Théorie de Hodge L^2 et Théorèmes d'annulation

Jean-Pierre Demailly
Université de Grenoble I
Institut Fourier, BP 74
38402 Saint-Martin d'Hères, France

Sommaire

§0. Introduction

L'objet de ces notes est de décrire deux applications fondamentales des techniques hilbertiennes L^2 à la géométrie analytique ou algébrique : la théorie de Hodge d'une part, la théorie des estimations L^2 pour l'opérateur $\overline{\partial}$ d'autre part. Le point de vue adopté ici sera essentiellement analytique.

La première partie est consacrée à la théorie de Hodge et se veut avant tout introductive. Le lecteur ne trouvera donc ici que les aspects les plus élémentaires, dus pour la plupart à W.V.D. Hodge lui-même [Hod41] ou à A. Weil [Wei57]. La théorie de Hodge, dans le sens premier conçu par son créateur, consiste en l'étude de la cohomologie des variétés riemanniennes ou kählériennes, à partir d'une description des formes harmoniques et de leurs propriétés. Nous renvoyons aux textes de J. Bertin-Ch. Peters [BePe95] et L. Illusie [Ill95] pour une présentation d'aspects et d'applications plus avancés (variations de structures de Hodge, application des périodes, théorie de Hodge en caractéristique > 0 ...). Considérons une variété riemannienne X et un fibré euclidien ou hermitien E sur X. On suppose que E est muni d'une connexion D compatible avec la métrique : une connexion est par définition un opérateur de dérivation analogue à la différentiation extérieure, agissant sur les formes de degré quelconque à valeurs dans E, et satisfaisant la règle de Leibniz pour le produit extérieur. L'*opérateur de Laplace-Beltrami* associé est l'opérateur différentiel autoadjoint du second ordre $\Delta_E = D_E D_E^\star + D_E^\star D_E$, où $D_E^\star$ est l'adjoint hilbertien de D_E. On vérifie aisément que Δ_E est un *opérateur elliptique*. Le théorème de finitude pour les opérateurs elliptiques montre alors que l'espace $\mathcal{H}^q(X,E)$ des q-formes harmoniques à valeurs dans E est de dimension finie si X est compacte (on dit qu'une forme u est harmonique si $\Delta_E u = 0$). Si on suppose de plus que la connexion est telle que $D_E^2 = 0$, l'opérateur D_E agissant sur les formes de tous degrés définit un complexe appelé *complexe de De Rham* à valeurs dans le système local de coefficients défini par E. Les groupes de cohomologie correspondants seront notés $H^q_{\mathrm{DR}}(X,E)$. L'observation fondamentale de la théorie de Hodge est que toute classe de cohomologie contient un unique représentant harmonique dès lors que X est compacte. Il en résulte alors un isomorphisme, dit *isomorphisme de Hodge*

$$H^q_{\mathrm{DR}}(X,E) \simeq \mathcal{H}^q_{\mathrm{DR}}(X,E). \tag{0.1}$$

Lorsque la variété X et le fibré E sont holomorphes, il existe une connexion unique D_E appelée *connexion de Chern*, compatible avec la métrique hermitienne de E et ayant les propriétés suivantes : D_E se scinde en la somme $D_E = D'_E + D''_E$ d'une connexion D'_E de type $(1,0)$ et d'une connexion D''_E de type $(0,1)$, telles que $D'^2_E = D''^2_E = 0$ et $D'_E D''_E + D''_E D'_E = \Theta(E)$ (tenseur de courbure de Chern du fibré). L'opérateur D''_E agissant sur les formes de bidegré (p,q) définit alors pour p fixé un complexe appelé *complexe de Dolbeault*. Lorsque X est compacte, les groupes de cohomologie de Dolbeault $H^{p,q}(X,E)$ satisfont un isomorphisme de Hodge analogue à (0.1), à savoir

$$H^{p,q}(X,E) \simeq \mathcal{H}^{p,q}(X,E), \tag{0.2}$$

où $\mathcal{H}^{p,q}(X,E)$ désigne l'espace des (p,q)-formes harmoniques à valeurs dans E, relativement au Laplacien anti-holomorphe $\Delta''_E = D''_E D''^{\star}_E + D''^{\star}_E D''_E$. En utilisant ce dernier résultat, on démontre facilement le *théorème de dualité de Serre*

$$(0.3) \qquad H^{p,q}(X,E)^\star \simeq H^{n-p,n-q}(X,E^\star), \qquad n = \dim_{\mathbb{C}} X,$$

qui est le pendant complexe du théorème de dualité de Poincaré. Le théorème central de la théorie de Hodge concerne les variétés kählériennes compactes : une variété hermitienne (X,ω) est dite *kählérienne* si la $(1,1)$-forme hermitienne $\omega = \mathrm{i}\sum_{j,k}\omega_{jk}dz_j\wedge d\overline{z}_k$ est telle que $d\omega = 0$. Un exemple fondamental de variété kählérienne compacte est donné par les variétés algébriques projectives. Si X est kählérienne compacte et si E est un système local de coefficients sur X, le *théorème de décomposition de Hodge* affirme que

$$(0.4) \qquad H^k_{\mathrm{DR}}(X,E) = \bigoplus_{p+q=k} H^{p,q}(X,E) \qquad \text{(décomposition de Hodge)}$$

$$(0.5) \qquad \overline{H^{p,q}(X,E)} \simeq H^{q,p}(X,E^\star), \qquad \text{(symétrie de Hodge).}$$

Le caractère intrinsèque de la décomposition sera démontré ici de manière quelque peu originale, via l'utilisation des groupes de cohomologie de Bott-Chern (groupes de $\partial\overline{\partial}$-cohomologie). Il découle de ces résultats que les nombres de Hodge $h^{p,q} = \dim_{\mathbb{C}} H^{p,q}(X,\mathbb{C})$ vérifient la propriété de symétrie $h^{p,q} = h^{q,p} = h^{n-p,n-q} = h^{n-q,n-p}$, et qu'ils sont liés aux nombres de Betti $b_k = \dim_{\mathbb{C}} H^k_{\mathrm{DR}}(X,\mathbb{C})$ par la relation $b_k = \sum_{p+q=k} h^{p,q}$. Un certain nombre d'autres propriétés cohomologiques remarquables des variétés kählériennes compactes s'obtient au moyen de la décomposition primitive et du théorème de Lefschetz difficile (lequel résulte à son tour de l'existence d'une action de $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ sur les formes harmoniques). Ces résultats permettent de décrire de façon précise la structure du groupe de Picard $\mathrm{Pic}(X) = H^1(X,\mathcal{O}^\star)$ dans le cas kählérien. Dans un contexte plus général, nous explicitons la suite spectrale de Hodge-Frölicher (suite spectrale reliant la cohomologie de Dolbeault à la cohomologie de De Rham), et nous montrons comment on peut utiliser cette suite spectrale pour obtenir quelques résultats généraux sur les nombres de Hodge $h^{p,q}$ des variétés complexes compactes. Finalement, nous établissons la semi-continuité des dimensions des groupes de cohomologie $H^q(X_t,E_t)$ sur les fibres d'une fibration holomorphe propre et lisse $\mathcal{X}\to S$ (résultat dû à Kodaira-Spencer), et nous en déduisons que les nombres de Hodge $h^{p,q}(X_t)$ sont constants si les fibres X_t sont kählériennes (invariance des $h^{p,q}$ par déformations) ; le caractère holomorphe de la filtration de Hodge $F^pH^k(X_t,\mathbb{C}) = \bigoplus_{r\geqslant p} H^{r,k-r}(X_t,\mathbb{C})$ relativement à la connexion de Gauss-Manin est démontré au moyen du théorème de cohérence des images directes, appliqué au complexe de De Rham relatif $\Omega^\bullet_{\mathcal{X}/S}$ de $\mathcal{X}\to S$.

Dans la seconde partie, après quelques rappels sur les notions de positivité et pseudoconvexité mises en jeu, nous établissons l'*identité de Bochner-Kodaira-Nakano* reliant les Laplaciens Δ'_E et Δ''_E. L'identité en question fournit une expression explicite de la différence $\Delta''_E - \Delta'_E$ en termes de la courbure $\Theta(E)$ du fibré. Sous des hypothèses adéquates (faible pseudoconvexité de X, positivité de la courbure de E), on aboutit à une estimation a priori

$$\|D''_E u\|^2 + \|D''^{\star}_E u\|^2 \geqslant \int_X \lambda(z)|u|^2 dV(z)$$

où λ est une fonction positive dépendant des valeurs propres de courbure. L'inégalité est ici valide pour toute forme u de bidegré (n,q), $n = \dim X$, $q \geqslant 1$, à valeurs dans E, appartenant aux domaines hilbertiens u de D''_E et $D''^{\star}_E$. Par un argument de dualité hilbertien, on déduit de là le théorème fondamental suivant, dû essentiellement à Hörmander [Hör65] et Andreotti-Vesentini [AV65].

0.6. Théorème. *Soit (X,ω) une variété kählérienne, $\dim X = n$. Supposons que X soit faiblement pseudoconvexe. Soit E un fibré en droites hermitien et soient*

$$\gamma_1(x) \leqslant \cdots \leqslant \gamma_n(x)$$

les valeurs propres de la forme de courbure $\mathrm{i}\,\Theta(E)$ par rapport à la métrique ω en tout point. Supposons que la courbure soit semi-positive, i.e. $\gamma_1 \geqslant 0$ partout. Alors pour toute forme $g \in L^2(X, \Lambda^{n,q}T^{\star}_X \otimes E)$ telle que

$$D''_E g = 0 \quad \textit{et} \qquad \int_X (\gamma_1 + \cdots + \gamma_q)^{-1}|g|^2\, dV_\omega < +\infty,$$

il existe $f \in L^2(X, \Lambda^{n,q-1}T^{\star}_X \otimes E)$ telle que

$$D''_E f = g \quad \textit{et} \qquad \int_X |f|^2\, dV_\omega \leqslant \int_X (\gamma_1 + \cdots + \gamma_q)^{-1}|g|^2\, dV_\omega.$$

Une observation importante est que le théorème ci-dessus reste encore valable lorsque la métrique h de E présente des singularités. La métrique h est alors donnée dans chaque carte par un poids $\mathrm{e}^{-2\varphi}$ associé à une fonction φ plurisousharmonique (par définition φ est psh si la matrice des dérivées secondes $(\partial^2\varphi/\partial z_j\partial\overline{z}_k)$, calculée au sens des distributions, est semi-positive en tout point). Compte tenu du Théorème (0.6), il est naturel d'introduire le *faisceau d'idéaux multiplicateur* $\mathcal{I}(h) = \mathcal{I}(\varphi)$, constitué des germes de fonctions holomorphes $f \in \mathcal{O}_{X,x}$ telles que $\int_V |f|^2\mathrm{e}^{-2\varphi}$ converge dans un voisinage V de x assez petit. Un résultat récent de A. Nadel [Nad89] garantit que $\mathcal{I}(\varphi)$ est toujours un faisceau analytique cohérent, quelles que soient les singularités de φ. Dans ce contexte, on déduit de (0.6) la version qualitative suivante, concernant la cohomologie à valeurs dans le faisceau cohérent $\mathcal{O}(K_X \otimes E) \otimes \mathcal{I}(h)$ ($K_X = \Lambda^n T^{\star}_X$ étant le *fibré canonique* de X).

0.7. Théorème d'annulation de Nadel ([Nad89], [Dem93b]). *Soit (X,ω) une variété kählérienne faiblement pseudoconvexe, et soit E un fibré en droites holomorphe sur X muni d'une métrique hermitienne h singulière de poids φ.*

Supposons qu'il existe une fonction continue positive ε *sur* X *telle que la courbure satisfasse l'inégalité* $\mathrm{i}\,\Theta_h(E) \geqslant \varepsilon\omega$ *au sens des courants. Alors*

$$H^q\big(X, \mathcal{O}(K_X \otimes E) \otimes \mathcal{I}(h)\big) = 0 \qquad \textit{pour tout } q \geqslant 1.$$

En dépit de la relative simplicité des techniques mises en jeu, il s'agit là d'un théorème extrêmement puissant, qui contient à lui seul une bonne partie des résultats les plus fondamentaux de la géométrie analytique ou algébrique. Le théorème (0.7) contient ainsi la solution du problème de Levi (équivalence de la convexité holomorphe et de la pseudoconvexité), les théorèmes d'annulation de Kodaira-Serre, Kodaira-Akizuki-Nakano et de Kawamata-Viehweg pour les variétés algébriques projectives, de même que le théorème de plongement de Kodaira caractérisant ces variétés parmi les variétés complexes compactes. Par son caractère intrinsèque, l'énoncé "analytique" du théorème de Nadel se révèle utile même pour des applications purement algébriques (la version algébrique du théorème, connue sous le nom de théorème d'annulation de Kawamata-Viehweg, utilise la résolution des singularités et ne donne pas une description aussi nette du faisceau multiplicateur $\mathcal{I}(h)$). Dans un travail récent [Siu96], Y.T. Siu a montré le résultat remarquable suivant, en utilisant seulement la formule de Riemann-Roch et un argument de récurrence Noethérienne pour les faisceaux multiplicateurs. La technique est décrite au § 16 (avec quelques améliorations mises au point dans [Dem96]).

0.8. Théorème ([Siu96], [Dem96]). *Soit* X *une variété projective et* L *un fibré en droites ample (i.e. à courbure positive) sur* X*. Alors le fibré* $K_X^{\otimes 2} \otimes L^{\otimes m}$ *est très ample pour* $m \geqslant m_0(n) = 2 + \binom{3n+1}{n}$*, où* $n = \dim X$*.*

L'importance d'avoir une borne effective pour l'entier $m_0(n)$ est qu'on peut ainsi obtenir des plongements de la variété X dans l'espace projectif, avec un contrôle précis du degré du plongement. Il résulte de là une démonstration assez simple d'un théorème de finitude important, à savoir le "*grand théorème de Matsusaka*" (cf. [Mat72], [KoM83], [Siu93], [Dem96]) :

0.9. Grand théorème de Matsusaka. *Soit* X *une variété projective et* L *un fibré en droites ample sur* X*. Il existe une borne* $m_1 = m_1(n, L^n, K_X \cdot L^{n-1})$ *explicite ne dépendant que de la dimension* $n = \dim X$ *et des deux premiers coefficients du polynôme de Hilbert de* L*, telle que* mL *soit très ample pour* $m \geqslant m_1$*.*

De ce théorème, on déduit facilement de nombreux résultats de finitude, en particulier le fait qu'il existe seulement un nombre fini de familles de déformations de variétés projectives polarisées (X, L), lorsque L est un fibré ample dont les nombres d'intersection L^n et $K_X \cdot L^{n-1}$ sont donnés.

Partie I : Théorie de Hodge L^2

§1. Fibrés vectoriels, connexions et courbure

Le but de cette section est de rappeler quelques définitions de base de géométrie différentielle hermitienne liées aux concepts de connexion, courbure et première classe de Chern d'un fibré en droites.

§1.A. Cohomologie de Dolbeault et cohomologie des faisceaux

Soit X une variété $\mathbb{C}$-analytique de dimension n. Nous désignons par $\Lambda^{p,q}T^\star_X$ le fibré des formes différentielles de bidegré (p,q) sur X, i.e., les formes différentielles qui peuvent s'écrire

$$u = \sum_{|I|=p,\,|J|=q} u_{I,J} dz_I \wedge d\overline{z}_J, \qquad dz_I := dz_{i_1} \wedge \cdots \wedge dz_{i_p}, \quad d\overline{z}_J := d\overline{z}_{j_1} \wedge \cdots \wedge d\overline{z}_{j_q},$$

où $(z_1, \ldots, z_n)$ désignent des coordonnées locales holomorphes, et où $I = (i_1, \ldots, i_p)$ et $J = (j_1, \ldots, j_q)$ sont des multi-indices (suites croissantes d'entiers de l'intervalle $[1, \ldots, n]$, de longueurs $|I| = p$, $|J| = q$). Soit $\mathcal{A}^{p,q}$ le faisceau des germes de formes différentielles de bidegré (p,q) à valeurs complexes et à coefficients C^∞. Rappelons que la différentielle extérieure d se décompose en $d = d' + d''$ où

$$d'u = \sum_{|I|=p,\,|J|=q, 1\leqslant k\leqslant n} \frac{\partial u_{I,J}}{\partial z_k} dz_k \wedge dz_I \wedge d\overline{z}_J,$$
$$d''u = \sum_{|I|=p,\,|J|=q, 1\leqslant k\leqslant n} \frac{\partial u_{I,J}}{\partial \overline{z}_k} d\overline{z}_k \wedge dz_I \wedge d\overline{z}_J$$

sont de type $(p+1,q)$, $(p,q+1)$ respectivement. Le lemme bien-connu de Dolbeault-Grothendieck affirme que toute forme d''-fermée de type (p,q) avec $q > 0$ est localement d''-exacte (c'est l'analogue pour d'' du lemme usuel de Poincaré pour d, voir par exemple [Hör66]). En d'autres termes, le complexe de faisceaux $(\mathcal{A}^{p,\bullet}, d'')$ est exact en degré $q > 0$; en degré $q = 0$, $\operatorname{Ker} d''$ est le faisceau Ω^p_X des germes de formes holomorphes de degré p sur X.

Plus généralement, si E est un fibré vectoriel holomorphe de rang r sur X, il existe un opérateur d'' naturel agissant sur l'espace $C^\infty(X, \Lambda^{p,q}T^\star_X \otimes E)$ des (p,q)-formes C^∞ à valeurs dans E. En effet, si $s = \sum_{1\leqslant\lambda\leqslant r} s_\lambda e_\lambda$ est une (p,q)-forme exprimée en termes d'un repère holomorphe local de E, on peut définir $d''s := \sum d''s_\lambda \otimes e_\lambda$, en observant que les matrices de transition mises en jeu dans des changements de repères holomorphes sont holomorphes, ce qui n'affecte pas le calcul de d''. Il est alors clair que le lemme de Dolbeault-Grothendieck est encore valable pour des formes à valeurs dans E. Pour tout entier $p = 0, 1, \ldots, n$, les *groupes de cohomologie de Dolbeault* $H^{p,q}(X,E)$ sont définis comme étant les groupes de cohomologie du complexe des formes globales de type (p,q) (gradué par q) :

$$H^{p,q}(X,E) = H^q\big(C^\infty(X, \Lambda^{p,\bullet}T^\star_X \otimes E)\big). \tag{1.1}$$

Maintenant, rappelons le résultat fondamental suivant de théorie des faisceaux (théorème d'isomorphisme de De Rham-Weil) : soit $(\mathcal{L}^\bullet, d)$ une résolution d'un faisceau $\mathcal{F}$ par des faisceaux acycliques, i.e. un complexe de faisceaux $(\mathcal{L}^\bullet, \delta)$ donnant une suite exacte de faisceaux

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{j} \mathcal{L}^0 \xrightarrow{\delta^0} \mathcal{L}^1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow \mathcal{L}^q \xrightarrow{\delta^q} \mathcal{L}^{q+1} \longrightarrow \cdots ,$$

avec $H^s(X, \mathcal{L}^q) = 0$ pour tout $q \geqslant 0$ et $s \geqslant 1$ (pour avoir cette dernière condition d'acyclicité, il suffit par exemple que les $\mathcal{L}^q$ soient flasques ou mous, par exemple des faisceaux de modules sur le faisceau d'anneau $\mathcal{C}^\infty$). Alors il y a un isomorphisme fonctoriel

$$H^q\big(\Gamma(X, \mathcal{L}^\bullet)\big) \longrightarrow H^q(X, \mathcal{F}). \tag{1.2}$$

Nous appliquons ceci dans la situation suivante : soit $\mathcal{A}^{p,q}(E)$ le faisceau de germes de sections C^∞ de $\Lambda^{p,q}T^\star_X \otimes E$. Alors $(\mathcal{A}^{p,\bullet}(E), d'')$ est une résolution du $\mathcal{O}_X$-module localement libre $\Omega^p_X \otimes \mathcal{O}(E)$ (lemme de Dolbeault-Grothendieck), et les faisceaux $\mathcal{A}^{p,q}(E)$ sont acycliques comme $\mathcal{C}^\infty$-modules. Grâce à (1.2) nous obtenons

1.3. Théorème d'isomorphisme de Dolbeault (1953)**.** *Pour tout fibré vectoriel holomorphe E sur X, il existe un isomorphisme canonique*

$$H^{p,q}(X, E) \simeq H^q(X, \Omega^p_X \otimes \mathcal{O}(E)). \qquad \square$$

Si X est algébrique projective et si E est un fibré vectoriel algébrique, le théorème GAGA de Serre [Ser56] montre que les groupes de cohomologie algébrique $H^q(X, \Omega^p_X \otimes \mathcal{O}(E))$ calculés avec les sections algébriques des faisceaux concernés sur des ouverts de Zariski sont isomorphes aux groupes de cohomologie analytiques correspondants. Comme nous utiliserons ici un point de vue exclusivement analytique, nous n'aurons en fait pas besoin de ce théorème de comparaison.

