523.

[GAGA] J.-P. Serre, *Gomtrie algbrique et gomtrie analytique,* Ann. Inst. Fourier **6** (1956), 1-42.

[Gi] J. Giraud, *Cohomologie non ablienne,* Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften **179**, Springer-Verlag (1971).

[Go] R. Godement, *Topologie algbrique et thorie des faisceaux,* Hermann (1958).

[H1] R. Hartshorne, *Residues and Duality,* Springer Lecture Notes in Math. **20**, Springer-Verlag (1966).

[H2] R. Hartshorne, *Algebraic Geometry,* Graduate Texts in Math. **20**, Springer-Verlag 1977.

[Hy] O. Hyodo, *A note on p-adic tale cohomology in the semi-stable reduction case,* Inv. Math. **91** (1988), 543-557.

[Hy-Ka] O. Hyodo and K. Kato, *Semi-stable reduction and crystalline cohomology with logarithmic poles,* in Priodes p-adiques (Sminaire de Bures, 1988 ; J.-M. Fontaine, ed.), 221-268, Astrisque **223** (1994).

[I1] L. Illusie, *Complexe cotangent et dformations, I et II,* Springer Lecture Notes in Math. **239** et **283**, Springer-Verlag (1971, 1972).

[I2] L. Illusie, *Complexe de De Rham-Witt et cohomologie cristalline,* Ann. ENS **12** (1979), 501-661.

[I3] L. Illusie, *Catgories drives et dualit,* travaux de J.-L. Verdier, L'enseignement mathmatique **36** (1990), 369-391.

[I4] L. Illusie, *Crystalline Cohomology,* Proc. Symp. Pure Math. **55** Part I (1994), 43-70.

[I5] L. Illusie, *Rduction semi-stable et dcomposition de complexes de De Rham E coefficients,* Duke math. J. **60** (1990), 139-185.

[I6] L. Illusie, *Logarithmic spaces (according to K. Kato),* in Barsotti Symposium in Algebraic Geometry (V. Cristante and W. Messing, Eds.), Perspectives in Math. **15**, 183-203, Academic Press (1994).

[I7] L. Illusie, *Dformations de groupes de Barsotti-Tate,* in Sminaire sur les pinceaux arithmtiques : la conjecture de Mordell (L. Szpiro, ed.), Astrisque **127**, SMF 1985, 151-198.

[K1] N. Katz, *Nilpotent Connections and the Monodromy Theorem,* Pub. Math. IHES **39** (1970), 175-232.

[K2] N. Katz, *The regularity theorem in algebraic geometry,* Actes Cong. Int. Math. Nice (1970) I, 437-443, Gauthiers-Villars (1971).

[Ka1] K. Kato, *On p-adic vanishing cycles (applications of ideas of Fontaine-Messing),* Advanced studies in Pure Math. **10** (1987), 207-251.

[Ka2] K. Kato, *Logarithmic structures of Fontaine-Illusie,* Algebraic Analysis, Geometry and Number Theory, The Johns Hopkins Univ. Press (1989), 191-224.

[KAN] K. Kodaira, *On a differential-geometric method in the theory of analytic stacks,* Proc. Nat. Ac. Sc. USA **39** (1953), 1268-1273.

[L] W. Lang, *Examples of Liftings of Surfaces and a Problem in de Rham Cohomology,* preprint (1994).

[M] D. Mumford, *Semi-stable reduction,* in Toroidal Embeddings I (G. Kempf, F. Knudsen, D. Mumford, and B. Saint-Donat eds.), Lecture Notes in Math. **339**, Springer-Verlag 1973, 53-108.

[Me-Ra] V. B. Mehta and A. Ramanathan, *Frobenius splitting and cohomology vanishing for Schubert varieties,* Ann. Math. **122** (1985), 27-40.

[Me-Sr] V. B. Mehta and V. Srinivas, *Varieties in positive characteristic with trivial tangent bundle (with an appendix by M. V. Nori and V. Srinivas, Canonical liftings),* Compos. Math. **64** (1987), 191-212.

[Na] Y. Nakkajima, *Liftings of Frobenius over W_2 and ordinary logarithmic schemes,* preprint, Dept of Math. Sciences, Tokyo, 1994.

[O] J. Oesterl, *Dgnrescence de la suite spectrale de Hodge vers De Rham (d'aprÈs Deligne et Illusie),* Sminaire Bourbaki n° 673 (1986-87), Astrisque **152-153** (1987), 67-83.

[Og1] A. Ogus, *Frobenius and the Hodge filtration,* in Notes on Crystalline Cohomology (by P. Berthelot and A. Ogus), Math. Notes **21**, Princeton Univ. Press (1978).

[Og2] A. Ogus, *F-crystals, Griffiths transversality, and the Hodge decomposition,* Astrisque **221**, SMF (1994).

[Oo] F. Oort, *Finite group schemes, local moduli for abelian varieties and lifting problems,* Proc. 5th Nordic Summer School, Walters-Noordhoff (1970), 223-254.

[Ram] C. P. Ramanujam, *Remarks on the Kodaira Vanishing theorem,* J. Indian Math. Soc. **36** (1972), 41-51; **38** (1974), 121-124.

[S] J.-P. Serre, *Corps locaux,* Hermann (1962).

[Se-Ta] J.-P. Serre and J. Tate, *Good reduction of abelian varieties,* Ann. Math. **88** (1968), 492-517.

[Sr] V. Srinivas, *Decomposition of the De Rham complex,* Proc. Indian Acad. Sci. (Math. Sci.), **100**, n° 2 (1990), 103-106.

[St] J. Steenbrink, *Limits of Hodge structures,* Inv. Math. **31** (1976), 229-257.

[V] J.-L. Verdier, *Catgories drives, Etat 0,* dans SGA 4 1/2, Cohomologie tale, par P. Deligne, Springer Lecture Notes in Math. **569**, Springer-Verlag (1977).

EGA A. Grothendieck et J. Dieudonn, *Elments de gomtrie algbrique, I, II, III, IV,* Pub. Math. IHES **4, 8, 11, 17, 20, 24, 28, 32** et Grundlehren **166**, Springer-Verlag (1971).

SGA 1 A. Grothendieck et al., *Revêtements tales et groupe fondamental,* Springer Lecture Notes in Math. **224**, Springer-Verlag (1971).

SGA 5 A. Grothendieck et al., *Cohomologie ℓ-adique et fonctions L,* Springer Lecture Notes in Math. **589**, Springer-Verlag (1977).

SGA 6 A. Grothendieck et al., *Thorie des intersections et thorÈme de Riemann-Roch,* Springer Lecture Notes in Math. **225**, Springer-Verlag (1971).

SGA 7 A. Grothendieck et al., *Groupes de monodromie en gomtrie algbrique,* Sminaire de gomtrie algbrique du Bois-Marie 1967-69, dirig par A. Grothendieck, I. Lecture Notes in Math. **288**, Springer-Verlag 1972, II. Lecture Notes in Math. **340**, Springer-Verlag 1973.