§1.B. Connexions sur les variétés différentiables

Soit E un fibré vectoriel réel ou complexe de rang r sur une variété différentiable M de classe C^∞. Une *connexion* D sur E est un opérateur différentiel linéaire d'ordre 1

$$D : C^\infty(M, \Lambda^q T^\star_M \otimes E) \to C^\infty(M, \Lambda^{q+1} T^\star_M \otimes E)$$

tel que D satisfasse la règle de Leibnitz

$$D(f \wedge u) = df \wedge u + (-1)^{\deg f} f \wedge Du \tag{1.4}$$

pour toutes formes $f \in C^\infty(M, \Lambda^p T^\star_M)$, $u \in C^\infty(X, \Lambda^q T^\star_M \otimes E)$. Sur un ouvert $\Omega \subset M$ où E admet une trivialisation $\tau : E_{|\Omega} \xrightarrow{\simeq} \Omega \times \mathbb{C}^r$, une connexion D peut s'écrire

$$Du \simeq_\tau du + \Gamma \wedge u$$

où $\Gamma \in C^\infty(\Omega, \Lambda^1 T^\star_M \otimes \mathrm{Hom}(\mathbb{C}^r, \mathbb{C}^r))$ est une matrice arbitraire de 1-formes et où d agit composantes par composantes sur $u \simeq_\tau (u_\lambda)_{1\leqslant\lambda\leqslant r}$. Il est alors facile de vérifier que

$$D^2 u \simeq_\tau (d\Gamma + \Gamma \wedge \Gamma) \wedge u \quad \text{sur } \Omega.$$

Puisque D^2 est un opérateur globalement défini, il existe une 2-forme globale

$$\Theta(D) \in C^\infty(M, \Lambda^2 T^\star_M \otimes \mathrm{Hom}(E, E)) \tag{1.5}$$

telle que $D^2 u = \Theta(D) \wedge u$ pour toute forme u à valeurs dans E. Cette 2-forme $\Theta(D)$ à valeurs dans $\mathrm{Hom}(E, E)$ est appelée tenseur de courbure de la connexion D.

Supposons maintenant que E soit muni d'une métrique euclidienne (resp. hermitienne) de classe C^∞ et que l'isomorphisme $E_{|\Omega} \simeq \Omega \times \mathbb{C}^r$ soit donné par un repère (e_λ) de classe C^∞. Nous avons alors un accouplement bilinéaire (resp. sesquilinéaire) canonique

$$\begin{aligned} C^\infty(M, \Lambda^p T^\star_M \otimes E) \times C^\infty(M, \Lambda^q T^\star_M \otimes E) &\longrightarrow C^\infty(M, \Lambda^{p+q} T^\star_M \otimes \mathbb{C}) \\ (u, v) &\longmapsto \{u, v\} \end{aligned} \tag{1.6}$$

donné par

$$\{u, v\} = \sum_{\lambda,\mu} u_\lambda \wedge \overline{v}_\mu \ \langle e_\lambda, e_\mu \rangle, \qquad u = \sum u_\lambda \otimes e_\lambda, \quad v = \sum v_\mu \otimes e_\mu.$$

La connexion D est dite *hermitienne* si elle satisfait la propriété supplémentaire

$$d\{u, v\} = \{Du, v\} + (-1)^{\deg u}\{u, Dv\}.$$

En supposant que (e_λ) est orthonormé, on vérifie aisément que D est hermitienne si et seulement si $\Gamma^\star = -\Gamma$. Dans ce cas $\Theta(D)^\star = -\Theta(D)$, donc

$$\mathrm{i}\,\Theta(D) \in C^\infty(M, \Lambda^2 T^\star_M \otimes \mathrm{Herm}(E, E)).$$

1.7. Cas particulier. Pour un fibré en droites complexe L (fibré vectoriel complexe de rang 1), la forme de connexion Γ d'une connexion hermitienne D peut être vue comme une 1-forme à coefficients purement imaginaires $\Gamma = \mathrm{i}A$ (A réelle). Nous avons alors $\Theta(D) = d\Gamma = \mathrm{i}\,dA$. En particulier $\mathrm{i}\,\Theta(L)$ est une 2-forme fermée. La *première classe de Chern* de L est définie comme étant la classe de cohomologie

$$c_1(L)_\mathbb{R} = \Big\{\frac{\mathrm{i}}{2\pi}\Theta(D)\Big\} \in H^2_{\mathrm{DR}}(M, \mathbb{R}).$$

Cette classe de cohomologie est bien indépendante de la connexion, puisque toute autre connexion D_1 diffère par une 1-forme globale, $D_1 u = Du + B \wedge u$, de sorte que $\Theta(D_1) = \Theta(D) + dB$. Il est bien-connu que $c_1(L)_\mathbb{R}$ est l'image dans $H^2(M, \mathbb{R})$ d'une classe entière $c_1(L) \in H^2(M,\mathbb{Z})$. Soit en effet $\mathcal{A} = \mathcal{C}^\infty$ le faisceau des fonctions C^∞ sur M ; grâce à la suite exacte exponentielle

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \mathcal{A} \xrightarrow{e^{2\pi i \bullet}} \mathcal{A}^\star \longrightarrow 0,$$

$c_1(L)$ peut être définie en cohomologie de Čech comme l'image du cocycle $\{g_{jk}\} \in H^1(M,\mathcal{A}^\star)$ définissant L par l'application cobord $H^1(M,\mathcal{A}^\star) \to H^2(M,\mathbb{Z})$; voir par exemple [GH78] pour plus de détails. □

§1.C. Connexions sur les variétés complexes

Nous étudions maintenant les propriétés spécifiques des connexions liées à l'existence d'une structure complexe sur la variété de base. Si $M = X$ est une variété complexe, toute connexion D sur un fibré vectoriel complexe E de classe C^∞ peut être scindée de manière unique comme somme d'une $(1,0)$-connexion et d'une $(0,1)$-connexion, $D = D' + D''$. Dans une trivialisation locale τ donnée par un repère C^∞, on peut écrire

$$D'u \simeq_\tau d'u + \Gamma' \wedge u, \tag{1.8$'$}$$

$$D''u \simeq_\tau d''u + \Gamma'' \wedge u, \tag{1.8$''$}$$

avec $\Gamma = \Gamma' + \Gamma''$. La connexion est hermitienne si et seulement si $\Gamma' = -(\Gamma'')^\star$ relativement à tout repère orthonormé. Par conséquent, il existe une unique connexion hermitienne D associée à une $(0,1)$-connexion prescrite D''.

Supposons maintenant que le fibré E lui-même possède une structure *holomorphe*. L'unique connexion hermitienne dont la composante D'' est l'opérateur d'' défini au §1.A est appelée la *connexion de Chern* de E. Dans un repère holomorphe local (e_λ) de $E_{|\Omega}$, la métrique est donnée par la matrice hermitienne $H = (h_{\lambda\mu})$ où $h_{\lambda\mu} = \langle e_\lambda, e_\mu\rangle$. Nous avons

$$\{u,v\} = \sum_{\lambda,\mu} h_{\lambda\mu} u_\lambda \wedge \overline{v}_\mu = u^\dagger \wedge H\overline{v},$$

où $u^\dagger$ est la matrice transposée de u, et un calcul facile donne

$$\begin{aligned} d\{u,v\} &= (du)^\dagger \wedge H\overline{v} + (-1)^{\deg u} u^\dagger \wedge (dH \wedge \overline{v} + H\overline{dv}) \\ &= \big(du + \overline{H}^{-1} d'\overline{H} \wedge u\big)^\dagger \wedge H\overline{v} + (-1)^{\deg u} u^\dagger \wedge \big(\overline{dv + \overline{H}^{-1} d'\overline{H} \wedge v}\big), \end{aligned}$$

en utilisant le fait que $dH = d'H + \overline{d'\overline{H}}$ et $\overline{H}^\dagger = H$. Par conséquent la connexion de Chern D coïncide avec la connexion hermitienne définie par

$$\begin{cases} Du \simeq_\tau du + \overline{H}^{-1} d'\overline{H} \wedge u, \\ D' \simeq_\tau d' + \overline{H}^{-1} d'\overline{H} \wedge \bullet = \overline{H}^{-1} d'(\overline{H}\bullet), \qquad D'' = d''. \end{cases} \tag{1.9}$$

Ces relations montrent que $D'^2 = D''^2 = 0$. Par conséquent $D^2 = D'D'' + D''D'$, et le tenseur de courbure $\Theta(D)$ est de type $(1,1)$. Puisque $d'd'' + d''d' = 0$, nous obtenons

$$(D'D'' + D''D')u \simeq_\tau \overline{H}^{-1} d'\overline{H} \wedge d''u + d''(\overline{H}^{-1} d'\overline{H} \wedge u) = d''(\overline{H}^{-1} d'\overline{H}) \wedge u.$$

1.10. Proposition. *Le tenseur de courbure de Chern $\Theta(E) := \Theta(D)$ est tel que*

$$\mathrm{i}\,\Theta(E) \in C^\infty(X, \Lambda^{1,1}T^\star_X \otimes \mathrm{Herm}(E,E)).$$

Si $\tau : E_{\restriction\Omega} \to \Omega \times \mathbb{C}^r$ est une trivialisation holomorphe et si H est la matrice hermitienne représentant la métrique le long des fibres de $E_{\restriction\Omega}$, alors

$$\mathrm{i}\,\Theta(E) \simeq_\tau \mathrm{i}\,d''(\overline{H}^{-1} d'\overline{H}) \quad \textit{sur } \Omega. \qquad \square$$

Si $(z_1, \ldots, z_n)$ sont des coordonnées holomorphes sur X et si $(e_\lambda)_{1\leqslant\lambda\leqslant r}$ est un repère orthonormé de E, on peut écrire

$$\text{(1.11)} \qquad \mathrm{i}\,\Theta(E) = \sum_{1\leqslant j,k\leqslant n,\ 1\leqslant\lambda,\mu\leqslant r} c_{jk\lambda\mu} dz_j \wedge d\overline{z}_k \otimes e^\star_\lambda \otimes e_\mu,$$

où $(c_{jk\lambda\mu}(x))$ sont les coefficients du tenseur de courbure de E en tout point $x \in X$.

§2. Opérateurs différentiels sur les fibrés vectoriels

Nous décrivons d'abord quelques concepts de base concernant les opérateurs différentiels (symbole, composition, ellipticité, adjonction), dans le contexte général des fibrés vectoriels. Soit M une variété différentiable de classe C^∞, $\dim_\mathbb{R} M = m$, et soient E, F des $\mathbb{K}$-fibrés vectoriels sur M, sur le corps $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, tels que $\mathrm{rang}\, E = r$, $\mathrm{rang}\, F = r'$.

2.1. Définition. *Un opérateur différentiel (linéaire) de degré δ de E vers F est un opérateur $\mathbb{K}$-linéaire $P : C^\infty(M,E) \to C^\infty(M,F)$, $u \mapsto Pu$ de la forme*

$$Pu(x) = \sum_{|\alpha|\leqslant\delta} a_\alpha(x) D^\alpha u(x),$$

$E_{\restriction\Omega} \simeq \Omega \times \mathbb{K}^r$, $F_{\restriction\Omega} \simeq \Omega \times \mathbb{K}^{r'}$ étant trivialisés localement sur un ouvert de carte $\Omega \subset M$ muni de coordonnées locales $(x_1, \ldots, x_m)$, et les coefficients $a_\alpha(x)$ étant des matrices $\big(a_{\alpha\lambda\mu}(x)\big)_{1\leqslant\lambda\leqslant r',\,1\leqslant\mu\leqslant r}$ de format $r' \times r$ à coefficients C^∞ sur Ω. On écrit ici $D^\alpha = (\partial/\partial x_1)^{\alpha_1} \cdots (\partial/\partial x_m)^{\alpha_m}$ comme d'habitude, et les matrices $u = (u_\mu)_{1\leqslant\mu\leqslant r}$, $D^\alpha u = (D^\alpha u_\mu)_{1\leqslant\mu\leqslant r}$ sont vues comme des vecteurs colonnes.

Si $t \in \mathbb{K}$ est un paramètre et $f \in C^\infty(M,\mathbb{K})$, $u \in C^\infty(M,E)$, un calcul simple montre que $\mathrm{e}^{-tf(x)}P(\mathrm{e}^{tf(x)}u(x))$ est un polynôme de degré δ en t, de la forme

$$\mathrm{e}^{-tf(x)}P(\mathrm{e}^{tf(x)}u(x)) = t^\delta \sigma_P(x, df(x)) \cdot u(x) + \text{termes } c_j(x)t^j \text{ de degré } j < \delta,$$

où σ_P est une application homogène polynômiale $T^\star_M \to \mathrm{Hom}(E,F)$ définie par

$$(2.2)\qquad T^\star_{M,x} \ni \xi \mapsto \sigma_P(x,\xi) \in \mathrm{Hom}(E_x,F_x), \qquad \sigma_P(x,\xi) = \sum_{|\alpha|=\delta} a_\alpha(x)\xi^\alpha.$$

Alors $\sigma_P(x,\xi)$ est une fonction C^∞ des variables $(x,\xi) \in T^\star_M$, et cette fonction est indépendante du choix des coordonnées ou des trivialisations utilisées pour E, F. On dit que σ_P est *le symbole principal* de P. Le symbole principal d'une composition $Q \circ P$ d'opérateurs différentiels est simplement le produit

$$(2.3)\qquad \sigma_{Q\circ P}(x,\xi) = \sigma_Q(x,\xi)\sigma_P(x,\xi),$$

calculé comme un produit de matrices. Les opérateurs différentiels dont le symbole est injectif jouent un rôle très important :

2.4. Définition. *Un opérateur différentiel P est dit elliptique si $\sigma_P(x,\xi) \in \mathrm{Hom}(E_x,F_x)$ est injectif pour tout $x \in M$ et $\xi \in T^\star_{M,x} \smallsetminus \{0\}$.*

Supposons maintenant que M soit orientée et munie d'une forme volume $dV(x) = \gamma(x)\,dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_m$ de classe C^∞, où $\gamma(x) > 0$ est une densité C^∞. Si E est un fibré vectoriel euclidien ou hermitien, nous pouvons définir un espace de Hilbert $L^2(M,E)$ de sections globales à valeurs dans E, à savoir l'espace des formes u à coefficients mesurables qui sont de carré sommable pour le produit scalaire

$$(2.5)\qquad \|u\|^2 = \int_M |u(x)|^2\,dV(x),$$

$$(2.5')\qquad \langle\!\langle u,v\rangle\!\rangle = \int_M \langle u(x),v(x)\rangle\,dV(x), \qquad u,v \in L^2(M,E).$$

2.6. Définition. *Si $P : C^\infty(M,E) \to C^\infty(M,F)$ est un opérateur différentiel et si les fibrés E, F sont euclidiens ou hermitiens, il existe un unique opérateur différentiel*

$$P^\star : C^\infty(M,F) \to C^\infty(M,E),$$

appelé adjoint formel de P, tel que pour toutes sections $u \in C^\infty(M,E)$ et $v \in C^\infty(M,F)$ on ait une identité

$$\langle\!\langle Pu,v\rangle\!\rangle = \langle\!\langle u,P^\star v\rangle\!\rangle, \qquad \textit{chaque fois que } \mathrm{Supp}\,u \cap \mathrm{Supp}\,v \subset\subset M.$$

Preuve. L'unicité est facile à vérifier, grâce à la densité des formes C^∞ à support compact dans $L^2(M,E)$. Au moyen d'un argument de partition de l'unité, on ramène la vérification de l'existence de $P^\star$ à la preuve de son existence locale. Maintenant, soit $Pu(x) = \sum_{|\alpha|\leqslant\delta} a_\alpha(x)D^\alpha u(x)$ le développement de P relativement à des trivialisations de E, F associées à des repères orthonormé et à des systèmes de coordonnées locales sur un ouvert $\Omega \subset M$. En supposant $\operatorname{Supp} u \cap \operatorname{Supp} v \subset\subset \Omega$, une intégration de parties donne

$$\begin{aligned}\langle\!\langle Pu, v\rangle\!\rangle &= \int_\Omega \sum_{|\alpha|\leqslant\delta,\lambda,\mu} a_{\alpha\lambda\mu} D^\alpha u_\mu(x) \overline{v}_\lambda(x)\,\gamma(x)\,dx_1, \ldots, dx_m \\ &= \int_\Omega \sum_{|\alpha|\leqslant\delta,\lambda,\mu} (-1)^{|\alpha|} u_\mu(x) \overline{D^\alpha(\gamma(x)\,\overline{a}_{\alpha\lambda\mu} v_\lambda(x)}\,dx_1, \ldots, dx_m \\ &= \int_\Omega \langle u, \sum_{|\alpha|\leqslant\delta} (-1)^{|\alpha|}\gamma(x)^{-1} D^\alpha\big(\gamma(x)\,\overline{a}_\alpha^\dagger v(x)\big)\rangle\,dV(x).\end{aligned}$$

Nous voyons donc que $P^\star$ existe et qu'il est défini de manière unique par

$$P^\star v(x) = \sum_{|\alpha|\leqslant\delta} (-1)^{|\alpha|}\gamma(x)^{-1} D^\alpha\big(\gamma(x)\,\overline{a}_\alpha^\dagger v(x)\big). \square \tag{2.7}$$

La formule (2.7) montre immédiatement que le symbole principal de $P^\star$ est

$$\sigma_{P^\star}(x,\xi) = (-1)^\delta \sum_{|\alpha|=\delta} \overline{a}_\alpha^\dagger \xi^\alpha = (-1)^\delta \sigma_P(x,\xi)^\star. \tag{2.8}$$

Si $\operatorname{rang} E = \operatorname{rang} F$, l'opérateur P est elliptique si et seulement si $\sigma_P(x,\xi)$ est inversible pour $\xi \neq 0$, l'ellipticité de P équivaut donc à celle de $P^\star$.

§3. Résultats fondamentaux sur les opérateurs elliptiques

Nous supposons dans toute cette section que M est une variété *compacte orientée* de dimension m et de classe C^∞, munie d'une forme volume dV. Soit $E \to M$ un fibré vectoriel hermitien C^∞ de rang r sur M.

§3.A. Espaces de Sobolev

Pour tout nombre réel s, on définit l'espace de Sobolev $W^s(\mathbb{R}^m)$ comme étant l'espace de Hilbert des distributions tempérées $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$ telles que la transformée de Fourier $\widehat{u}$ soit une fonction L^2_{loc} satisfaisant l'estimation

$$\|u\|_s^2 = \int_{\mathbb{R}^m} (1+|\xi|^2)^s |\widehat{u}(\xi)|^2 d\lambda(\xi) < +\infty. \tag{3.1}$$

Si $s \in \mathbb{N}$, nous avons

$$\|u\|_s^2 \sim \int_{\mathbb{R}^m} \sum_{|\alpha|\leqslant s} |D^\alpha u(x)|^2 d\lambda(x),$$

donc $W^s(\mathbb{R}^m)$ est l'espace de Hilbert des fonctions u telles que toutes les dérivées $D^\alpha u$ d'ordre $|\alpha| \leqslant s$ sont dans $L^2(\mathbb{R}^m)$.

Plus généralement, nous notons $W^s(M,E)$ l'espace de Sobolev des sections $u : M \to E$ dont les composantes sont localement dans $W^s(\mathbb{R}^m)$ sur tout ouvert de carte. De façon précise, choisissons un recouvrement fini (Ω_j) de M par des ouverts de coordonnées $\Omega_j \simeq \mathbb{R}^m$ sur lesquels E est trivial. Considérons des repères orthonormés $(e_{j,\lambda})_{1\leqslant\lambda\leqslant r}$ de $E_{\restriction\Omega_j}$ et exprimons u par ses composantes, soit $u = \sum u_{j,\lambda}\, e_{j,\lambda}$. On pose alors

$$\|u\|_s^2 = \sum_{j,\lambda} \|\psi_j u_{j,\lambda}\|_s^2$$

où (ψ_j) est un "partition de l'unité" subordonnée à (Ω_j), telle que $\sum \psi_j^2 = 1$. A équivalence de normes près, $\|\ \ \|_s$ est indépendante des choix faits. Nous aurons besoin des faits fondamentaux suivants, que le lecteur pourra trouver dans la plupart des ouvrages spécialisés consacrés à la théorie des équations aux dérivées partielles.

3.2. Lemme de Sobolev. *Pour tout entier $k \in \mathbb{N}$ et tout nombre réel $s > k + \frac{m}{2}$, on a $W^s(M,E) \subset C^k(M,E)$ et l'inclusion est continue.* □

Il résulte aussitôt du lemme de Sobolev que

$$\bigcap_{s\geqslant 0} W^s(M,E) = C^\infty(M,E),$$
$$\bigcup_{s\leqslant 0} W^s(M,E) = \mathcal{D}'(M,E).$$

3.3. Lemme de Rellich. *Pour tout $t > s$, l'inclusion*

$$W^t(M,E) \hookrightarrow W^s(M,E)$$

est un opérateur linéaire compact. □

§3.B. Opérateurs pseudodifférentiels

Si $P = \sum_{|\alpha|\leqslant\delta} a_\alpha(x) D^\alpha$ est un opérateur différentiel sur $\mathbb{R}^m$, la formule d'inversion de Fourier donne

$$Pu(x) = \int_{\mathbb{R}^m} \sum_{|\alpha|\leqslant\delta} a_\alpha(x)(2\pi\mathrm{i}\xi)^\alpha \widehat{u}(\xi)\, \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}x\cdot\xi}\, d\lambda(\xi), \qquad \forall u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^m),$$

où $\widehat{u}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^m} u(x)\, \mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}x\cdot\xi}\, d\lambda(x)$ est la transformée de Fourier de u. Nous disons que

$$\sigma(x,\xi) = \sum_{|\alpha|\leqslant\delta} a_\alpha(x)(2\pi\mathrm{i}\xi)^\alpha$$

est le symbole (ou symbole total) de P.

Un *opérateur pseudodifférentiel* est un opérateur Op_σ défini par une formule du type

$$(3.4)\qquad \mathrm{Op}_\sigma(u)(x) = \int_{\mathbb{R}^m} \sigma(x,\xi)\,\widehat{u}(\xi)\,\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}x\cdot\xi}\,d\lambda(\xi), \qquad u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^m),$$

où σ appartient à une classe convenable de fonctions sur $T^\star_{\mathbb{R}^m}$. La classe standard de symboles $S^\delta(\mathbb{R}^m)$ est définie comme suit : étant donné $\delta \in \mathbb{R}$, $S^\delta(\mathbb{R}^m)$ est la classe des fonctions $\sigma(x,\xi)$ de classe C^∞ sur $T^\star_{\mathbb{R}^m}$ telles que pour tout $\alpha,\beta \in \mathbb{N}^m$ et tout sous-ensemble compact $K \subset \mathbb{R}^m$ on ait une estimation

$$(3.5)\qquad |D_x^\alpha D_\xi^\beta \sigma(x,\xi)| \leqslant C_{\alpha,\beta}(1+|\xi|)^{\delta-|\beta|}, \qquad \forall (x,\xi) \in K \times \mathbb{R}^m,$$

où $\delta \in \mathbb{R}$ doit être considéré comme le “degré” de σ. Alors $\mathrm{Op}_\sigma(u)$ est une fonction C^∞ bien définie sur $\mathbb{R}^m$, puisque $\widehat{u}$ appartient à la classe $\mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$ des fonctions à décroissance rapide. Dans la situation plus générale des opérateurs agissant sur un fibré E et à valeurs dans un fibré F sur une variété compacte M, nous introduisons des espaces de symboles $S^\delta(M;E,F)$ analogues. Les éléments de $S^\delta(M;E,F)$ sont les fonctions

$$T^\star_M \ni (x,\xi) \mapsto \sigma(x,\xi) \in \mathrm{Hom}(E_x,F_x)$$

satisfaisant la condition (3.5) dans tout système de coordonnées. Finalement, nous prenons un recouvrement fini trivialisant (Ω_j) de M et une “partition de l'unité” (ψ_j) subordonnée à Ω_j telle que $\sum \psi_j^2 = 1$, et nous définissons

$$\mathrm{Op}_\sigma(u) = \sum \psi_j\,\mathrm{Op}_\sigma(\psi_j u), \qquad u \in C^\infty(M,E),$$

de manière à réduire les calculs à la situation de $\mathbb{R}^m$. Les résultats de base de la théorie des opérateurs pseudodifférentiels sont résumés ci-dessous.

3.6. Existence de prolongement aux espaces W^s. *Si $\sigma \in S^\delta(M;E,F)$, alors Op_σ s'étend d'une manière unique en un opérateur linéaire continu*

$$\mathrm{Op}_\sigma : W^s(M,E) \to W^{s-\delta}(M,F). \qquad \square$$

En particulier, si $\sigma \in S^{-\infty}(M;E,F) := \bigcap S^\delta(M;E,F)$, alors Op_σ est un opérateur envoyant une section distribution arbitraire de $\mathcal{D}'(M,E)$ dans $C^\infty(M,F)$, et ce de manière continue. Un tel opérateur est appelé *opérateur régularisant*. Un résultat standard de la théorie des distributions affirme que la classe $\mathcal{R}$ des opérateurs régularisants coïncide avec la classe des opérateurs définis au moyen d'un noyau $K(x,y) \in \mathrm{Hom}(E_y,F_x)$ de classe C^∞, c'est-à-dire les opérateurs de la forme

$$R : \mathcal{D}'(M,E) \to C^\infty(M,F), \qquad u \mapsto Ru, \qquad Ru(x) = \int_M K(x,y)\cdot u(y)\,dV(y).$$

Inversement, si $dV(y) = \gamma(y)dy_1 \cdots dy_m$ sur Ω_j et si on écrit $Ru = \sum R(\theta_j u)$ avec une partition de l'unité (θ_j), l'opérateur $R(\theta_j \bullet)$ est l'opérateur pseudodifférentiel associé au symbole σ défini comme la transformée de Fourier partielle

$$\sigma(x, \xi) = \big(\gamma(y)\theta_j(y)K(x, y)\big)^{\wedge}_{y}(x, \xi), \qquad \sigma \in S^{-\infty}(M; E, F).$$

Quand on travaille avec des opérateurs pseudodifférentiels, il est habituel de travailler seulement modulo les opérateurs régularisants et d'autoriser des opérateurs plus généraux de la forme $\mathrm{Op}_\sigma + R$ où $R \in \mathcal{R}$ est un opérateur régularisant arbitraire.

3.7. Composition. *Si $\sigma \in S^\delta(M; E, F)$ et $\sigma' \in S^{\delta'}(M; F, G)$, $\delta, \delta' \in \mathbb{R}$, il existe un symbole $\sigma' \diamond \sigma \in S^{\delta+\delta'}(M; E, G)$ tel que $\mathrm{Op}_{\sigma'} \circ \mathrm{Op}_\sigma = \mathrm{Op}_{\sigma' \diamond \sigma}$ mod $\mathcal{R}$. De plus*

$$\sigma' \diamond \sigma - \sigma' \cdot \sigma \in S^{\delta+\delta'-1}(M; E, G).$$

3.8. Définition. *Un opérateur pseudodifférentiel Op_σ de degré δ est dit elliptique s'il peut être défini par un symbole $\sigma \in S^\delta(M, E, F)$ tel que*

$$|\sigma(x, \xi) \cdot u| \geqslant c|\xi|^\delta |u|, \qquad \forall (x, \xi) \in T^\star_M, \quad \forall u \in E_x$$

pour $|\xi|$ assez grand, l'estimation étant uniforme pour $x \in M$.

Si E et F ont le même rang, la condition d'ellipticité implique que $\sigma(x, \xi)$ est inversible pour ξ grand. En prenant une fonction tronquante convenable $\theta(\xi)$ égale à 1 pour ξ grand, on voit que la fonction $\sigma'(x, \xi) = \theta(\xi)\sigma(x, \xi)^{-1}$ définit un symbole dans l'espace $S^{-\delta}(M; F, E)$, et d'après (3.8) nous avons $\mathrm{Op}_{\sigma'} \circ \mathrm{Op}_\sigma = \mathrm{Id} + \mathrm{Op}_\rho$, $\rho \in S^{-1}(M; E, E)$. Choisissons un symbole τ asymptotiquement équivalent à l'infini au développement $\mathrm{Id} - \rho + \rho^{\diamond 2} + \cdots + (-1)^j \rho^{\diamond j} + \cdots$. Il est clair qu'on obtient alors un inverse $\mathrm{Op}_{\tau \diamond \sigma'}$ de Op_σ modulo $\mathcal{R}$. Un corollaire facile de ces observations est le suivant :

3.9. Inégalité de Gårding. *Soit $P : C^\infty(M, E) \to C^\infty(M, F)$ un opérateur différentiel elliptique de degré δ, où $\mathrm{rang}\, E = \mathrm{rang}\, F = r$, et soit $\widetilde{P}$ l'extension de P aux sections à coefficients distributions. Pour tout $u \in W^0(M, E)$ tel que $\widetilde{P}u \in W^s(M, F)$, on a alors $u \in W^{s+\delta}(M, E)$ et*

$$\|u\|_{s+\delta} \leqslant C_s(\|\widetilde{P}u\|_s + \|u\|_0),$$

où C_s est une constante positive ne dépendant que de s.

Preuve. Comme P est elliptique, il existe un symbole $\sigma \in S^{-\delta}(M; F, E)$ tel que $\mathrm{Op}_\sigma \circ \widetilde{P} = \mathrm{Id} + R$, $R \in \mathcal{R}$. Alors $\|\mathrm{Op}_\sigma(v)\|_{s+\delta} \leqslant C\|v\|_s$ grâce à (3.6). Par suite, en posant $v = \widetilde{P}u$, nous voyons que $u = \mathrm{Op}_\sigma(\widetilde{P}u) - Ru$ satisfait l'estimation désirée. □

§3.C. Théorème de finitude

Nous concluons cette section par la preuve du théorème de finitude fondamental suivant, qui est le point de départ de la théorie de Hodge L^2.

3.10. Théorème de finitude. *Soient E, F des fibrés vectoriels hermitiens sur une variété compacte M, tels que* $\operatorname{rang} E = \operatorname{rang} F = r$, *et soit $P : C^\infty(M,E) \to C^\infty(M,F)$ un opérateur différentiel elliptique de degré δ. Alors :*

i) $\operatorname{Ker} P$ *est de dimension finie.*

ii) $P\big(C^\infty(M,E)\big)$ *est fermé et de codimension finie dans $C^\infty(M,F)$; de plus, si $P^\star$ est l'adjoint formel de P, il existe une décomposition*

$$C^\infty(M,F) = P\big(C^\infty(M,E)\big) \oplus \operatorname{Ker} P^\star$$

comme somme directe orthogonale dans $W^0(M,F) = L^2(M,F)$.

Preuve. (i) L'inégalité de Gårding montre que $\|u\|_{s+\delta} \leqslant C_s\|u\|_0$ pour tout $u \in \operatorname{Ker} P$. Grâce au lemme de Sobolev, ceci implique que $\operatorname{Ker} P$ est fermé dans $W^0(M,E)$. De plus, la $\|\ \|_0$-boule unité fermée de $\operatorname{Ker} P$ est contenue dans la $\|\ \|_\delta$-boule de rayon C_0, donc elle est compacte d'après le lemme de Rellich. Le théorème de Riesz implique que $\dim \operatorname{Ker} P < +\infty$.

(ii) Nous montrons d'abord que le prolongement

$$\widetilde{P} : W^{s+\delta}(M,E) \to W^s(M,F)$$

a une image fermée pour tout s. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un nombre fini d'éléments $v_1, \ldots, v_N \in W^{s+\delta}(M,F)$, $N = N(\varepsilon)$, tels que

$$\|u\|_0 \leqslant \varepsilon\|u\|_{s+\delta} + \sum_{j=1}^N |\langle\!\langle u, v_j\rangle\!\rangle_0| \ ; \tag{3.11}$$

en effet l'ensemble

$$K_{(v_j)} = \Big\{u \in W^{s+\delta}(M,F) \ ; \ \varepsilon\|u\|_{s+\delta} + \sum_{j=1}^N |\langle\!\langle u, v_j\rangle\!\rangle_0| \leqslant 1\Big\}$$

est relativement compact dans $W^0(M,F)$ et $\bigcap_{(v_j)} \overline{K}_{(v_j)} = \{0\}$. Il s'ensuit qu'il existe des éléments (v_j) tels que $\overline{K}_{(v_j)}$ soit contenu dans la boule unité de $W^0(M,E)$, ce qu'il fallait démontrer. Substituons la majoration $\|u\|_0$ donnée par (3.11) dans l'inégalité de Gårding ; nous obtenons

$$(1 - C_s\varepsilon)\|u\|_{s+\delta} \leqslant C_s\Big(\|\widetilde{P}u\|_s + \sum_{j=1}^N |\langle\!\langle u, v_j\rangle\!\rangle_0|\Big).$$

Définissons $T = \{u \in W^{s+\delta}(M, E)\ ;\ u \perp v_j,\ 1 \leqslant j \leqslant n\}$ et posons $\varepsilon = 1/2C_s$. Il vient

$$\|u\|_{s+\delta} \leqslant 2C_s\|\widetilde{P}u\|_s, \qquad \forall u \in T.$$

Ceci implique que $\widetilde{P}(T)$ est fermé. Par conséquent

$$\widetilde{P}\big(W^{s+\delta}(M, E)\big) = \widetilde{P}(T) + \mathrm{Vect}\big(\widetilde{P}(v_1), \ldots, \widetilde{P}(v_N)\big)$$

est fermé dans $W^s(M, E)$. Prenons en particulier $s = 0$. Puisque $C^\infty(M, E)$ est dense dans $W^\delta(M, E)$, nous voyons que dans $W^0(M, E) = L^2(M, E)$ on a

$$\Big(\widetilde{P}\big(W^\delta(M, E)\big)\Big)^\perp = \Big(P\big(C^\infty(M, E)\big)\Big)^\perp = \mathrm{Ker}\,\widetilde{P^\star}.$$

Nous avons ainsi prouvé que

$$W^0(M, E) = \widetilde{P}\big(W^\delta(M, E)\big) \oplus \mathrm{Ker}\,\widetilde{P^\star}. \tag{3.12}$$

Puisque $P^\star$ est également elliptique, il s'ensuit que $\mathrm{Ker}\,\widetilde{P^\star}$ est de dimension finie et que $\mathrm{Ker}\,\widetilde{P^\star} = \mathrm{Ker}\,P^\star$ est contenu dans $C^\infty(M, F)$. Grâce à l'inégalité de Gårding, la formule de décomposition (3.12) donne

$$W^s(M, E) = \widetilde{P}\big(W^{s+\delta}(M, E)\big) \oplus \mathrm{Ker}\,P^\star, \tag{3.13}$$

$$C^\infty(M, E) = P\big(C^\infty(M, E)\big) \oplus \mathrm{Ker}\,P^\star. \tag{3.14}$$

Nous terminons cette section par la construction de l'opérateur de Green associé à un opérateur elliptique auto-adjoint.

3.15. Théorème. *Soient E un fibré vectoriel hermitien de rang r sur une variété compacte M, et $P : C^\infty(M, E) \to C^\infty(M, E)$ un opérateur différentiel elliptique autoadjoint de degré δ. Alors si H désigne l'opérateur de projection orthogonale $H : C^\infty(M, E) \to \mathrm{Ker}\,P$, il existe un unique opérateur G sur $C^\infty(M, E)$ tel que*

$$PG + H = GP + H = \mathrm{Id},$$

de plus G est un opérateur pseudo-différentiel de degré $-\delta$, appelé opérateur de Green associé à P.

Preuve. D'après le Théorème 3.10, $\mathrm{Ker}\,P = \mathrm{Ker}\,P^\star$ est de dimension finie, et $\mathrm{Im}\,P = (\mathrm{Ker}\,P)^\perp$. Il en résulte que la restriction de P à $(\mathrm{Ker}\,P)^\perp$ est un opérateur bijectif. On définit G comme étant égal à $0 \oplus P^{-1}$ relativement à la décomposition orthogonale $C^\infty(M, E) = \mathrm{Ker}\,P \oplus (\mathrm{Ker}\,P)^\perp$. Les relations $PG + H = GP + H = \mathrm{Id}$ sont alors évidentes, de même que l'unicité de G. De plus, G est continu pour la topologie d'espace de Fréchet de $C^\infty(M, E)$ d'après le théorème de Banach. On sait également qu'il existe un opérateur pseudodifférentiel Q d'ordre $-\delta$ qui est un inverse de P modulo $\mathcal{R}$, i.e., $PQ = \mathrm{Id} + R$, $R \in \mathcal{R}$. Il vient alors

$$Q = (GP + H)Q = G(\mathrm{Id} + R) + HQ = G + GR + HQ,$$

où GR et HQ sont régularisants (H est un opérateur régularisant de rang fini défini par le noyau $\sum \varphi_s(x) \otimes \varphi_s^\star(y)$, si (φ_s) est une base de fonctions propres de $\operatorname{Ker} P \subset C^\infty(M,E)$). Par suite $G = Q \bmod \mathcal{R}$ et G est bien un opérateur pseudo-différentiel d'ordre $-\delta$. □

3.16. Corollaire. *Sous les hypothèses du th.* 3.15, *les valeurs propres de P constituent une suite de réels λ_k tels que* $\lim_{k\to+\infty} |\lambda_k| = +\infty$, *les espaces propres V_{λ_k} de P sont de dimension finie, et on a une somme directe hilbertienne*

$$L^2(M,E) = \widehat{\bigoplus_k} V_{\lambda_k}.$$

Pour tout entier $m \in \mathbb{N}$, un élément $u = \sum_k u_k \in L^2(M,E)$ est dans $W^{m\delta}(X,E)$ si et seulement si $\sum |\lambda_k|^{2m} \|u_k\|^2 < +\infty$.

Preuve. L'opérateur de Green s'étend en un opérateur autoadjoint

$$\widetilde{G} : L^2(M,E) \to L^2(M,E)$$

se factorisant à travers $W^\delta(M,E)$, et donc compact. Cet opérateur définit un inverse de $\widetilde{P} : W^\delta(M,E) \to L^2(M,E)$ sur $(\operatorname{Ker} P)^\perp$. La théorie spectrale des opérateurs compacts autoadjoints montre que les valeurs propres μ_k de $\widetilde{G}$ forment une suite de réels μ_k tendant vers 0 et que $L^2(M,E)$ est somme directe hilbertienne des espaces propres. Les valeurs propres correspondantes de $\widetilde{P}$ sont $\lambda_k = \mu_k^{-1}$ si $\mu_k \neq 0$, et d'après l'ellipticité de $P - \lambda_k \operatorname{Id}$, les espaces propres $V_{\lambda_k} = \operatorname{Ker}(P - \lambda_k \operatorname{Id})$ sont de dimension finie et contenus dans $C^\infty(M,E)$. Enfin, si $u = \sum_k u_k \in L^2(M,E)$, l'inégalité de Gårding montre que $u \in W^{m\delta}(M,E)$ si et seulement si $\widetilde{P}^m u \in L^2(M,E) = W^0(M,E)$, ce qui donne bien la condition $\sum |\lambda_k|^{2m} \|u_k\|^2 < +\infty$. □

§4. Théorie de Hodge des variétés riemanniennes compactes

La théorie de Hodge a été bâtie de toutes pièces par W.V.D. Hodge pendant la décade 1930-1940 (voir [Hod41], [DR55]). Le but principal de la théorie est de décrire l'algèbre de cohomologie de De Rham d'une variété riemannienne en termes de ses formes harmoniques. Le résultat principal est que toute classe de cohomologie possède un unique représentant harmonique.

§4.A. Structure euclidienne de l'algèbre extérieure

Soit (M,g) une variété riemannienne orientée de classe C^∞, $\dim_{\mathbb{R}} M = m$, et soit $E \to M$ un fibré vectoriel hermitien de rang r sur M. Nous notons respectivement $(\xi_1, \ldots, \xi_m)$ et $(e_1, \ldots, e_r)$ des repères orthonormés de T_M et de E sur une carte $\Omega \subset M$, et soient $(\xi_1^\star, \ldots, \xi_m^\star)$, $(e_1^\star, \ldots, e_r^\star)$ les repères duaux correspondants de $T_M^\star$, $E^\star$. Soit dV l'élément de volume riemannien sur M. L'algèbre extérieure $\Lambda^\bullet T_M^\star$ possède un produit scalaire naturel $\langle \bullet, \bullet \rangle$, tel que

$$\langle u_1 \wedge \cdots \wedge u_p, v_1 \wedge \cdots \wedge v_p \rangle = \det(\langle u_j, v_k \rangle)_{1 \leqslant j,k \leqslant p}, \qquad u_j, v_k \in T_M^\star \tag{4.1}$$

pour tout p, avec $\Lambda^\bullet T^\star_M = \bigoplus \Lambda^p T^\star_M$ comme somme directe orthogonale. Alors la famille de covecteurs $\xi^\star_I = \xi^\star_{i_1} \wedge \cdots \wedge \xi^\star_{i_p}$, $i_1 < i_2 < \cdots < i_p$, définit une base orthonormée de $\Lambda^\bullet T^\star_M$. On notera $\langle \bullet, \bullet \rangle$ le produit scalaire correspondant sur $\Lambda^\bullet T^\star_M \otimes E$.

4.2. Opérateur étoile de Hodge. *L'opérateur $\star$ de Hodge-Poincaré-De Rham est l'endomorphisme de $\Lambda^\bullet T^\star_M$ défini par la collection d'applications linéaires telles que*

$$\star : \Lambda^p T^\star_M \to \Lambda^{m-p} T^\star_M, \qquad u \wedge \star v = \langle u, v \rangle \, dV, \qquad \forall u, v \in \Lambda^p T^\star_M.$$

L'existence et l'unicité de cet opérateur se voient aisément en utilisant l'accouplement de dualité

$$\begin{aligned} &\Lambda^p T^\star_M \times \Lambda^{m-p} T^\star_M \longrightarrow \mathbb{R} \\ &(u, v) \longmapsto u \wedge v / dV = \sum \varepsilon(I, \complement I) \, u_I v_{\complement I}, \end{aligned} \tag{4.3}$$

où $u = \sum_{|I|=p} u_I \, \xi^\star_I$, $v = \sum_{|J|=m-p} v_J \, \xi^\star_J$, et où $\varepsilon(I, \complement I)$ est la signature de la permutation $(1, 2, \ldots, m) \mapsto (I, \complement I)$ définie par I suivi du multi-indice complémentaire (ordonné) $\complement I$. De là, nous déduisons

$$\star\, v = \sum_{|I|=p} \varepsilon(I, \complement I) v_I \, \xi^\star_{\complement I}. \tag{4.4}$$

Plus généralement, l'accouplement sesquilinéaire $\{\bullet, \bullet\}$ défini par (1.6) induit un opérateur $\star$ sur les formes à valeurs vectorielles, tel que

$$\star \ : \Lambda^p T^\star_M \otimes E \to \Lambda^{m-p} T^\star_M \otimes E, \qquad \{s, \star\, t\} = \langle s, t \rangle \, dV, \tag{4.5}$$

$$\star\, t = \sum_{|I|=p, \lambda} \varepsilon(I, \complement I) \, t_{I,\lambda} \, \xi^\star_{\complement I} \otimes e_\lambda, \qquad \forall s, t \in \Lambda^p T^\star_M \otimes E, \tag{4.6}$$

pour $t = \sum t_{I,\lambda} \, \xi^\star_I \otimes e_\lambda$. Puisque $\varepsilon(I, \complement I) \varepsilon(\complement I, I) = (-1)^{p(m-p)} = (-1)^{p(m-1)}$, nous obtenons immédiatement

$$\star\star \ t = (-1)^{p(m-1)} t \quad \text{ sur } \ \Lambda^p T^\star_M \otimes E. \tag{4.7}$$

Il est clair que $\star$ est une isométrie de $\Lambda^\bullet T^\star_M \otimes E$. Nous aurons besoin aussi d'une variante de l'opérateur $\star$, à savoir l'opérateur antilinéaire

$$\# \ : \ \Lambda^p T^\star_M \otimes E \longrightarrow \Lambda^{m-p} T^\star_M \otimes E^\star$$

défini par $s \wedge \# t = \langle s, t \rangle \, dV$, où le produit extérieur $\wedge$ est combiné avec l'accouplement canonique $E \times E^\star \to \mathbb{C}$. Nous avons

$$\# t = \sum_{|I|=p, \lambda} \varepsilon(I, \complement I) \, \overline{t}_{I,\lambda} \, \xi^\star_{\complement I} \otimes e^\star_\lambda. \tag{4.8}$$

4.9. Contraction par un champ de vecteurs. *Etant donné un vecteur tangent $\theta \in T_M$ et une forme $u \in \Lambda^p T_M^\star$, la contraction $\theta \lrcorner u \in \Lambda^{p-1} T_M^\star$ est définie par*

$$\theta \lrcorner u\,(\eta_1, \ldots, \eta_{p-1}) = u(\theta, \eta_1, \ldots, \eta_{p-1}), \qquad \eta_j \in T_M.$$

En termes de la base (ξ_j), $\bullet \lrcorner \bullet$ est l'opérateur bilinéaire caractérisé par

$$\xi_l \lrcorner (\xi_{i_1}^\star \wedge \cdots \wedge \xi_{i_p}^\star) = \begin{cases} 0 & \text{si } l \notin \{i_1, \ldots, i_p\}, \\ (-1)^{k-1} \xi_{i_1}^\star \wedge \cdots \widehat{\xi_{i_k}^\star} \cdots \wedge \xi_{i_p}^\star & \text{si } l = i_k. \end{cases}$$

Cette formule est en fait valide même quand (ξ_j) est non orthonormé. Un calcul facile montre que $\theta \lrcorner \bullet$ est une *dérivation* de l'algèbre extérieure, i.e. que

$$\theta \lrcorner (u \wedge v) = (\theta \lrcorner u) \wedge v + (-1)^{\deg u} u \wedge (\theta \lrcorner v).$$

De plus, si $\widetilde{\theta} = \langle \bullet, \theta \rangle \in T_M^\star$, l'opérateur $\theta \lrcorner \bullet$ est l'adjoint de $\widetilde{\theta} \wedge \bullet$, i.e.,

$$(4.10) \qquad \langle \theta \lrcorner u, v \rangle = \langle u, \widetilde{\theta} \wedge v \rangle, \qquad \forall u, v \in \Lambda^\bullet T_M^\star.$$

En effet, cette propriété est immédiate quand $\theta = \xi_l$, $u = \xi_I^\star$, $v = \xi_J^\star$.

§4.B. Opérateurs de Laplace-Beltrami

Soit E un fibré vectoriel hermitien sur M, et soit D_E une connexion hermitienne sur E. Nous considérons l'espace de Hilbert $L^2(M, \Lambda^p T_M^\star \otimes E)$ des p-formes s sur M à valeurs dans E, muni du produit scalaire L^2

$$\langle\!\langle s, t \rangle\!\rangle = \int_M \langle s, t \rangle \, dV$$

déjà considéré en (2.5). Ici $\langle s, t \rangle$ est le produit scalaire ponctuel sur $\Lambda^p T_M^\star \otimes E$ associé au produit scalaire riemannien sur $\Lambda^p T_M^\star$ et au produit scalaire hermitien sur E.

4.11. Théorème. *L'adjoint formel de D_E agissant sur $C^\infty(M, \Lambda^p T_M^\star \otimes E)$ est donné par*

$$D_E^\star = (-1)^{mp+1} \star D_E \star .$$

Preuve. Si $s \in C^\infty(M, \Lambda^p T_M^\star \otimes E)$ et $t \in C^\infty(M, \Lambda^{p+1} T_M^\star \otimes E)$ sont à support compact, nous avons

$$\begin{aligned} \langle\!\langle D_E s, t \rangle\!\rangle &= \int_M \langle D_E s, t \rangle \, dV = \int_M \{D_E s, \star t\} \\ &= \int_M d\{s, \star t\} - (-1)^p \{s, D_E \star t\} = (-1)^{p+1} \int_M \{s, D_E \star t\} \end{aligned}$$

grâce à la formule de Stokes. Par conséquent (4.5) et (4.7) impliquent

$$\langle\!\langle D_E s, t\rangle\!\rangle = (-1)^{p+1}(-1)^{p(m-1)}\int_M \{s, \star\star\ D_E \star t\} = (-1)^{mp+1}\langle\!\langle s, \star D_E \star t\rangle\!\rangle.$$

La formule désirée s'ensuit. $\square$

4.12. Remarque. Dans le cas de la connexion triviale d sur $E = M \times \mathbb{C}$, la formule devient $d^\star = (-1)^{m+1} \star d \star$. Si m est pair, ces formules se réduisent à

$$d^\star = - \star d \star\,, \qquad D_E^\star = - \star D_E \star\,.$$

4.13. Définition. *L'opérateur de Laplace-Beltrami est l'opérateur différentiel du second ordre agissant sur les fibrés $\Lambda^p T_M^\star \otimes E$, tel que*

$$\Delta_E = D_E D_E^\star + D_E^\star D_E.$$

En particulier, l'opérateur de Laplace-Beltrami agissant sur $\Lambda^p T_M^\star$ est $\Delta = dd^\star + d^\star d$. Ce dernier opérateur ne dépend que de la structure riemannienne (M, g).

Il est clair que le Laplacien Δ est formellement auto-adjoint, i.e. $\langle\!\langle \Delta_E s, t\rangle\!\rangle = \langle\!\langle s, \Delta_E t\rangle\!\rangle$ chaque fois que les formes s, t sont de classe C^∞ et que l'une d'elles est à support compact.

4.14. Calcul du symbole. Pour toute fonction f de classe C^∞, la règle de Leibnitz donne $\mathrm{e}^{-tf} D_E(\mathrm{e}^{tf} s) = t\,df \wedge s + D_E s$. Par définition du symbole, nous trouvons donc

$$\sigma_{D_E}(x,\xi)\cdot s = \xi \wedge s, \qquad \forall \xi \in T_{M,x}^\star, \quad \forall s \in \Lambda^p T_M^\star \otimes E.$$

Grâce à la formule (2.8) nous obtenons $\sigma_{D_E^\star} = -(\sigma_{D_E})^\star$, donc

$$\sigma_{D_E^\star}(x,\xi)\cdot s = -\widetilde{\xi} \lrcorner\ s$$

où $\widetilde{\xi} \in T_M$ est le vecteur tangent adjoint de ξ. L'égalité $\sigma_{\Delta_E} = \sigma_{D_E}\sigma_{D_E^\star} + \sigma_{D_E^\star}\sigma_{D_E}$ implique

$$\begin{aligned}
&\sigma_{\Delta_E}(x,\xi)\cdot s = -\xi \wedge (\widetilde{\xi} \lrcorner\ s) - \widetilde{\xi} \lrcorner\ (\xi \wedge s) = -(\widetilde{\xi} \lrcorner\ \xi) s,\\
&\sigma_{\Delta_E}(x,\xi)\cdot s = -|\xi|^2 s.
\end{aligned}$$

En particulier, Δ_E est toujours un opérateur elliptique. Dans le cas particulier où M est une partie ouverte de $\mathbb{R}^m$ munie de la métrique constante $g = \sum_{i=1}^m dx_i^2$, tous les opérateurs d, $d^\star$, Δ sont à coefficients constants. Ils sont complètement déterminés par leur symbole principal (aucun terme d'ordre plus bas ne peut apparaître). Nous trouvons alors aisément

$$\begin{aligned} s &= \sum_{|I|=p} s_I dx_I, \qquad ds = \sum_{|I|=p,j} \frac{\partial s_I}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_I, \\ d^\star s &= -\sum_{I,j} \frac{\partial s_I}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_j} \lrcorner\ dx_I, \\ \Delta s &= -\sum_I \Big(\sum_j \frac{\partial^2 s_I}{\partial x_j^2} \Big) dx_I. \end{aligned}$$

Par suite, Δ a la même expression que l'opérateur de Laplace élémentaire, au signe moins près.

§4.C. Formes harmoniques et isomorphisme de Hodge

Soit E un fibré vectoriel hermitien sur une variété riemannienne *compacte* (M,g). Nous supposons que E possède une connexion hermitienne D_E telle que $\Theta(D_E) = D_E^2 = 0$. Une telle connexion est dite *intégrable* ou *plate*. Il est bien connu que ceci équivaut à ce que E soit donné par une représentation $\pi_1(M) \to \mathrm{U}(r)$; un tel fibré est appelé *fibré plat* ou *système local de coefficients*. Un exemple fondamental est bien sûr le fibré trivial $E = M \times \mathbb{C}$ avec sa connexion évidente $D_E = d$. Grâce à cette hypothèse, D_E définit un complexe de De Rham généralisé

$$C^\infty(M,E) \xrightarrow{D_E} C^\infty(M, \Lambda^1 T_M^\star \otimes E) \longrightarrow \cdots \longrightarrow C^\infty(M, \Lambda^p T_M^\star \otimes E) \xrightarrow{D_E} \cdots.$$

Les groupes de cohomologie de ce complexe seront notés $H^p_{DR}(M,E)$.

L'espace des *formes harmoniques de degré p* relativement à l'opérateur de Laplace-Beltrami $\Delta_E = D_E D_E^\star + D_E^\star D_E$ est défini par

$$\mathcal{H}^p(M,E) = \big\{ s \in C^\infty(M, \Lambda^p T_M^\star \otimes E)\ ;\ \Delta_E s = 0 \big\}. \tag{4.15}$$

Comme $\langle\langle \Delta_E s, s \rangle\rangle = ||D_E s||^2 + ||D_E^\star s||^2$, nous voyons que $s \in \mathcal{H}^p(M,E)$ si et seulement si $D_E s = D_E^\star s = 0$.

4.16. Théorème. *Pour tout p, il existe une décomposition orthogonale*

$$\begin{aligned} &C^\infty(M, \Lambda^p T_M^\star \otimes E) = \mathcal{H}^p(M,E) \oplus \operatorname{Im} D_E \oplus \operatorname{Im} D_E^\star, \qquad \textit{où} \\ &\operatorname{Im} D_E = D_E\big(C^\infty(M, \Lambda^{p-1} T_M^\star \otimes E)\big), \\ &\operatorname{Im} D_E^\star = D_E^\star\big(C^\infty(M, \Lambda^{p+1} T_M^\star \otimes E)\big). \end{aligned}$$

Preuve. Il est immédiat que $\mathcal{H}^p(M,E)$ est orthogonal aux deux sous-espaces $\operatorname{Im} D_E$ et $\operatorname{Im} D_E^\star$. L'orthogonalité de ces deux sous-espaces est elle aussi évidente, grâce à l'hypothèse $D_E^2 = 0$:

$$\langle\langle D_E s, D_E^\star t \rangle\rangle = \langle\langle D_E^2 s, t \rangle\rangle = 0.$$

Nous appliquons maintenant le th. 3.10 à l'opérateur elliptique $\Delta_E = \Delta_E^\star$ agissant sur les p-formes, i.e. l'opérateur $\Delta_E : C^\infty(M,F) \to C^\infty(M,F)$ agissant sur le fibré $F = \Lambda^p T_M^\star \otimes E$. Nous obtenons

$$\begin{aligned} &C^\infty(M,\Lambda^p T_M^\star \otimes E) = \mathcal{H}^p(M,E) \oplus \Delta_E\big(C^\infty(M,\Lambda^p T_M^\star \otimes E)\big),\\ &\operatorname{Im}\Delta_E = \operatorname{Im}(D_E D_E^\star + D_E^\star D_E) \subset \operatorname{Im} D_E + \operatorname{Im} D_E^\star. \end{aligned}$$

D'autre part, comme $\operatorname{Im} D_E$ et $\operatorname{Im} D_E^\star$ sont orthogonaux à $\mathcal{H}^p(M,E)$, ces espaces sont contenus dans $\operatorname{Im}\Delta_E$. □

4.17. Théorème d'isomorphisme de Hodge. *Les groupes de cohomologie de De Rham $H^p_{DR}(M,E)$ sont de dimension finie et $H^p_{DR}(M,E) \simeq \mathcal{H}^p(M,E)$.*

Preuve. Grâce à la décomposition (4.16), nous obtenons

$$\begin{aligned} &B^p_{DR}(M,E) = D_E\big(C^\infty(M,\Lambda^{p-1}T_M^\star \otimes E)\big),\\ &Z^p_{DR}(M,E) = \operatorname{Ker} D_E = (\operatorname{Im} D_E^\star)^\perp = \mathcal{H}^p(M,E) \oplus \operatorname{Im} D_E. \end{aligned}$$

Ceci montre que toute classe de cohomologie de De Rham contient un unique représentant harmonique. □

4.18. Dualité de Poincaré. *L'accouplement*

$$H^p_{DR}(M,E) \times H^{m-p}_{DR}(M,E^\star) \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad (s,t) \longmapsto \int_M s \wedge t$$

est une forme bilinéaire non dégénérée, et définit donc une dualité entre $H^p_{DR}(M,E)$ et $H^{m-p}_{DR}(M,E^\star)$.

Preuve. Notons d'abord qu'il existe une connexion plate $D_{E^\star}$ naturellement définie telle que pour tout $s \in C^\infty(M,\Lambda^\bullet T_M^\star \otimes E)$, $t \in C^\infty(M,\Lambda^\bullet T_M^\star \otimes E^\star)$ on ait

$$d(s \wedge t) = (D_E s) \wedge t + (-1)^{\deg s} s \wedge D_{E^\star} t. \tag{4.19}$$

Il résulte alors de la formule de Stokes que l'application bilinéaire $(s,t) \mapsto \int_M s \wedge t$ peut se factoriser aux groupes de cohomologie. Soit $s \in C^\infty(M,\Lambda^p T_M^\star \otimes E)$. Nous laissons au lecteur le soin de prouver les formules suivantes (utiliser (4.19) de façon analogue à ce qui a été fait pour la preuve du th. 4.11) :

(4.20)

$$D_{E^\star}(\# s) = (-1)^p \# D_E^\star s, \quad (D_{E^\star})^\star(\# s) = (-1)^{p+1} \# D_E s, \quad \Delta_{E^\star}(\# s) = \# \Delta_E s,$$

Par conséquent $\# s \in \mathcal{H}^{m-p}(M,E^\star)$ si et seulement si $s \in \mathcal{H}^p(M,E)$. Puisque

$$\int_M s \wedge \# s = \int_M |s|^2\, dV = \|s\|^2,$$

nous voyons que l'accouplement de Poincaré a un noyau trivial dans le facteur de gauche $\mathcal{H}^p(M,E) \simeq H^p_{DR}(M,E)$. Par symétrie, il a aussi un noyau trivial à droite. La preuve est achevée. □

§5. Variétés hermitiennes et kählériennes

Soit X une variété complexe de dimension n. Une *métrique hermitienne* sur X est une forme hermitienne définie positive de classe C^∞ sur T_X ; dans un système de coordonnées $(z_1, \ldots, z_n)$, une telle forme peut s'écrire

$$h(z) = \sum_{1\leqslant j,k\leqslant n} h_{jk}(z)\, dz_j \otimes d\overline{z}_k,$$

où (h_{jk}) est une matrice hermitienne positive à coefficients C^∞. La $(1,1)$-*forme fondamentale* associée à h est

$$\omega = -\operatorname{Im} h = \frac{\mathrm{i}}{2}\sum h_{jk} dz_j \wedge d\overline{z}_k, \qquad 1 \leqslant j,k \leqslant n.$$

5.1. Définition.

a) *Une variété hermitienne est un couple (X,ω) où ω est une $(1,1)$-forme C^∞ définie positive sur X.*

b) *La métrique ω est dite kählérienne si $d\omega = 0$.*

c) *X est appelée variété kählérienne si X possède au moins une métrique kählérienne.*

Puisque ω est réelle, les conditions $d\omega = 0$, $d'\omega = 0$, $d''\omega = 0$ sont toutes équivalentes. En coordonnées locales, on voit que $d'\omega = 0$ si et seulement si

$$\frac{\partial h_{jk}}{\partial z_l} = \frac{\partial h_{lk}}{\partial z_j}, \qquad 1 \leqslant j,k,l \leqslant n.$$

Un calcul simple donne

$$\frac{\omega^n}{n!} = \det(h_{jk}) \bigwedge_{1\leqslant j\leqslant n} \Big(\frac{\mathrm{i}}{2} dz_j \wedge d\overline{z}_j\Big) = \det(h_{jk})\, dx_1 \wedge dy_1 \wedge \cdots \wedge dx_n \wedge dy_n,$$

où $z_n = x_n + \mathrm{i}y_n$. Par conséquent la (n,n)-forme

$$dV = \frac{1}{n!}\omega^n \tag{5.2}$$

est positive et coïncide avec l'élément de volume hermitien de X. Si X est compacte, alors $\int_X \omega^n = n!\,\mathrm{Vol}_\omega(X) > 0$. Cette remarque simple implique déjà qu'une variété kählérienne compacte doit satisfaire certaines conditions topologiques restrictives :

5.3. Conséquence.

a) *Si (X,ω) est kählérienne compacte et si $\{\omega\}$ désigne la classe de cohomologie de ω dans $H^2(X,\mathbb{R})$, alors $\{\omega\}^n \neq 0$.*

b) *Si X est kählérienne compacte, alors $H^{2k}(X,\mathbb{R}) \neq 0$ pour $0 \leqslant k \leqslant n$. En effet, $\{\omega\}^k$ est une classe non nulle de $H^{2k}(X,\mathbb{R})$.*

5.4. Exemple. L'espace projectif complexe $\mathbb{P}^n$ possède une métrique kählérienne ω naturelle, appelée *métrique de Fubini-Study*, définie par

$$p^\star\omega = \frac{\mathrm{i}}{2\pi} d'd'' \log\big(|\zeta_0|^2 + |\zeta_1|^2 + \cdots + |\zeta_n|^2\big)$$

où $\zeta_0, \zeta_1, \ldots, \zeta_n$ sont les coordonnées de $\mathbb{C}^{n+1}$ et où $p : \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{P}^n$ est la projection. Soit $z = (\zeta_1/\zeta_0, \ldots, \zeta_n/\zeta_0)$ les coordonnées non homogènes de la carte $\mathbb{C}^n \subset \mathbb{P}^n$. Un calcul montre que

$$\omega = \frac{\mathrm{i}}{2\pi} d'd'' \log(1+|z|^2) = \frac{\mathrm{i}}{2\pi}\Theta(\mathcal{O}(1)), \qquad \int_{\mathbb{P}^n} \omega^n = 1.$$

Comme les seuls groupes de cohomologie entière non nuls de $\mathbb{P}^n$ sont $H^{2p}(\mathbb{P},\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}$ pour $0 \leqslant p \leqslant n$, nous voyons que $h = \{\omega\} \in H^2(\mathbb{P}^n,\mathbb{Z})$ est un générateur de l'anneau de cohomologie $H^\bullet(\mathbb{P}^n,\mathbb{Z})$. En d'autres termes, $H^\bullet(\mathbb{P}^n,\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}[h]/(h^{n+1})$ comme anneau.

5.5. Exemple. Un *tore complexe* est un quotient $X = \mathbb{C}^n/\Gamma$ de $\mathbb{C}^n$ par un réseau Γ de rang $2n$. C'est donc une variété complexe compacte. Toute forme hermitienne définie positive $\omega = \mathrm{i}\sum h_{jk} dz_j \wedge d\overline{z}_k$ à coefficients constants sur $\mathbb{C}^n$ définit une métrique kählérienne sur X.

5.6. Exemple. Toute sous-variété complexe X d'une variété kählérienne (Y,ω') est kählérienne pour la métrique induite $\omega = \omega'_{\restriction X}$. En particulier, toute variété projective est kählérienne (par définition, une *variété projective* est une sous-variété fermée $X \subset \mathbb{P}^n$ d'un espace projectif) ; dans ce cas, si ω' désigne la métrique de Fubini-Study sur $\mathbb{P}^n$, nous avons la propriété supplémentaire que la classe $\{\omega\} := \{\omega'\}_{\restriction X} \in H^2_{\mathrm{DR}}(X,\mathbb{R})$ est entière, i.e., est l'image d'une classe entière de $H^2(X,\mathbb{Z})$. Une métrique kählérienne ω de classe de cohomologie entière est appelée *métrique de Hodge*.

5.7. Exemple. Considérons la surface complexe

$$X = (\mathbb{C}^2 \setminus \{0\})/\Gamma$$

où $\Gamma = \{\lambda^n \ ; \ n \in \mathbb{Z}\}$, $\lambda \in \,]0,1[$, est vu comme groupe d'homothéties. Puisque $\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$ est difféomorphe à $\mathbb{R}^\star_+ \times S^3$, nous avons $X \simeq S^1 \times S^3$. Par conséquent $H^2(X,\mathbb{R}) = 0$ grâce à la formule de Künneth, et la propriété 5.3 b) montre que X n'est pas kählérienne. Plus généralement, on peut prendre pour Γ un groupe cyclique infini engendré par des contractions holomorphes de $\mathbb{C}^2$, de la forme

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} \lambda_1 z_1 \\ \lambda_2 z_2 \end{pmatrix}, \qquad \text{resp.} \quad \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} \lambda z_1 \\ \lambda z_2 + z_1^p \end{pmatrix},$$

où $\lambda, \lambda_1, \lambda_2$ sont des nombres complexes tels que $0 < |\lambda_1| \leqslant |\lambda_2| < 1$, $0 < |\lambda| < 1$, et p un entier positif. Ces surfaces non kählériennes sont appelées *surfaces de Hopf.* □

Le théorème suivant montre qu'une métrique hermitienne ω sur X est kählérienne si et seulement si la métrique ω est tangente à l'ordre 2 à une métrique hermitienne à coefficients constants en tout point de X.

5.8. Théorème. *Soit ω une $(1,1)$-forme C^∞ définie positive sur X. Pour que ω soit kählérienne, il faut et il suffit qu'en tout point $x_0 \in X$ il existe un système de coordonnées holomorphes $(z_1, \ldots, z_n)$ centré en x_0 tel que*

$$\omega = \mathrm{i} \sum_{1 \leqslant l,m \leqslant n} \omega_{lm}\, dz_l \wedge d\overline{z}_m, \qquad \omega_{lm} = \delta_{lm} + O(|z|^2). \tag{5.9}$$

Si ω est kählérienne, les coordonnées $(z_j)_{1 \leqslant j \leqslant n}$ peuvent en fait être choisies telles que

$$\omega_{lm} = \langle \frac{\partial}{\partial z_l}, \frac{\partial}{\partial z_m} \rangle = \delta_{lm} - \sum_{1 \leqslant j,k \leqslant n} c_{jklm}\, z_j \overline{z}_k + O(|z|^3), \tag{5.10}$$

où (c_{jklm}) sont les coefficients du tenseur de courbure de Chern

$$\Theta(T_X)_{x_0} = \sum_{j,k,l,m} c_{jklm}\, dz_j \wedge d\overline{z}_k \otimes \Big(\frac{\partial}{\partial z_l}\Big)^\star \otimes \frac{\partial}{\partial z_m} \tag{5.11}$$

associé à (T_X, ω) en x_0. Un tel système (z_j) sera appelé système de coordonnées géodésiques en x_0.

Preuve. Il est clair que (5.9) implique $d_{x_0}\omega = 0$, par suite la condition est suffisante. Supposons maintenant que ω soit kählérienne. Alors on peut choisir des coordonnées locales $(\zeta_1, \ldots, \zeta_n)$ telles que $(d\zeta_1, \ldots, d\zeta_n)$ soit une base ω-orthonormée de $T^\star_{x_0}X$. Par conséquent

$$\omega = \mathrm{i} \sum_{1 \leqslant l,m \leqslant n} \widetilde{\omega}_{lm}\, d\zeta_l \wedge d\overline{\zeta}_m, \qquad \text{où}$$

$$\widetilde{\omega}_{lm} = \delta_{lm} + O(|\zeta|) = \delta_{lm} + \sum_{1 \leqslant j \leqslant n} (a_{jlm}\zeta_j + a'_{jlm}\overline{\zeta}_j) + O(|\zeta|^2). \tag{5.12}$$

Puisque ω est réelle, nous avons $a'_{jlm} = \overline{a}_{jml}$; d'autre part la condition de kählérianité $\partial\omega_{lm}/\partial\zeta_j = \partial\omega_{jm}/\partial\zeta_l$ en x_0 implique $a_{jlm} = a_{ljm}$. Posons maintenant

$$z_m = \zeta_m + \frac{1}{2} \sum_{j,l} a_{jlm}\zeta_j\zeta_l, \qquad 1 \leqslant m \leqslant n.$$

Alors (z_m) est un système de coordonnée locales en x_0, et

$$dz_m = d\zeta_m + \sum_{j,l} a_{jlm}\zeta_j d\zeta_l,$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{i}\sum_m dz_m \wedge d\overline{z}_m &= \mathrm{i}\sum_m d\zeta_m \wedge d\overline{\zeta}_m + \mathrm{i}\sum_{j,l,m} a_{jlm}\zeta_j\, d\zeta_l \wedge d\overline{\zeta}_m \\
&\qquad + \mathrm{i}\sum_{j,l,m} \overline{a}_{jlm}\overline{\zeta}_j\, d\zeta_m \wedge d\overline{\zeta}_l + O(|\zeta|^2) \\
&= \mathrm{i}\sum_{l,m} \widetilde{\omega}_{lm}\, d\zeta_l \wedge \overline{d}\zeta_m + O(|\zeta|^2) = \omega + O(|z|^2).
\end{aligned}$$

La condition (5.9) est demontrée. Supposons les coordonnées (ζ_m) choisies depuis le début en sorte que (5.9) ait lieu pour (ζ_m). Poursuivons alors le développement de Taylor (5.12) à l'ordre deux

$$\begin{aligned}
\widetilde{\omega}_{lm} &= \delta_{lm} + O(|\zeta|^2)) \\
&= \delta_{lm} + \sum_{j,k}\big(a_{jklm}\zeta_j\overline{\zeta}_k + a'_{jklm}\zeta_j\zeta_k + a''_{jklm}\overline{\zeta}_j\overline{\zeta}_k\big) + O(|\zeta|^3).
\end{aligned}\tag{5.13}$$

Les nouveaux coefficients introduits satisfont la relation

$$a'_{jklm} = a'_{kjlm}, \qquad a''_{jklm} = \overline{a}'_{jkml}, \qquad \overline{a}_{jklm} = a_{kjml}.$$

La condition de kählérianité $\partial\omega_{lm}/\partial\zeta_j = \partial\omega_{jm}/\partial\zeta_l$ en $\zeta = 0$ fournit l'égalité $a'_{jklm} = a'_{lkjm}$; en particulier a'_{jklm} est invariant par toute permutation de j, k, l. Si on pose

$$z_m = \zeta_m + \frac{1}{3}\sum_{j,k,l} a'_{jklm}\,\zeta_j\zeta_k\zeta_l, \qquad 1 \leqslant m \leqslant n,$$

alors grâce à (5.13) on trouve

$$\begin{aligned}
dz_m &= d\zeta_m + \sum_{j,k,l} a'_{jklm}\,\zeta_j\zeta_k\, d\zeta_l, \qquad 1 \leqslant m \leqslant n, \\
\omega &= \mathrm{i}\sum_{1\leqslant m\leqslant n} dz_m \wedge d\overline{z}_m + \mathrm{i}\sum_{j,k,l,m} a_{jklm}\,\zeta_j\overline{\zeta}_k\, d\zeta_l \wedge d\overline{\zeta}_m + O(|\zeta|^3),
\end{aligned}$$

$$\omega = \mathrm{i}\sum_{1\leqslant m\leqslant n} dz_m \wedge d\overline{z}_m + \mathrm{i}\sum_{j,k,l,m} a_{jklm}\, z_j\overline{z}_k\, dz_l \wedge d\overline{z}_m + O(|z|^3).\tag{5.14}$$

Il est maintenant facile de calculer le tenseur de courbure de Chern $\Theta(T_X)_{x_0}$ en termes des coefficients a_{jklm} et de vérifier que $c_{jklm} = -a_{jklm}$. Nous laissons cette vérification au lecteur à titre d'exercice. □

§6. Identités fondamentales de la géométrie kählérienne

§6.A. Opérateurs de la géométrie hermitienne

Soit (X,ω) une variété hermitienne et soient $z_j = x_j + \mathrm{i}y_j$, $1 \leqslant j \leqslant n$, des coordonnées $\mathbb{C}$-analytiques en un point $a \in X$, telles que $\omega(a) = \mathrm{i}\sum dz_j \wedge d\overline{z}_j$ soit diagonalisée en ce point. La forme hermitienne associée est $h(a) = 2\sum dz_j \otimes d\overline{z}_j$ et sa partie réelle est la métrique euclidienne $2\sum (dx_j)^2 + (dy_j)^2$. Il s'ensuit que $|dx_j| = |dy_j| = 1/\sqrt{2}$, $|dz_j| = |d\overline{z}_j| = 1$, et que $(\partial/\partial z_1, \ldots, \partial/\partial z_n)$ est une base orthonormée de $(T_a^\star X, \omega)$. La formule (4.1) pour u_j, v_k dans la somme orthogonale $(\mathbb{C}\otimes T_X)^\star = T_X^\star \oplus \overline{T_X^\star}$ définit un produit scalaire naturel sur l'algèbre extérieure $\Lambda^\bullet(\mathbb{C}\otimes T_X)^\star$. La norme d'une forme

$$u = \sum_{I,J} u_{I,J}\, dz_I \wedge d\overline{z}_J \in \Lambda^\bullet(\mathbb{C}\otimes T_X)^\star$$

au point a est alors donnée par

$$|u(a)|^2 = \sum_{I,J} |u_{I,J}(a)|^2. \tag{6.1}$$

L'opérateur $\star$ de Hodge (4.2) peut être étendu aux formes à valeurs complexes par la formule

$$u \wedge \overline{\star v} = \langle u, v\rangle\, dV. \tag{6.2}$$

Il s'ensuit que $\star$ est une isométrie $\mathbb{C}$-linéaire

$$\star\ :\ \Lambda^{p,q}T_X^\star \longrightarrow \Lambda^{n-q,n-p}T_X^\star.$$

Les opérateurs usuels de la géométrie hermitienne sont les opérateurs d, $\delta = -\star d\star$, le laplacien $\Delta = d\delta + \delta d$ déjà définis, et leurs analogues complexes

$$\begin{cases} d = d' + d'', \\ \delta = d'^\star + d''^\star, \qquad d'^\star = (d')^\star = -\star d''\star, \qquad d''^\star = (d'')^\star = -\star d'\star, \\ \Delta' = d'd'^\star + d'^\star d', \qquad \Delta'' = d''d''^\star + d''^\star d''. \end{cases} \tag{6.3}$$

On dira qu'un opérateur est de degré pur r s'il transforme une forme de degré k en une forme de degré $k+r$, et de même, un opérateur de bidegré pur (s,t) est un opérateur qui transforme les (p,q)-formes en formes de bidegré $(p+s, q+t)$ (son degré total est alors bien entendu $r = s+t$). Ainsi d', d'', $d'^\star$, $d''^\star$, Δ', Δ'' sont de bidegrés respectifs $(1,0)$, $(0,1)$, $(-1,0)$, $(0,-1)$, $(0,0)$, $(0,0)$. Un autre opérateur important est l'opérateur L de bidegré $(1,1)$ défini par

$$Lu = \omega \wedge u, \tag{6.4}$$

et son adjoint $\Lambda = L^\star = \star^{-1}L\star$ de bidegré $(-1,-1)$:

$$\langle u, \Lambda v\rangle = \langle Lu, v\rangle. \tag{6.5}$$

Observons que le groupe unitaire $\mathrm{U}(T_X) \simeq \mathrm{U}(n)$ possède une action naturelle sur l'espace des (p,q)-formes, donnée par

$$\mathrm{U}(n) \times \Lambda^{p,q}T_X^\star \ni (g, v) \longmapsto (g^{-1})^\star v.$$

Cette action fait de $\Lambda^{p,q}T_X^\star$ une représentation unitaire de $\mathrm{U}(n)$. Comme la métrique ω est invariante, il est clair que L et Λ commutent à l'action de $\mathrm{U}(n)$.

§6.B. Identités de commutation

Si A, B sont des endomorphismes (de degré pur) du module gradué $M^\bullet = C^\infty(X, \Lambda^{\bullet,\bullet}T_X^\star)$, leur *commutateur gradué* (ou *crochet de Lie gradué*) est défini par

$$[A, B] = AB - (-1)^{ab}BA \tag{6.6}$$

où a, b sont les degrés de A et B respectivement. Si C est un autre endomorphisme de degré c, on a l'*identité de Jacobi* purement formelle suivante :

$$(-1)^{ca}\big[A, [B, C]\big] + (-1)^{ab}\big[B, [C, A]\big] + (-1)^{bc}\big[C, [A, B]\big] = 0. \tag{6.7}$$

Pour tout $\alpha \in \Lambda^{p,q}T_X^\star$, nous désignerons encore par α l'endomorphisme associé de type (p, q), opérant sur $\Lambda^{\bullet,\bullet}T_X^\star$ par la formule $u \mapsto \alpha \wedge u$.

Soit $\gamma \in \Lambda^{1,1}T_X^\star$ une $(1,1)$-forme réelle. Il existe une base ω-orthogonale $(\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n)$ de T_X qui diagonalise les deux formes ω et γ simultanément :

$$\omega = \mathrm{i} \sum_{1\leqslant j\leqslant n} \zeta_j^\star \wedge \overline{\zeta}_j^\star, \qquad \gamma = \mathrm{i} \sum_{1\leqslant j\leqslant n} \gamma_j\, \zeta_j^\star \wedge \overline{\zeta}_j^\star, \quad \gamma_j \in \mathbb{R}.$$

6.8. Proposition. *Pour toute forme* $u = \sum u_{J,K}\, \zeta_J^\star \wedge \overline{\zeta}_K^\star$, *on a*

$$[\gamma, \Lambda]u = \sum_{J,K} \Big(\sum_{j\in J} \gamma_j + \sum_{j\in K} \gamma_j - \sum_{1\leqslant j\leqslant n} \gamma_j \Big) u_{J,K}\, \zeta_J^\star \wedge \overline{\zeta}_K^\star.$$

Preuve. Si u est de type (p, q), un calcul brutal donne

$$\begin{aligned}
\Lambda u &= \mathrm{i}(-1)^p \sum_{J,K,l} u_{J,K}\, (\zeta_l \lrcorner\, \zeta_J^\star) \wedge (\overline{\zeta}_l \lrcorner\, \overline{\zeta}_K^\star), \qquad 1 \leqslant l \leqslant n,\\
\gamma \wedge u &= \mathrm{i}(-1)^p \sum_{J,K,m} \gamma_m u_{J,K}\, \zeta_m^\star \wedge \zeta_J^\star \wedge \overline{\zeta}_m^\star \wedge \overline{\zeta}_K^\star, \qquad 1 \leqslant m \leqslant n,\\
[\gamma, \Lambda]u &= \sum_{J,K,l,m} \gamma_m\, u_{J,K} \Big(\big(\zeta_l^\star \wedge (\zeta_m \lrcorner\, \zeta_J^\star)\big) \wedge \big(\overline{\zeta}_l^\star \wedge (\overline{\zeta}_m \lrcorner\, \overline{\zeta}_K^\star)\big)\\
&\qquad\qquad - \big(\zeta_m \lrcorner\, (\zeta_l^\star \wedge \zeta_J^\star)\big) \wedge \big(\overline{\zeta}_m \lrcorner\, (\overline{\zeta}_l^\star \wedge \overline{\zeta}_K^\star)\big) \Big)\\
&= \sum_{J,K,m} \gamma_m\, u_{J,K} \Big(\zeta_m^\star \wedge (\zeta_m \lrcorner\, \zeta_J^\star) \wedge \overline{\zeta}_K^\star\\
&\qquad\qquad + \zeta_J^\star \wedge \overline{\zeta}_m^\star \wedge (\overline{\zeta}_m \lrcorner\, \overline{\zeta}_K^\star) - \zeta_J^\star \wedge \overline{\zeta}_K^\star \Big)\\
&= \sum_{J,K} \Big(\sum_{m\in J} \gamma_m + \sum_{m\in K} \gamma_m - \sum_{1\leqslant m\leqslant n} \gamma_m \Big) u_{J,K}\, \zeta_J^\star \wedge \overline{\zeta}_K^\star. \qquad \square
\end{aligned}$$

6.9. Corollaire. *Pour tout* $u \in \Lambda^{p,q}T^\star_X$, *on a* $[L,\Lambda]u = (p+q-n)u$.

Preuve. En effet, si $\gamma = \omega$, les valeurs propres de γ sont $\gamma_1 = \cdots = \gamma_n = 1$. □

Introduisons l'opérateur $B = [L,\Lambda]$ tel que $Bu = (p+q-n)u$ pour u de bidegré (p,q). Comme L est de degré 2, on obtient aussitôt $[B,L] = 2L$, et de même $[B,\Lambda] = -2\Lambda$. Ceci suggère d'introduire l'algèbre de Lie $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ (matrices de trace nulle, avec le crochet de commutation usuel $[\alpha,\beta] = \alpha\beta-\beta\alpha$ des matrices), dont les 3 matrices de base

$$\ell = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \lambda = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{6.10}$$

vérifient les relations de commutation

$$[\ell,\lambda] = b, \qquad [b,\ell] = 2\ell, \qquad [b,\lambda] = -2\lambda.$$

6.11. Corollaire. *On a une action naturelle de l'algèbre de Lie* $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ *sur l'espace vectoriel* $\Lambda^{\bullet,\bullet}T^\star_X$, *i.e. un morphisme d'algèbres de Lie* $\rho : \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}) \to \mathrm{End}(\Lambda^{\bullet,\bullet}T^\star_X)$, *tel que* $\rho(\ell) = L$, $\rho(\lambda) = \Lambda$, $\rho(b) = B$.

Nous allons maintenant expliciter d'autres identités de commutation très importantes. Supposons d'abord que $X = \Omega \subset \mathbb{C}^n$ soit un ouvert de $\mathbb{C}^n$ et que ω soit la métrique kählérienne standard,

$$\omega = \mathrm{i} \sum_{1\leqslant j\leqslant n} dz_j \wedge d\overline{z}_j.$$

Pour toute forme $u \in C^\infty(\Omega, \Lambda^{p,q}T^\star_X)$ on a

$$d'u = \sum_{I,J,k} \frac{\partial u_{I,J}}{\partial z_k} dz_k \wedge dz_I \wedge d\overline{z}_J, \tag{6.12$'$}$$

$$d''u = \sum_{I,J,k} \frac{\partial u_{I,J}}{\partial \overline{z}_k} d\overline{z}_k \wedge dz_I \wedge d\overline{z}_J. \tag{6.12$''$}$$

Comme le produit scalaire global L^2 est donné par

$$\langle\!\langle u,v\rangle\!\rangle = \int_\Omega \sum_{I,J} u_{I,J}\overline{v}_{I,J}\, dV,$$

des calculs faciles analogues à ceux de l'exemple 4.12 montrent que

$$d'^\star u = -\sum_{I,J,k} \frac{\partial u_{I,J}}{\partial \overline{z}_k} \frac{\partial}{\partial z_k} \lrcorner\ (dz_I \wedge d\overline{z}_J), \tag{6.13$'$}$$

$$d''^\star u = -\sum_{I,J,k} \frac{\partial u_{I,J}}{\partial z_k} \frac{\partial}{\partial \overline{z}_k} \lrcorner\ (dz_I \wedge d\overline{z}_J). \tag{6.13$''$}$$

Nous énonçons d'abord un lemme dû à Akizuki et Nakano [AN54].

6.14. Lemme. *Dans* $\mathbb{C}^n$, *on a* $[d''^\star, L] = \mathrm{i}\, d'$.

Preuve. La formule (6.13″) peut se récrire plus brièvement

$$d''^\star u = -\sum_k \frac{\partial}{\partial \overline{z}_k} \lrcorner \Big(\frac{\partial u}{\partial z_k}\Big).$$

Nous obtenons alors

$$[d''^\star, L]u = -\sum_k \frac{\partial}{\partial \overline{z}_k} \lrcorner \Big(\frac{\partial}{\partial z_k}(\omega \wedge u)\Big) + \omega \wedge \sum_k \frac{\partial}{\partial \overline{z}_k} \lrcorner \Big(\frac{\partial u}{\partial z_k}\Big).$$

Puisque ω est à coefficients constants, on a $\dfrac{\partial}{\partial z_k}(\omega\wedge u) = \omega\wedge\dfrac{\partial u}{\partial z_k}$ et par conséquent

$$\begin{aligned}[d''^\star, L]\, u &= -\sum_k \bigg(\frac{\partial}{\partial \overline{z}_k} \lrcorner \Big(\omega \wedge \frac{\partial u}{\partial z_k}\Big) - \omega \wedge \Big(\frac{\partial}{\partial \overline{z}_k} \lrcorner \frac{\partial u}{\partial z_k}\Big)\bigg)\\ &= -\sum_k \Big(\frac{\partial}{\partial \overline{z}_k} \lrcorner \omega\Big) \wedge \frac{\partial u}{\partial z_k}.\end{aligned}$$

Or, il est clair que $\dfrac{\partial}{\partial \overline{z}_k} \lrcorner \omega = -\mathrm{i}\, dz_k$, donc

$$[d''^\star, L]\, u = \mathrm{i} \sum_k dz_k \wedge \frac{\partial u}{\partial z_k} = \mathrm{i}\, d'u. \qquad \square$$

Nous sommes maintenant prêts pour établir les relations de commutation de base dans le cas d'une variété kählérienne arbitraire (X, ω).

6.15. Théorème. *Si* (X, ω) *est kählérienne, alors*

$$\begin{aligned} [d''^\star, L] &= \mathrm{i}\, d', & [d'^\star, L] &= -\mathrm{i}\, d'',\\ [\Lambda, d''] &= -\mathrm{i}\, d'^\star, & [\Lambda, d'] &= \mathrm{i}\, d''^\star. \end{aligned}$$

Preuve. Il suffit de vérifier la première relation, car la seconde est la conjuguée de la première, et les relations de la deuxième ligne sont adjointes de celles de la première ligne. Si (z_j) est un système de coordonnées géodesiques en un point $x_0 \in X$, alors pour toutes (p, q)-formes u, v à support compact dans un voisinage de x_0, (5.9) implique

$$\langle\!\langle u, v\rangle\!\rangle = \int_M \Big(\sum_{I,J} u_{IJ}\overline{v}_{IJ} + \sum_{I,J,K,L} a_{IJKL}\, u_{IJ}\overline{v}_{KL}\Big)\, dV,$$

avec $a_{IJKL}(z) = O(|z|^2)$ en x_0. Une intégration de parties analogue à celle pratiquée pour obtenir (4.12) et (6.13″) donne

$$d''^\star u = -\sum_{I,J,k} \frac{\partial u_{I,J}}{\partial z_k} \frac{\partial}{\partial \overline{z}_k} \lrcorner\, (dz_I \wedge d\overline{z}_J) + \sum_{I,J,K,L} b_{IJKL}\, u_{IJ}\, dz_K \wedge d\overline{z}_L,$$

où les coefficients b_{IJKL} sont obtenus par dérivation des a_{IJKL}. Par conséquent nous avons $b_{IJKL} = O(|z|)$. Puisque $\partial\omega/\partial z_k = O(|z|)$, la démonstration du lemme 6.14 implique ici $[d''^\star, L]u = \mathrm{i}\, d'u + O(|z|)$, en particulier les deux termes coïncident au point $x_0 \in X$ fixé d'avance. □

6.16. Corollaire. *Si (X,ω) est kählérienne, les opérateurs de Laplace-Beltrami complexes sont tels que*

$$\Delta' = \Delta'' = \frac{1}{2}\Delta.$$

Preuve. Montrons d'abord que $\Delta'' = \Delta'$. On a

$$\Delta'' = [d'', d''^\star] = -\mathrm{i}\big[d'', [\Lambda, d']\big].$$

Puisque $[d', d''] = 0$, l'identité de Jacobi (6.7) implique

$$-\big[d'', [\Lambda, d']\big] + \big[d', [d'', \Lambda]\big] = 0,$$

donc $\Delta'' = \big[d', -\mathrm{i}[d'', \Lambda]\big] = [d', d'^\star] = \Delta'$. D'autre part

$$\Delta = [d' + d'', d'^\star + d''^\star] = \Delta' + \Delta'' + [d', d''^\star] + [d'', d'^\star].$$

Il suffit donc de prouver :

6.17. Lemme. $[d', d''^\star] = 0,\ [d'', d'^\star] = 0.$

Preuve. Nous avons $[d', d''^\star] = -\mathrm{i}\big[d', [\Lambda, d']\big]$ et (6.7) implique

$$-\big[d', [\Lambda, d']\big] + \big[\Lambda, [d', d']\big] + \big[d', [d', \Lambda]\big] = 0,$$

donc $-2\big[d', [\Lambda, d']\big] = 0$ et $[d', d''^\star] = 0$. La deuxième relation $[d'', d'^\star] = 0$ est l'adjointe de la première. □

6.18. Théorème. *Si (X,ω) est kählérienne, Δ commute avec tous les opérateurs $\star$, d', d'', $d'^\star$, $d''^\star$, L, Λ.*

Preuve. Les identités $[d', \Delta'] = [d'^\star, \Delta'] = 0$, $[d'', \Delta''] = [d''^\star, \Delta''] = 0$ et $[\Delta, \star] = 0$ sont immédiates. De plus, l'égalité $[d', L] = d'\omega = 0$ combinée avec l'identité de Jacobi implique

$$[L, \Delta'] = \big[L, [d', d'^\star]\big] = -\big[d', [d'^\star, L]\big] = \mathrm{i}[d', d''] = 0.$$

Par adjonction, nous obtenons $[\Delta', \Lambda] = 0$. □

§6.C. Éléments primitifs et isomorphisme de Lefschetz

Pour établir le théorème de Lefschetz, il est commode d'utiliser la représentation de $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ exhibée au Cor. 6.11. Rappelons d'abord que si $\mathfrak{g}$ est une sous-algèbre de Lie (réelle ou complexe) de l'algèbre de Lie $\mathfrak{sl}(r,\mathbb{C}) = \mathrm{End}(\mathbb{C}^r)$ des matrices complexes et si $G = \exp(\mathfrak{g}) \subset \mathrm{GL}(r,\mathbb{C})$ est le groupe de Lie associé, une représentation $\rho : \mathfrak{g} \to \mathrm{End}(V)$ de l'algèbre de Lie dans un espace vectoriel complexe V induit par exponentiation une représentation $\widetilde{\rho} : G \to \mathrm{GL}(V)$ du groupe G. Inversement, une représentation $\widetilde{\rho} : G \to \mathrm{GL}(V)$ induit par différentiation une représentation $\rho : \mathfrak{g} \to \mathrm{End}(V)$ de l'algèbre de Lie ; il y a donc identité entre les deux notions. Si G est compact, un lemme classique de H. Weyl montre que toute représentation de $\mathfrak{g}$ se scinde en somme directe de représentations irréductibles (on dit alors que $\mathfrak{g}$ est *réductive*) : la mesure de Haar de G permet en effet de construire une métrique hermitienne invariante sur V, et on exploite le fait que l'orthogonal d'une sous-représentation est une sous-représentation. En particulier l'algèbre de Lie $\mathfrak{su}(r)$ du groupe compact $\mathrm{SU}(r)$ est réductive. Il en est de même de $\mathfrak{sl}(r,\mathbb{C})$ qui est la complexifiée de $\mathfrak{su}(r)$. Nous aurons besoin du lemme suivant bien connu en théorie des représentations.

6.19. Lemme. *Soit $\rho : \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}) \to \mathrm{End}(V)$ une représentation de l'algèbre de Lie $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ sur un espace vectoriel complexe de dimension finie V, et soient*

$$L = \rho(\ell),\ \ \Lambda = \rho(\lambda),\ \ B = \rho(b) \in \mathrm{End}(V)$$

les endomorphismes de V associés aux éléments de base de $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$. Alors :

a) *$V = \bigoplus_{\mu\in\mathbb{Z}} V_\mu$ est somme directe (finie) des espaces propres de B, dont les valeurs propres μ sont des entiers. Un élément $v \in V_\mu$ est dit élément de poids pur μ.*

b) *L et Λ sont nilpotents, tels que $L(V_\mu) \subset V_{\mu+2}$, $\Lambda(V_\mu) \subset V_{\mu-2}$ pour tout $\mu \in \mathbb{Z}$.*

c) *On note $P = \mathrm{Ker}\,\Lambda = \{v \in V\,;\ \Lambda v = 0\}$, qui est appelé ensemble des éléments primitifs. On a alors une décomposition en somme directe*

$$V = \bigoplus_{r\in\mathbb{N}} L^r(P).$$

d) *V est isomorphe à une somme directe finie $\bigoplus_{m\in\mathbb{N}} S(m)^{\oplus\alpha_m}$ de représentations irréductibles, où $S(m) \simeq S^m(\mathbb{C}^2)$ est la représentation de $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ induite par la puissance symétrique m-ième de la représentation naturelle de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ sur $\mathbb{C}^2$, et $\alpha_m = \dim P_m$ est la multiplicité de la composante isotypique $S(m)$.*

e) *Si $P_\mu = P \cap V_\mu$, alors $P_\mu = 0$ pour $\mu > 0$ et $P = \bigoplus_{\mu\in\mathbb{Z},\,\mu\leqslant 0} P_\mu$. L'endomorphisme $L^r : P_{-m} \to V_{m+2r}$ est injectif pour $r \leqslant m$ et nul pour $r > m$.*

f) *$V_\mu = \displaystyle\bigoplus_{r\in\mathbb{N},\,r\geqslant\mu} L^r(P_{\mu-2r}), \qquad$ où $\qquad L^r : P_{\mu-2r} \to L^r(P_{\mu-2r})$ est bijectif.*

g) *Pour tout $r \in \mathbb{N}$, l'endomorphisme $L^r : V_{-r} \to V_r$ est bijectif.*

Preuve. On fait d'abord l'observation suivante : si $v \in V_\mu$, alors Lv est de poids pur $\mu + 2$ et Λv de poids pur $\mu - 2$. En effet, on a

$$\begin{aligned} BLv &= LBv + [B, L]v = L(\mu v) + 2Lv = (\mu + 2)Lv, \\ B\Lambda v &= \Lambda Bv + [B, \Lambda]v = \Lambda(\mu v) - 2\Lambda v = (\mu - 2)\Lambda v. \end{aligned}$$

Supposons maintenant $V \neq 0$ et soit $v \in V_\mu$ un vecteur propre non nul. Si les vecteurs $(\Lambda^k v)_{k\in\mathbb{N}}$ étaient tous non nuls, on aurait une infinité de vecteurs propres de B de valeurs propres $\mu - 2k$ distinctes, ce qui est impossible. Donc il existe un entier $r \geqslant 0$ tel que $\Lambda^r v \neq 0$ et $\Lambda^k v = 0$ pour $k > r$, par suite $\Lambda^r v$ est un élément primitif non nul de poids pur $\mu' = \mu - 2r$. Soit maintenant $w \in P$ un élément non nul de poids pur μ (on vient de voir qu'il en existe pour au moins un $\mu \in \mathbb{C}$). Le même raisonnement que ci-dessus appliqué aux puissances $L^k w$ montre qu'il existe un entier $m > 0$ tel que $L^m w \neq 0$ et $L^{m+1} w = 0$. L'espace vectoriel W de dimension $m + 1$ engendré par $w_k = L^k w$, $0 \leqslant k \leqslant m$ est stable par l'action de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$. On a en effet $Bw_k = (\mu + 2k)w_k$, $Lw_k = w_{k+1}$ par définition, tandis que

$$\begin{aligned} \Lambda w_k = \Lambda L^k w &= L^k \Lambda w - \sum_{0\leqslant j\leqslant k-1} L^{k-j-1}[L, \Lambda]L^j w \\ &= 0 - \sum L^{k-j-1} BL^j w = -\sum_{0\leqslant j\leqslant k-1} (\mu + 2j)L^{k-1} w \\ &= k(-\mu - k + 1)w_{k-1}. \end{aligned}$$

En appliquant cette relation à l'indice $k = m + 1$ pour lequel $w_{m+1} = 0$, on voit qu'on doit avoir nécessairement $\mu = -m \leqslant 0$. On remarque que $B_{\restriction W}$ est diagonalisable (les vecteurs propres étant les vecteurs w_k, de poids entiers $2k - m$), et que les éléments primitifs de W se réduisent à la droite $\mathbb{C}w$, telle que $W = \bigoplus L^r(\mathbb{C}w)$. Les propriétés (a,b,c,d) annoncées s'obtiennent alors facilement par récurrence sur $\dim V$. En considérant la représentation quotient V/W on voit en effet aussitôt par récurrence que les valeurs propres de B sont des entiers et que L, Λ sont nilpotents. Il est facile de vérifier que $W \simeq S^m(\mathbb{C}^2)$ comme représentation de $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ (si e_1, e_2 sont les deux vecteurs de base de $\mathbb{C}^2$, l'isomorphisme envoie $w = w_0$ sur e_1^m et w_k sur $L^k e_1^m = m(m-1)\cdots(m-k+1)e_1^k e_2^{m-k}$). Le fait qu'on ait une somme directe de représentations $V = V' \oplus W$ (avec $V' = W^\perp \subset V$ pour une certaine métrique $\mathrm{SU}(2, \mathbb{C})$-invariante) entraîne par récurrence sur $\dim V$ que B est diagonalisable, ainsi que la formule $V = \bigoplus L^r(P)$ et la décomposition d).

e) La relation $[B, \Lambda] = -2\Lambda$ montre que $P = \operatorname{Ker} \Lambda$ est stable par B, par suite

$$P = \bigoplus (P \cap V_\mu) = \bigoplus P_\mu.$$

Les calculs faits plus haut montrent que les éléments primitifs purs non nuls w sont de poids $-m \leqslant 0$, de sorte que $P_\mu = 0$ si $\mu > 0$. La dernière assertion de e) résulte du fait que pour $0 \neq w \in P_{-m}$ on a $L^r w \neq 0$ si et seulement si $r \leqslant m$.

f) Conséquence immédiate de e) et de la décomposition $V = \bigoplus_{r\in\mathbb{N}} L^r(P)$, si l'on se restreint aux seuls éléments de poids pur μ ; on ne peut avoir $L^r(P_{\mu-2r}) \neq 0$ que si $r \leqslant m = -(\mu - 2r)$, soit $r \geqslant \mu$.

g) Il suffit de vérifier l'assertion dans le cas d'une représentation irréductible $V \simeq S^m(\mathbb{C}^2)$. Dans ce cas, le résultat est clair, puisque les poids $2k-m$, $0 \leqslant k \leqslant m$, se répartissent symétriquement dans l'intervalle $[-m, m]$ et que V est engendré par $(L^k w)_{0\leqslant k\leqslant m}$ pour tout vecteur non nul w de V_{-m}. □

Nous retraduisons maintenant ces résultats dans le cas de la représentation de $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ sur $V = \Lambda^{\bullet,\bullet}T^\star_X$. La composante $\Lambda^k(\mathbb{C}\otimes T_X)^\star = \bigoplus_{p+q=k} \Lambda^{p,q}T^\star_X$ s'identifie alors à l'espace propre V_μ de B de poids $\mu = k - n = p + q - n$ (par définition même de B, voir (6.9)).

6.20. Définition. *Une forme homogène $u \in \Lambda^k(\mathbb{C}\otimes T_X)^\star$ est appelée primitive si $\Lambda u = 0$. L'espace des formes primitives de degré total k sera noté*

$$\mathrm{Prim}^k\, T^\star_X = \bigoplus_{p+q=k} \mathrm{Prim}^{p,q}\, T^\star_X.$$

Puisque l'opérateur Λ commute avec l'action de $\mathrm{U}(T_X) \simeq \mathrm{U}(n)$ sur l'algèbre extérieure, il est clair que $\mathrm{Prim}^{p,q}\, T^\star_X \subset \Lambda^{p,q}T^\star_X$ est un sous-espace $\mathrm{U}(n)$-invariant. On verra plus loin (prop. 6.24) que $\mathrm{Prim}^{p,q}\, T^\star_X$ est en fait une représentation irréductible de $\mathrm{U}(n)$. Les propriétés (6.19 e, f, g) impliquent successivement

6.21. Proposition. *On a $\mathrm{Prim}^k\, T^\star_X = 0$ pour $k > n$. De plus, si $u \in \mathrm{Prim}^k\, T^\star_X$, $k \leqslant n$, alors $L^r u = 0$ pour $r > n - k$.*

6.22. Formule de décomposition primitive. *Pour tout $u \in \Lambda^k(\mathbb{C}\otimes T_X)^\star$, il existe une décomposition unique*

$$u = \sum_{r\geqslant(k-n)_+} L^r u_{k-2r}, \qquad u_{k-2r} \in \mathrm{Prim}^{k-2r}\, T^\star_X.$$

Par conséquent, on obtient une décomposition en somme directe de représentations de $\mathrm{U}(n)$

$$\Lambda^k(\mathbb{C}\otimes T_X)^\star = \bigoplus_{r\geqslant(k-n)_+} L^r\, \mathrm{Prim}^{k-2r}\, T^\star_X,$$

$$\Lambda^{p,q}T^\star_X = \bigoplus_{r\geqslant(p+q-n)_+} L^r\, \mathrm{Prim}^{p-r,q-r}\, T^\star_X.$$

6.23. Isomorphisme de Lefschetz. *Les opérateurs linéaires*

$$L^{n-k} : \Lambda^k(\mathbb{C}\otimes T_X)^\star \longrightarrow \Lambda^{2n-k}(\mathbb{C}\otimes T_X)^\star,$$
$$L^{n-p-q} : \Lambda^{p,q}T^\star_X \longrightarrow \Lambda^{n-q,n-p}T^\star_X,$$

sont des isomorphismes pour tous les entiers $k \leqslant n$ et (p,q) tels que $p+q \leqslant n$.

6.24. Proposition. *Pour tout $(p,q) \in \mathbb{N}^2$ tel que $p+q \leqslant n$, $\mathrm{Prim}^{p,q}\,T_X^\star$ est une représentation irréductible de $\mathrm{U}(n)$; plus précisément, c'est la représentation irréductible associée au plus haut poids $\varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_q - (\varepsilon_{n-p+1} + \cdots + \varepsilon_n)$, où (ε_j) est la base canonique des caractères du sous-groupe commutatif maximal $U(1)^n \subset \mathrm{U}(n)$. La décomposition primitive de $\Lambda^{p,q}T_X^\star$ ou de $\Lambda^k(\mathbb{C}\otimes T_X)^\star$ n'est autre que la décomposition en composantes irréductibles sous l'action de $\mathrm{U}(n)$.*

Preuve. On observe d'abord que $\mathrm{Prim}^{p,q}\,T_X^\star \neq 0$, puisqu'on a par exemple

$$dz_1 \wedge \cdots \wedge dz_p \wedge d\overline{z}_{p+1} \wedge \cdots \wedge d\overline{z}_{p+q} \in \mathrm{Prim}^{p,q}\,T_X^\star$$

La décomposition primitive donne par ailleurs

$$\Lambda^{p,q}T_X^\star = \bigoplus_{0\leqslant r\leqslant m} L^r\,\mathrm{Prim}^{p-r,q-r}\,T_X^\star$$

avec $m = \min(p,q)$, ce qui montre que le $\mathrm{U}(n)$-module $\Lambda^{p,q}T_X^\star$ possède au moins $m+1$ composantes irréductibles non triviales, à savoir celles de chacun des termes $\mathrm{Prim}^{p-r,q-r}\,T_X^\star$, $0 \leqslant r \leqslant m$. Pour voir que ceux-ci sont irréductibles, il suffit donc de montrer que le $\mathrm{U}(n)$-module $\Lambda^{p,q}T_X^\star$ possède au plus $(m+1)$ composantes irréductibles. Or, par complexification de la représentation de $\mathrm{U}(n)$, on obtient une représentation isomorphe à celle de $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ sur $\Lambda^pT_X^\star \otimes \Lambda^qT_X$ donnée par $g\cdot(u\otimes\xi) = (g^{-1})^\star u \otimes g_\star\xi$. La théorie des représentations du groupe linéaire montre que les composantes irréductibles d'une représentation sont en correspondance biunivoque avec les vecteurs propres pour l'action du sous-groupe de Borel B_n des matrices triangulaires supérieures. Un calcul laissé au lecteur montre que ces vecteurs propres correspondent précisément aux (p,q)-formes

$$L^r(dz_{n-p+r+1} \wedge \cdots \wedge dz_n \wedge d\overline{z}_1 \wedge \cdots \wedge d\overline{z}_{q-r}), \qquad 0 \leqslant r \leqslant m,$$

dont le poids sous l'action de $U(1)^n$ est $\varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_{q-r} - (\varepsilon_{n-p+r+1} + \cdots + \varepsilon_n)$. □

§7. Groupes $\mathcal{H}^{p,q}(X,E)$ et dualité de Serre

Nous arrivons maintenant aux aspects spécifiquement holomorphes de la théorie de Hodge. Une grande partie de cette théorie a été developpée par K. Kodaira, S. Lefschetz et A. Weil. Le lecteur pourra consulter avec profit les Œuvres Complètes de Kodaira [Kod75] et le livre de A. Weil [Wei57] ; voir aussi [Wel80] pour un exposé plus récent.

Soit (X,ω) une variété *hermitienne compacte* et E un fibré vectoriel holomorphe hermitien de rang r sur X. Nous noterons D_E la connexion de Chern de E, $D_E^\star = -\star D_E \star$ l'adjoint formel de D_E, et $D_E'^\star$, $D_E''^\star$ les composantes de $D_E^\star$ de type $(-1,0)$ et $(0,-1)$. Un calcul similaire à ceux faits en 4.14 montre que

$$\sigma_{D''_E}(x,\xi)\cdot s = \xi^{0,1} \wedge s, \qquad \xi \in {}^{\mathbb{R}}T_X^\star = \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(T_X,\mathbb{R}), \quad s \in E_x,$$

où $\xi^{(0,1)}$ est la partie de type $(0,1)$ de la 1-forme réelle ξ. Par conséquent, nous voyons que la partie principale de l'opérateur $\Delta''_E = D''_E D''^{\star}_E + D''^{\star}_E D''_E$ est

$$\sigma_{\Delta''_E}(x,\xi)\cdot s = -|\xi^{0,1}|^2 s = -\frac{1}{2}|\xi|^2 s,$$

et on a bien sûr un résultat semblable pour Δ'_E. En particulier $\sigma_{\Delta'_E} = \sigma_{\Delta''_E} = \frac{1}{2}\sigma_{\Delta_E}$ et Δ''_E est un opérateur elliptique auto-adjoint sur chacun des espaces $C^\infty(X, \Lambda^{p,q}T^\star_X \otimes E)$. Puisque $D''^2_E = 0$, le résultat suivant se démontre de la même façon que ceux obtenus au § 4.C.

7.1. Théorème. *Pour tout bidegré (p,q), il existe une décomposition orthogonale*

$$C^\infty(X, \Lambda^{p,q}T^\star_X \otimes E) = \mathcal{H}^{p,q}(X,E) \oplus \operatorname{Im} D''_E \oplus \operatorname{Im} D''^{\star}_E$$

où $\mathcal{H}^{p,q}(X,E)$ est l'espace des formes Δ''_E-harmoniques de $C^\infty(X, \Lambda^{p,q}T^\star_X \otimes E)$.

La décomposition ci-dessus montre que le sous-espace des q-cocycles du complexe $\big(C^\infty(X, \Lambda^{p,\bullet}T^\star_X \otimes E), d''\big)$ est $\mathcal{H}^{p,q}(X,E) \oplus \operatorname{Im} D''_E$. De là, nous déduisons le

7.2. Théorème d'isomorphisme de Hodge. *Les groupes de cohomologie de Dolbeault $H^{p,q}(X,E)$ sont de dimension finie, et il y a un isomorphisme*

$$H^{p,q}(X,E) \simeq \mathcal{H}^{p,q}(X,E). \qquad \square$$

Une autre conséquence intéressante est une preuve du théorème de dualité de Serre pour les variétés complexes compactes. Voir Serre [Ser55] pour une démonstration dans un contexte quelque peu plus général.

7.3. Théorème de dualité de Serre. *L'accouplement bilinéaire*

$$H^{p,q}(X,E) \times H^{n-p,n-q}(X,E^\star) \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad (s,t) \longmapsto \int_M s \wedge t$$

est une dualité non dégénérée.

Preuve. Soient $s_1 \in C^\infty(X, \Lambda^{p,q}T^\star_X \otimes E)$, $s_2 \in C^\infty(X, \Lambda^{n-p,n-q-1}T^\star_X \otimes E)$. Puisque $s_1 \wedge s_2$ est de bidegré $(n, n-1)$, nous avons

$$(7.4) \qquad d(s_1 \wedge s_2) = d''(s_1 \wedge s_2) = d''s_1 \wedge s_2 + (-1)^{p+q} s_1 \wedge d''s_2.$$

La formule de Stokes implique que l'accouplement bilinéaire ci-dessus peut être factorisé au travers des groupes de cohomologie de Dolbeault. L'opérateur # défini au § 4.A est tel que

$$\# : C^\infty(X, \Lambda^{p,q}T^\star_X \otimes E) \longrightarrow C^\infty(X, \Lambda^{n-p,n-q}T^\star_X \otimes E^\star).$$

De plus, (4.20) implique

$$D''_{E^\star}(\# s) = (-1)^{\deg s} \# (D''_E)^\star s, \qquad (D''_{E^\star})^\star(\# s) = (-1)^{\deg s+1} \# D''^\star_E s,$$
$$\Delta''_{E^\star}(\# s) = \# \Delta''_E s,$$

où $D_{E^\star}$ est la connexion de Chern de $E^\star$. Par conséquent, $s \in \mathcal{H}^{p,q}(X,E)$ si et seulement si $\# s \in \mathcal{H}^{n-p,n-q}(X,E^\star)$. Le théorème 7.3 est alors une conséquence du fait que l'intégrale $\|s\|^2 = \int_X s \wedge \# s$ ne s'annule pas si $s \neq 0$. □

§8. Cohomologie des variétés kählériennes compactes

§8.A. Groupes de cohomologie de Bott-Chern

Soit X une variété complexe, non nécessairement compacte pour le moment. Les "groupes de cohomologie" suivants sont utiles pour décrire certains aspects de la théorie de Hodge des variétés complexes compactes qui ne sont pas nécessairement kählériennes.

8.1. Définition. *On définit les groupes de cohomologie de Bott-Chern de X comme étant les groupes*

$$H^{p,q}_{\mathrm{BC}}(X,\mathbb{C}) = \big(C^\infty(X,\Lambda^{p,q}T^\star_X) \cap \operatorname{Ker} d\big)/d'd''C^\infty(X,\Lambda^{p-1,q-1}T^\star_X).$$

Alors $H^{\bullet,\bullet}_{\mathrm{BC}}(X,\mathbb{C})$ a une structure d'algèbre bigraduée, que nous appellerons algèbre de cohomologie de Bott-Chern de X.

Comme le groupe $d'd''C^\infty(X,\Lambda^{p-1,q-1}T^\star_X)$ est contenu aussi bien dans le groupe des cobords $d''C^\infty(X,\Lambda^{p,q-1}T^\star_X)$ du complexe de Dolbeault que des cobords du complexe de De Rham $dC^\infty(X,\Lambda^{p+q-1}(\mathbb{C}\otimes T_X)^\star)$, il y a des morphismes canoniques

$$H^{p,q}_{\mathrm{BC}}(X,\mathbb{C}) \longrightarrow H^{p,q}(X,\mathbb{C}), \tag{8.2}$$
$$H^{p,q}_{\mathrm{BC}}(X,\mathbb{C}) \longrightarrow H^{p+q}_{\mathrm{DR}}(X,\mathbb{C}), \tag{8.3}$$

de la cohomologie de Bott-Chern dans la cohomologie de Dolbeault ou de De Rham. Ces morphismes sont des homomorphismes de $\mathbb{C}$-algèbres. Il est également clair à partir de la définition que nous avons la propriété de symétrie $H^{q,p}_{\mathrm{BC}}(X,\mathbb{C}) = \overline{H^{p,q}_{\mathrm{BC}}(X,\mathbb{C})}$. On peut montrer à partir de la suite spectrale de Hodge-Frölicher (voir § 10) que $H^{p,q}_{\mathrm{BC}}(X,\mathbb{C})$ est toujours de dimension finie si X est compacte.

§8.B. Théorème de décomposition de Hodge

On suppose à partir de maintenant que (X,ω) est une *variété kählérienne compacte*. L'égalité $\Delta = 2\Delta''$ montre que Δ est homogène par rapport au bidegré et qu'il y a une décomposition orthogonale

$$\mathcal{H}^k(X,\mathbb{C}) = \bigoplus_{p+q=k} \mathcal{H}^{p,q}(X,\mathbb{C}). \tag{8.4}$$

Comme $\overline{\Delta''} = \Delta' = \Delta''$, on a également $\mathcal{H}^{q,p}(X,\mathbb{C}) = \overline{\mathcal{H}^{p,q}(X,\mathbb{C})}$. En utilisant le théorème d'isomorphisme de Hodge pour la cohomologie de De Rham et la cohomologie de Dolbeault, on obtient :

8.5. Théorème de Décomposition de Hodge. *Sur une variété kählérienne compacte, il y a des isomorphismes canoniques*

$$\begin{aligned} &H^k_{\mathrm{DR}}(X,\mathbb{C}) \simeq \bigoplus_{p+q=k} H^{p,q}(X,\mathbb{C}) &&(\textit{décomposition de Hodge}),\\ &H^{q,p}(X,\mathbb{C}) \simeq \overline{H^{p,q}(X,\mathbb{C})} &&(\textit{symétrie de Hodge}). \end{aligned}$$

Le seul point qui n'est pas a priori complètement clair est que ces isomorphismes soient indépendants de la métrique kählérienne choisie. Pour montrer que c'est bien le cas, on peut utiliser le lemme suivant, qui va nous permettre de comparer les trois types de groupes de cohomologie considérés au § 8.A.

8.6. Lemme. *Soit u une (p,q)-forme d-fermée. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

a) *u est d-exacte ;*

b′) *u est d'-exacte ;*

b″) *u est d''-exacte ;*

c) *u est $d'd''$-exacte, i.e. u peut s'écrire $u = d'd''v$.*

d) *u est orthogonale à $\mathcal{H}^{p,q}(X,\mathbb{C})$.*

Preuve. Il est évident que *c*) implique a), b′), b″), et que a) ou b′) ou b″) implique *d*). Il suffit donc de prouver que d) implique c). Comme $du = 0$, nous avons $d'u = d''u = 0$, et comme u est supposée orthogonale à $\mathcal{H}^{p,q}(X,\mathbb{C})$, le th. 7.1 implique $u = d''s$, $s \in C^\infty(X, \Lambda^{p,q-1}T^\star_X)$. Le théorème analogue au th. 7.1 pour d' (qui s'en déduit d'ailleurs par conjugaison) montre qu'on a $s = h + d'v + d'^\star w$, avec $h \in \mathcal{H}^{p,q-1}(X,\mathbb{C})$, $v \in C^\infty(X, \Lambda^{p-1,q-1}T^\star_X)$ et $w \in C^\infty(X, \Lambda^{p+1,q-1}T^\star_X)$. Par conséquent

$$u = d''d'v + d''d'^\star w = -d'd''v - d'^\star d''w$$

grâce au lemme 6.16. Comme $d'u = 0$, la composante $d'^\star d''w$ orthogonale à $\operatorname{Ker} d'$ doit être nulle. □

Du lemme 8.6 nous déduisons le corollaire suivant, qui à son tour implique que la décomposition de Hodge ne dépend pas de la métrique kählérienne choisie.

8.7. Corollaire. *Soit X une variété kählérienne compacte. Alors les morphismes naturels*

$$H^{p,q}_{\mathrm{BC}}(X,\mathbb{C}) \longrightarrow H^{p,q}(X,\mathbb{C}), \qquad \bigoplus_{p+q=k} H^{p,q}_{\mathrm{BC}}(X,\mathbb{C}) \longrightarrow H^k_{\mathrm{DR}}(X,\mathbb{C})$$

sont des isomorphismes.

Preuve. La surjectivité de $H^{p,q}_{\mathrm{BC}}(X,\mathbb{C}) \to H^{p,q}(X,\mathbb{C})$ vient du fait que toute classe de $H^{p,q}(X,\mathbb{C})$ peut être représentée par une (p,q)-forme harmonique, donc par une (p,q)-forme d-fermée; la propriété d'injectivité n'est rien d'autre que l'équivalence (8.5 b″) $\Leftrightarrow$ (8.5 c). Donc $H^{p,q}_{\mathrm{BC}}(X,\mathbb{C}) \simeq H^{p,q}(X,\mathbb{C}) \simeq \mathcal{H}^{p,q}(X,\mathbb{C})$, et l'isomorphisme

$$\bigoplus_{p+q=k} H^{p,q}_{\mathrm{BC}}(X,\mathbb{C}) \longrightarrow H^k_{\mathrm{DR}}(X,\mathbb{C})$$

se déduit de (8.4). □

Mentionnons maintenant deux conséquences simples de la théorie de Hodge. La première concerne le calcul des groupes de cohomologie de Dolbeault de $\mathbb{P}^n$. Comme $H^{p,p}(\mathbb{P}^n,\mathbb{C})$ contient la classe non nulle $\{\omega^p\}$ et comme $H^{2p}_{\mathrm{DR}}(\mathbb{P}^n,\mathbb{C}) = \mathbb{C}$, la formule de décomposition de Hodge implique :

8.8. Conséquence. *Les groupes de cohomologie de Dolbeault de $\mathbb{P}^n$ sont*

$$H^{p,p}(\mathbb{P}^n,\mathbb{C}) = \mathbb{C} \quad \textit{pour } 0 \leqslant p \leqslant n, \qquad H^{p,q}(\mathbb{P}^n,\mathbb{C}) = 0 \quad \textit{pour } p \neq q. \qquad \square$$

8.9. Proposition. *Toute p-forme holomorphe sur une variété kählérienne compacte X est d-fermée.*

Preuve. Si u est une forme holomorphe de type $(p,0)$ alors $d''u = 0$. De plus $d''^{\star}u$ est de type $(p,-1)$, donc $d''^{\star}u = 0$. Par conséquent $\Delta u = 2\Delta'' u = 0$, ce qui implique $du = 0$. □

8.10. Exemple. Considérons le *groupe de Heisenberg* $G \subset \mathrm{Gl}_3(\mathbb{C})$, défini comme le sous-groupe des matrices

$$M = \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad (x,y,z) \in \mathbb{C}^3.$$

Soit Γ le sous-groupe discret des matrices ayant leurs coefficients x, y, z dans l'anneau $\mathbb{Z}[\mathrm{i}]$ (ou plus généralement dans un anneau d'entiers quadratiques imaginaires). Alors $X = G/\Gamma$ est une variété complexe compacte de dimension 3, connue sous le nom de *variété d'Iwasawa*. L'égalité

$$M^{-1}dM = \begin{pmatrix} 0 & dx & dz - xdy \\ 0 & 0 & dy \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

montre que dx, dy, $dz - xdy$ sont des 1-formes holomorphes invariantes à gauche sur G. Ces formes induisent des 1-formes holomorphes sur le quotient $X = G/\Gamma$. Puisque $dz - xdy$ n'est pas d-fermée, on voit que X ne peut pas être kählérienne.

8.11. Remarque. Nous avons travaillé ici avec des coefficients constants pour simplifier les notations, mais le lecteur pourra vérifier qu'on a des résultats tout à fait analogues pour la cohomologie à valeurs dans un système local de coefficients E (fibré hermitien plat), comme au § 4.C. Il suffit de remplacer partout dans les démonstrations l'opérateur $d = d' + d''$ par $D_E = D'_E + D''_E$, et d'observer qu'on a encore $\Delta'_E = \Delta''_E = \frac{1}{2}\Delta_E$ (preuve identique à celle du Cor. (6.15)). On en déduit alors l'existence d'isomorphismes

$$H^{p,q}_{\mathrm{BC}}(X,E) \longrightarrow H^{p,q}(X,E), \qquad \bigoplus_{p+q=k} H^{p,q}_{\mathrm{BC}}(X,E) \longrightarrow H^k_{\mathrm{DR}}(X,E)$$

et d'une décomposition canonique

$$H^k_{\mathrm{DR}}(X,E) = \bigoplus_{p+q=k} H^{p,q}(X,E).$$

Dans ce contexte, la propriété de symétrie de Hodge devient

$$\overline{H^{p,q}(X,E)} \simeq H^{q,p}(X,E^\star),$$

via l'opérateur antilinéaire # considéré aux § 4 et § 7. Ces observations sont utiles pour l'étude des variations de structure de Hodge.

§8.C. Décomposition primitive et théorème de Lefschetz difficile

Nous introduisons d'abord quelques notations standard. Les *nombres de Betti* et les *nombres de Hodge* de X sont par définition

$$b_k = \dim_{\mathbb{C}} H^k(X,\mathbb{C}), \qquad h^{p,q} = \dim_{\mathbb{C}} H^{p,q}(X,\mathbb{C}). \tag{8.12}$$

D'après la décomposition de Hodge, ces nombres satisfont les relations

$$b_k = \sum_{p+q=k} h^{p,q}, \qquad h^{q,p} = h^{p,q}. \tag{8.13}$$

En conséquence, les nombres de Betti b_{2k+1} d'une variété kählérienne compacte sont pairs. Noter que le théorème de dualité de Serre donne la relation supplémentaire $h^{p,q} = h^{n-p,n-q}$, vraie dès que X est compacte. Comme on va le voir, l'existence de la décomposition primitive implique beaucoup d'autres propriétés caractéristiques intéressantes de l'algèbre de cohomologie d'une variété kählérienne compacte.

8.14. Lemme. *Si $u = \sum_{r\geqslant (k-n)_+} L^r u_r$ est la décomposition primitive d'une k-forme harmonique u, alors toutes les composantes u_r sont harmoniques.*

Preuve. Comme $[\Delta, L] = 0$, on obtient $0 = \Delta u = \sum_r L^r \Delta u_r$, donc $\Delta u_r = 0$ d'après l'unicité de la décomposition. □

Notons $\mathcal{H}^k_{\mathrm{prim}}(X,\mathbb{C}) = \bigoplus_{p+q=k}\mathcal{H}^{p,q}_{\mathrm{prim}}(X,\mathbb{C})$ l'espace des k-formes harmoniques primitives et soit $h^{p,q}_{\mathrm{prim}}$ la dimension de la composante de bidegré (p,q). Le lemme (8.14) donne

$$\mathcal{H}^{p,q}(X,\mathbb{C}) = \bigoplus_{r\geqslant(p+q-n)_+} L^r\mathcal{H}^{p-r,q-r}_{\mathrm{prim}}(X,\mathbb{C}), \tag{8.15}$$

$$h^{p,q} = \sum_{r\geqslant(p+q-n)_+} h^{p-r,q-r}_{\mathrm{prim}}. \tag{8.16}$$

La Formule (8.16) peut se récrire

$$\left\{\begin{array}{ll} \text{if} \;\; p+q\leqslant n, & h^{p,q} = h^{p,q}_{\mathrm{prim}} + h^{p-1,q-1}_{\mathrm{prim}} + \cdots \\ \text{if} \;\; p+q\geqslant n, & h^{p,q} = h^{n-q,n-p}_{\mathrm{prim}} + h^{n-q-1,n-p-1}_{\mathrm{prim}} + \cdots . \end{array}\right. \tag{8.16$'$}$$

8.17. Corollaire. *Les nombres de Hodge et de Betti satisfont les inégalités suivantes.*

a) *Si $k=p+q\leqslant n$, alors* $h^{p,q}\geqslant h^{p-1,q-1}$, $b_k\geqslant b_{k-2}$,

b) *Si $k=p+q\geqslant n$, alors* $h^{p,q}\geqslant h^{p+1,q+1}$, $b_k\geqslant b_{k+2}$. □

Un autre résultat important de la théorie de Hodge (qui est en fait une conséquence directe du Cor. 6.23) est le

8.18. Théorème de Lefschetz difficile. *Les morphismes de cup produit*

$$\begin{array}{llll} L^{n-k} : & H^k(X,\mathbb{C}) \longrightarrow H^{2n-k}(X,\mathbb{C}), & k\leqslant n, \\ L^{n-p-q} : & H^{p,q}(X,\mathbb{C}) \longrightarrow H^{n-q,n-p}(X,\mathbb{C}), & p+q\leqslant n, \end{array}$$

sont des isomorphismes. □

Une autre manière d'énoncer le théorème de Lefschetz difficile est d'introduire la *forme bilinéaire de Hodge-Riemann* sur $H^k_{\mathrm{DR}}(X,\mathbb{C})$, définie par

$$Q(u,v) = (-1)^{k(k-1)/2}\int_X u\wedge v\wedge\omega^{n-k}. \tag{8.19}$$

Le théorème de Lefschetz difficile combiné avec la dualité de Poincaré nous dit que Q est non dégénérée. De plus Q est de parité $(-1)^k$ (symétrique si k est pair, alternée si k est impair). Lorsque ω est une *métrique de Hodge*, c'est-à-dire une métrique kählérienne telle que $\{\omega\}\in H^2(X,\mathbb{Z})$, il est clair que Q prend des valeurs entières sur le réseau $H^k(X,\mathbb{Z})/(\mathrm{torsion})$. La forme bilinéaire de Hodge-Riemann satisfait les propriétés supplémentaires suivantes : pour $p+q=k$,

$$Q(H^{p,q},H^{p',q'}) = 0 \qquad \text{si } (p',q')\neq(q,p), \tag{8.20$'$}$$

$$\text{Si } 0\neq u\in H^{p,q}_{\mathrm{prim}}(X,\mathbb{C}), \qquad \text{alors } \mathrm{i}^{p-q}Q(u,\overline{u}) = \|u\|^2 > 0. \tag{8.20$''$}$$

En fait (8.20′) est clair, et (8.20″) sera démontré si nous vérifions que toute (p,q)-forme primitive u satisfait

$$(-1)^{k(k-1)/2}\mathrm{i}^{p-q}\omega^{n-k}\wedge\overline{u}=\star\overline{u}.$$

Puisque $\mathrm{Prim}^{p,q}T^\star_X$ est une représentation irréductible de $\mathrm{U}(n)$, il suffit de vérifier la formule pour une (p,q)-forme u bien choisie. On peut prendre par exemple $u=dz_1\wedge\cdots\wedge dz_p\wedge d\overline{z}_{p+1}\wedge\cdots\wedge d\overline{z}_{p+q}$ dans une base orthonormale pour ω. La vérification effective est laissée au lecteur à titre d'exercice.

§8.D. Description du groupe de Picard

Un autre application importante de la théorie de Hodge est une description du *groupe de Picard* $H^1(X,\mathcal{O}^\star)$ d'une variété kählérienne compacte. Nous supposons ici que X est connexe. La suite exacte exponentielle $0\to\mathbb{Z}\to\mathcal{O}\to\mathcal{O}^\star\to 1$ donne

(8.21)
$$0\longrightarrow H^1(X,\mathbb{Z})\longrightarrow H^1(X,\mathcal{O})\longrightarrow H^1(X,\mathcal{O}^\star)\xrightarrow{c_1}H^2(X,\mathbb{Z})\longrightarrow H^2(X,\mathcal{O}),$$

si l'on tient compte du fait que l'application $\exp(2\pi i\bullet)\ :\ H^0(X,\mathcal{O})=\mathbb{C}\longrightarrow H^0(X,\mathcal{O}^\star)=\mathbb{C}^\star$ est surjective. On a $H^1(X,\mathcal{O})\simeq H^{0,1}(X,\mathbb{C})$ par l'isomorphisme de Dolbeault. La dimension de ce groupe est appelée *irrégularité de X* et elle est habituellement notée

(8.22)
$$q=q(X)=h^{0,1}=h^{1,0}.$$

Par conséquent nous avons $b_1=2q$ et

(8.23)
$$H^1(X,\mathcal{O})\simeq\mathbb{C}^q,\qquad H^0(X,\Omega^1_X)=H^{1,0}(X,\mathbb{C})\simeq\mathbb{C}^q.$$

8.24. Lemme. *L'image de $H^1(X,\mathbb{Z})$ dans $H^1(X,\mathcal{O})$ est un réseau.*

Preuve. Considérons le morphisme

$$H^1(X,\mathbb{Z})\longrightarrow H^1(X,\mathbb{R})\longrightarrow H^1(X,\mathbb{C})\longrightarrow H^1(X,\mathcal{O})$$

induit par les inclusions $\mathbb{Z}\subset\mathbb{R}\subset\mathbb{C}\subset\mathcal{O}$. Comme les groupes de cohomologie de Čech à valeurs dans $\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{R}$ peuvent se calculer par des recouvrements finis constitués d'ouverts difféomorphes à des ouverts convexes, de même que toutes leurs intersections mutuelles, il est clair que $H^1(X,\mathbb{Z})$ est un $\mathbb{Z}$-module de type fini et que l'image de $H^1(X,\mathbb{Z})$ dans $H^1(X,\mathbb{R})$ est un réseau. Il suffit donc de vérifier que l'application $H^1(X,\mathbb{R})\longrightarrow H^1(X,\mathcal{O})$ est un isomorphisme. Or, le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccccc}
0\longrightarrow & \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathcal{A}^0 & \xrightarrow{d} & \mathcal{A}^1 & \xrightarrow{d} & \mathcal{A}^2 & \longrightarrow\cdots\\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
0\longrightarrow & \mathcal{O} & \longrightarrow & \mathcal{A}^{0,0} & \xrightarrow{d''} & \mathcal{A}^{0,1} & \xrightarrow{d''} & \mathcal{A}^{0,2} & \longrightarrow\cdots
\end{array}$$

montre que l'application $H^1(X,\mathbb{R}) \longrightarrow H^1(X,\mathcal{O})$ correspond, pour la cohomologie de De Rham et de Dolbeault, à l'application composée

$$H^1_{DR}(X,\mathbb{R}) \subset H^1_{DR}(X,\mathbb{C}) \longrightarrow H^{0,1}(X,\mathbb{C}).$$

Puisque $H^{1,0}(X,\mathbb{C})$ et $H^{0,1}(X,\mathbb{C})$ sont des sous-espaces complexes conjugués dans le complexifié $H^1_{DR}(X,\mathbb{C})$ de $H^1_{DR}(X,\mathbb{R})$, nous en déduisons bien que $H^1_{DR}(X,\mathbb{R}) \longrightarrow H^{0,1}(X,\mathbb{C})$ est un isomorphisme. □

Comme conséquence de ce lemme, $H^1(X,\mathbb{Z})$ est de rang $2q$, i.e., $H^1(X,\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}^{2q}$. Le tore complexe de dimension q

$$\mathrm{Jac}(X) = H^1(X,\mathcal{O})/H^1(X,\mathbb{Z}) \tag{8.25}$$

est appelé *variété jacobienne de X*. Il est isomorphe au sous-groupe de $H^1(X,\mathcal{O}^\star)$ correspondant aux fibrés en droites de première classe de Chern nulle. D'autre part, le noyau de la flèche

$$H^2(X,\mathbb{Z}) \longrightarrow H^2(X,\mathcal{O}) = H^{0,2}(X,\mathbb{C}),$$

qui est constitué par définition des classes de cohomologie entières de type $(1,1)$, est égal à l'image du morphisme $c_1(\bullet)$ dans $H^2(X,\mathbb{Z})$. Ce sous-groupe est appelé *groupe de Néron-Severi* de X, noté $NS(X)$; son rang $\rho(X)$ est appelé *nombre de Picard* de X.

La suite exacte (8.21) donne alors

$$0 \longrightarrow \mathrm{Jac}(X) \longrightarrow H^1(X,\mathcal{O}^\star) \xrightarrow{c_1} NS(X) \longrightarrow 0. \tag{8.26}$$

Le groupe de Picard $H^1(X,\mathcal{O}^\star)$ est donc une extension du tore complexe $\mathrm{Jac}(X)$ par le $\mathbb{Z}$-module de type fini $NS(X)$.

8.27. Corollaire. *Le groupe de Picard de $\mathbb{P}^n$ est $H^1(\mathbb{P}^n,\mathcal{O}^\star) \simeq \mathbb{Z}$ avec $\mathcal{O}(1)$ comme générateur, i.e. tout fibré en droites sur $\mathbb{P}^n$ est isomorphe à l'un des fibrés en droites $\mathcal{O}(k)$, $k \in \mathbb{Z}$.*

Preuve. Nous avons $H^k(\mathbb{P}^n,\mathcal{O}) = H^{0,k}(\mathbb{P}^n,\mathbb{C}) = 0$ pour $k \geqslant 1$ grâce à la conséq. 8.8, donc $\mathrm{Jac}(\mathbb{P}^n) = 0$ et $NS(\mathbb{P}^n) = H^2(\mathbb{P}^n,\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}$. De plus, $c_1\big(\mathcal{O}(1)\big)$ est un générateur de $H^2(\mathbb{P}^n,\mathbb{Z})$. □

§9. Suite spectrale de Hodge-Frölicher

Soit X une variété complexe quelconque (i.e. non nécessairement compacte) de dimension n. Nous considérons le complexe double $K^{p,q} = C^\infty(X,\Lambda^{p,q}T^\star_X)$ avec sa différentielle totale $d = d' + d''$. La *suite spectrale de Hodge-Frölicher* (ou *suite spectrale de Hodge vers De Rham*) est par définition la suite spectrale associée à ce complexe double.

Rappelons d'abord la machinerie algébrique des suites spectrales, qui s'applique à un complexe double arbitraire $(K^{p,q}, d' + d'')$ de modules sur un anneau. Nous supposons ici pour simplifier que $K^{p,q} = 0$ si $p < 0$ ou $q < 0$. On associe d'abord à $K^{\bullet,\bullet}$ le complexe total $(K^\bullet, d)$ tel que $K^l = \bigoplus_{p+q=l} K^{p,q}$, muni de la différentielle totale $d = d' + d''$. Alors $K^\bullet$ admet une filtration décroissante formée des sous-complexes $F^pK^\bullet$ tels que

$$F^pK^l = \bigoplus_{p\leqslant j\leqslant l} K^{j,l-j}. \tag{9.1}$$

On obtient une filtration induite sur les groupes de cohomologie $H^l(K^\bullet)$ du complexe total en posant

$$F^pH^l(K^\bullet) := \mathrm{Im}\big(H^l(F^pK^\bullet) \to H^l(K^\bullet)\big), \tag{9.2}$$

et on note $G^pH^l(K^\bullet) = F^pH^l(K^\bullet)/F^{p+1}H^l(K^\bullet)$ le module gradué associé. La théorie des suites spectrales (voir par exemple [God57]) nous dit qu'il existe une suite de complexes doubles $E_r^{\bullet,\bullet}$, $r \geqslant 1$, munis de différentielles $d_r : E_r^{p,q} \to E_r^{p+r,q-r+1}$ de bidegré $(r, -r+1)$, telle que $E_{r+1} = H^\bullet(E_r)$ se calcule par récurrence comme la cohomologie du complexe $(E_r^{\bullet,\bullet}, d_r)$, et telle que la limite $E_\infty^{p,q} = \lim_{r\to+\infty} E_r^{p,q}$ s'identifie avec le module gradué $G^\bullet H^\bullet(K^\bullet)$, de façon précise $E_\infty^{p,q} = G^pH^{p+q}(K^\bullet)$. Les termes E_1 sont définis comme les groupes de cohomologie du complexe partiel $d'' : K^{p,q} \to K^{p,q+1}$ par rapport à la deuxième différentielle, c'est-à-dire

$$E_1^{p,q} = H^q\big((K^{p,\bullet}, d'')\big), \tag{9.4}$$

et la différentielle $d_1 : E_1^{p,q} \to E_1^{p+1,q}$ est induite par la première différentielle d' :

$$d' : H^q\big((K^{p,\bullet}, d'')\big) \longrightarrow H^q\big((K^{p+1,\bullet}, d'')\big). \tag{9.5}$$

En fait, on a $E_r^{p,q} = 0$ sauf si $p, q \geqslant 0$, et la limite $E_\infty = \lim E_r$ est stationnaire, plus précisément

$$E_r^{p,q} = E_{r+1}^{p,q} = \cdots = E_\infty^{p,q} \qquad \text{lorsque } r \geqslant \max(p+1, q+2),$$

comme on le voit en considérant les indices en lesquels d_r peut être non nulle. On dit que la suite spectrale *converge* vers le gradué du module filtré $H^\bullet(K^\bullet)$, et on symbolise habituellement cette situation par la notation

$$E_1^{p,q} \Rightarrow G^pH^{p+q}(K^\bullet).$$

Un examen soigneux des termes de petit degré conduit à la suite exacte

$$0 \longrightarrow E_2^{1,0} \longrightarrow H^1(K^\bullet) \longrightarrow E_2^{0,1} \xrightarrow{d_2} E_2^{2,0} \longrightarrow H^2(K^\bullet). \tag{9.6}$$

On dit que la suite spectrale *dégénère* en E_{r_0} si $d_r = 0$ pour tout $r \geqslant r_0$ et pour tout bidegré (p,q). On a alors bien sûr $E_{r_0}^{\bullet,\bullet} = E_{r_0+1}^{\bullet,\bullet} = \cdots = E_\infty^{\bullet,\bullet}$.

Dans le cas de la suite spectrale de Hodge-Frölicher, les termes E_1 sont les groupes de cohomologie de Dolbeault $E_1^{p,q} = H^{p,q}(X,\mathbb{C})$, et la cohomologie du complexe total n'est autre que la cohomologie de De Rham $H^\bullet_{\mathrm{DR}}(X,\mathbb{C})$. On obtient donc une suite spectrale

$$E_1^{p,q} = H^{p,q}(X,\mathbb{C}) \Rightarrow G^p H^{p+q}_{\mathrm{DR}}(X,\mathbb{C}) \tag{9.7}$$

de la cohomologie de Dolbeault vers la cohomologie de De Rham. La filtration correspondnate $F^pH^k_{\mathrm{DR}}(X,\mathbb{C})$ des groupes de cohomologie est appelée *filtration de Hodge* (*-Frölicher*).

Supposons maintenant *X compacte*. Tous les termes $E_r^{p,q}$ sont alors des espaces vectoriels de dimension finie. Puisque $E_{r+1} = H^\bullet(E_r)$, les dimensions $\dim E_r^{p,q}$ décroissent (ou stationnent) avec r, donc $\dim E_\infty^{p,q} \leqslant \dim E_r^{p,q}$, et l'égalité a lieu si et seulement si la suite spectrale dégénère en E_r. En particulier, les nombres de Betti $b_l = \dim H^l(X,\mathbb{C})$ et les nombres de Hodge $h^{p,q} = \dim E_1^{p,q}$ satisfont l'inégalité

$$b_l = \sum_{p+q=l} \dim E_\infty^{p,q} \leqslant \sum_{p+q=l} \dim E_1^{p,q} = \sum_{p+q=l} h^{p,q}, \tag{9.8}$$

et l'égalité équivaut à la dégénérescence de la suite spectrale en $E_1^\bullet$. Comme conséquence, nous avons le

9.9. Théorème. *Si X est une variété complexe compacte, les propriétés suivantes sont équivalentes :*

a) *La suite spectrale de Hodge-Frölicher dégénère en $E_1^\bullet$.*

b) *On a l'égalité $b_l = \sum_{p+q=l} h^{p,q}$ pour tout l.*

c) *Il existe un isomorphisme $G^pH^{p+q}_{\mathrm{DR}}(X,\mathbb{C}) \simeq H^{p,q}(X,\mathbb{C})$ pour tous p,q.*

Si une de ces conditions est satisfaite, l'isomorphisme c) *est défini de manière canonique.*

Nous pouvons maintenant retraduire les résultats du §8.B comme suit.

9.10. Théorème. *Si X est une variété kählérienne compacte, la suite spectrale de Hodge-Frölicher dégénère en E_1 et il y a une décomposition canonique*

$$H^l_{\mathrm{DR}}(X,\mathbb{C}) = \bigoplus_{p+q=l} H^{p,q}(X,\mathbb{C}), \qquad H^{q,p}(X,\mathbb{C}) = \overline{H^{p,q}(X,\mathbb{C})}.$$

En termes de cette décomposition, la filtration $F^pH^l_{\mathrm{DR}}(X,\mathbb{C})$ est donnée par

$$F^pH^l_{\mathrm{DR}}(X,\mathbb{C}) = \bigoplus_{j\geqslant p} H^{j,l-j}(X,\mathbb{C}).$$

En particulier, la filtration conjuguée $\overline{F^\bullet H^l_{\mathrm{DR}}}$ *est opposée à la filtration* $F^\bullet H^l_{\mathrm{DR}}$, *i.e.,*

$$H^l_{\mathrm{DR}}(X,\mathbb{C}) = F^p H^l_{\mathrm{DR}}(X,\mathbb{C}) \oplus \overline{F^{l-p+1} H^l_{\mathrm{DR}}(X,\mathbb{C})}.$$

9.11. Définition. *Si* X *est une variété complexe compacte, nous disons que* X *admet une décomposition de Hodge si la suite spectrale de Hodge-Frölicher dégénère en* E_1 *et si la filtration conjuguée* $\overline{F^\bullet H^l_{\mathrm{DR}}}$ *est opposée à* $F^\bullet H^l_{\mathrm{DR}}$, *i.e.,* $H^l_{\mathrm{DR}} = F^p H^l_{\mathrm{DR}} \oplus \overline{F^{l-p+1} H^l_{\mathrm{DR}}}$ *pour tout* p.

Si X admet une décomposition de Hodge au sens de la déf. 9.11 et si $p+q=l$, on voit immédiatement à partir de l'égalité $H^l_{\mathrm{DR}} = F^{p+1} H^l_{\mathrm{DR}} \oplus \overline{F^q H^l_{\mathrm{DR}}}$ que

$$F^p H^l_{\mathrm{DR}} = F^{p+1} H^l_{\mathrm{DR}} \oplus (F^p H^l_{\mathrm{DR}} \cap \overline{F^q H^l_{\mathrm{DR}}}),$$

donc on obtient un isomorphisme canonique

$$H^{p,q}(X,\mathbb{C}) \simeq F^p H^l_{\mathrm{DR}} / F^{p+1} H^l_{\mathrm{DR}} \simeq F^p H^l_{\mathrm{DR}} \cap \overline{F^q H^l_{\mathrm{DR}}} \subset H^l_{\mathrm{DR}}. \tag{9.12}$$

Nous déduisons de là qu'il y a bien des isomorphismes canoniques

$$H^l_{\mathrm{DR}}(X,\mathbb{C}) = \bigoplus_{p+q=l} H^{p,q}(X), \qquad H^{q,p}(X,\mathbb{C}) = \overline{H^{p,q}(X,\mathbb{C})},$$

comme attendu. Notons que (9.12) fournit une autre démonstration du fait que la décomposition de Hodge d'une variété kählérienne compacte ne dépend pas de la métrique kählérienne choisie (tous les groupes et morphismes mis en jeu dans (9.12) sont intrinsèques). En fait, nous avons montré qu'une variété kählérienne compacte satisfait une propriété encore plus forte, qu'il sera commode d'appeler *décomposition de Hodge forte*, puisque celle-ci implique trivialement l'existence d'une décomposition de Hodge au sens de la Définition 9.11.

9.13. Définition. *Si* X *est une variété complexe compacte, nous disons que* X *admet une décomposition de Hodge forte si tous les morphismes*

$$H^{p,q}_{\mathrm{BC}}(X,\mathbb{C}) \to H^{p,q}(X,\mathbb{C}), \qquad \bigoplus_{p+q=l} H^{p,q}_{\mathrm{BC}}(X,\mathbb{C}) \to H^l_{\mathrm{DR}}(X,\mathbb{C})$$

sont des isomorphismes.

9.14. Remarque. Deligne [Del68, 72] a donné un critère permettant de vérifier la dégénérescence de la suite spectrale de Hodge dans un contexte plus algébrique, incluant le cas de situations relatives. Plus récemment, Deligne et Illusie [DeI87] ont donné une preuve de la dégénérescence de la suite spectrale de Hodge qui n'utilise pas les méthodes analytiques (leur idée est de travailler en caractéristique p et de relever le résultat en caractéristique 0). Il faut observer que la dégénérescence de la suite spectrale de Hodge-Frölicher *n'implique pas automatiquement* la propriété de symétrie de Hodge $H^{q,p}(X,\mathbb{C}) \simeq \overline{H^{p,q}(X,\mathbb{C})}$ ni l'existence d'une décomposition canonique des groupes de De Rham. En fait, il n'est pas difficile de montrer que la suite spectrale de Hodge-Frölicher d'une surface complexe compacte dégénère toujours en E_1 ; cependant, si X n'est pas kählérienne, alors b_1 est impair, et on peut montrer en utilisant le théorème de l'indice de Hirzebruch que $h^{0,1} = h^{1,0} + 1$ et $b_1 = 2h_{1,0} + 1$ (voir [BPV84]). On peut montrer que l'existence d'une décomposition de Hodge (resp. de Hodge forte) est préservée par des morphismes de contraction (remplacement de X par X', si $\mu : X \to X'$ est une modification) ; c'est une conséquence facile de l'existence d'un foncteur image directe $\mu_\star$ agissant sur tous les groupes de cohomologie mis en jeu, tel que $\mu_\star\mu^\star = \mathrm{Id}$; dans le contexte analytique, $\mu_\star$ se construit aisément en calculant la cohomologie à l'aide des courants, puisqu'on dispose sur ceux-ci d'un foncteur image directe naturel. Comme toute variété de Moishezon admet une modification algébrique projective, nous en déduisons que les variétés de Moishezon admettent également une décomposition de Hodge forte. Il serait intéressant de savoir s'il existe des exemples de variétés complexes compactes possédant une décomposition de Hodge sans avoir une décomposition de Hodge forte (il y a en effet des exemples immédiats de complexes doubles abstraits ayant cette propriété). □

En général, quand X n'est pas kählérienne, un certain nombre d'informations intéressantes peuvent se déduire de la suite spectrale. Par exemple, (9.6) implique

$$b_1 \geqslant \dim E_2^{1,0} + (\dim E_2^{0,1} - \dim E_2^{2,0})_+. \tag{9.15}$$

Par ailleurs, $E_2^{1,0}$ est le groupe de cohomologie défini par la suite

$$d_1 = d' : E_1^{0,0} \longrightarrow E_1^{1,0} \longrightarrow E_1^{2,0},$$

et comme $E_1^{0,0}$ est l'espace des fonctions holomorphes globales sur X, la première flèche d_1 est zéro (par le principe du maximum, les fonctions holomorphes sont constantes sur chaque composante connexe de X). Donc $\dim E_2^{1,0} \geqslant h^{1,0} - h^{2,0}$. De même, $E_2^{0,1}$ est le noyau d'une application $E_1^{0,1} \to E_1^{1,1}$, donc $\dim E_2^{0,1} \geqslant h^{0,1} - h^{1,1}$. De (9.15) nous déduisons

$$b_1 \geqslant (h^{1,0} - h^{2,0})_+ + (h^{0,1} - h^{1,1} - h^{2,0})_+. \tag{9.16}$$

Une autre relation intéressante concerne la caractéristique d'Euler-Poincaré topologique

$$\chi_{\mathrm{top}}(X) = b_0 - b_1 + \cdots - b_{2n-1} + b_{2n}.$$

Nous utiliserons le lemme simple suivant.

9.17. Lemme. *Soit $(C^\bullet, d)$ un complexe borné d'espaces vectoriels de dimension finie sur un corps. Alors, la caractéristique d'Euler*

$$\chi(C^\bullet) = \sum (-1)^q \dim C^q$$

est égale à la caractéristique d'Euler $\chi\big(H^\bullet(C^\bullet)\big)$ *du module de cohomologie.*

Preuve. Posons

$$c_q = \dim C^q, \quad z_q = \dim Z^q(C^\bullet), \quad b_q = \dim B^q(C^\bullet), \quad h_q = \dim H^q(C^\bullet).$$

Alors

$$c_q = z_q + b_{q+1}, \qquad h_q = z_q - b_q.$$

Par conséquent nous trouvons

$$\sum(-1)^q\, c_q = \sum(-1)^q\, z_q - \sum(-1)^q\, b_q = \sum(-1)^q\, h_q. \qquad \square$$

En particulier, si le terme $E_r^\bullet$ de la suite spectrale du complexe filtré $K^\bullet$ est un complexe borné de dimension finie, on a

$$\chi(E_r^\bullet) = \chi(E_{r+1}^\bullet) = \cdots = \chi(E_\infty^\bullet) = \chi\big(H^\bullet(K^\bullet)\big)$$

car $E_{r+1}^\bullet = H^\bullet(E_r^\bullet)$ et $\dim E_\infty^l = \dim H^l(K^\bullet)$. Dans la suite spectrale de Hodge-Frölicher on a par ailleurs $\dim E_1^l = \sum_{p+q=l} h^{p,q}$, donc :

9.18. Théorème. *Pour toute variété complexe compacte* X*, la caractéristique d'Euler topologique peut s'écrire*

$$\chi_{\rm top}(X) = \sum_{0\leqslant k\leqslant 2n} (-1)^l b_l = \sum_{0\leqslant p,q\leqslant n} (-1)^{p+q} h^{p,q}.$$

Nous allons maintenant réinterpréter la suite spectrale de Hodge-Frölicher en termes de la suite spectrale d'hypercohomologie associée au complexe de De Rham holomorphe. Expliquons d'abord brièvement en quoi consiste cette suite spectrale. Etant donné un complexe borné de faisceaux de groupes abéliens $\mathcal{A}^\bullet$ sur un espace topologique X, les *groupes d'hypercohomologie* de $\mathcal{A}^\bullet$ sont définis comme les groupes

$$\mathbb{H}^k(X, \mathcal{A}^\bullet) := H^k(\Gamma(X, \mathcal{L}^\bullet)),$$

où $\mathcal{L}^\bullet$ est un complexe de faisceaux acycliques (faisceaux flasques ou faisceaux de $\mathcal{C}^\infty$ modules par exemple) choisi de sorte qu'on ait un quasi-isomorphisme $\mathcal{A}^\bullet \to \mathcal{L}^\bullet$ (morphisme de complexes de faisceaux induisant un isomorphisme $\mathcal{H}^k(\mathcal{A}^\bullet) \to \mathcal{H}^k(\mathcal{L}^\bullet)$ pour les faisceaux de cohomologie). Il est aisé de voir que l'hypercohomologie ne dépend pas à isomorphisme près du complexe de faisceaux acycliques $\mathcal{L}^\bullet$ choisi. L'hypercohomologie est un foncteur de la catégorie des complexes de faisceaux de groupes abéliens vers la catégorie des groupes gradués ; par définition, si $\mathcal{A}^\bullet \to \mathcal{B}^\bullet$ est un quasi-isomorphisme, alors $\mathbb{H}^k(X, \mathcal{A}^\bullet) \to \mathbb{H}^k(X, \mathcal{B}^\bullet)$ est un isomorphisme ; de plus, l'hypercohomologie se réduit à la cohomologie usuelle $H^k(X, \mathcal{E})$ du faisceau $\mathcal{E}$ pour un complexe $\mathcal{A}^\bullet$ réduit à un seul terme $\mathcal{A}^0 = \mathcal{E}$. Supposons qu'on ait pour chaque terme $\mathcal{A}^p$ du complexe

$\mathcal{A}^\bullet$ une résolution $\mathcal{A}^p \to \mathcal{L}^{p,\bullet}$ par des faisceaux $\mathcal{L}^{p,q}$ acycliques, donnant lieu à un complexe double de faisceaux $(\mathcal{L}^{p,q}, d' + d'')$. Alors le complexe total associé $(\mathcal{L}^\bullet, d)$ est un complexe acyclique quasi-isomorphe à $\mathcal{A}^\bullet$, et on a donc

$$\mathbb{H}^k(X, \mathcal{A}^\bullet) = H^k(\Gamma(X, \mathcal{L}^\bullet)).$$

Mais par ailleurs, le complexe double $K^{p,q} = \Gamma(X, \mathcal{L}^{p,q})$ définit une suite spectrale telle que

$$E_1^{p,q} = H^q(K^{p,\bullet}, d'') = H^q(X, \mathcal{A}^p),$$

convergeant vers le gradué associé à la cohomologie du complexe total $H^k(K^\bullet) = \mathbb{H}^k(X, \mathcal{A}^\bullet)$. On obtient donc une suite spectrale dite *suite spectrale d'hypercohomologie*

$$E_1^{p,q} = H^q(X, \mathcal{A}^p) \Rightarrow G^p\mathbb{H}^{p+q}(X, \mathcal{A}^\bullet). \tag{9.19}$$

La filtration F^p des groupes d'hypercohomologie est obtenue par définition en prenant l'image du morphisme

$$\mathbb{H}^k(X, F^p\mathcal{A}^\bullet) \to \mathbb{H}^k(X, \mathcal{A}^\bullet),$$

où $F^p\mathcal{A}^\bullet$ désigne le complexe tronqué à gauche

$$\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \mathcal{A}^p \longrightarrow \mathcal{A}^{p+1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow \mathcal{A}^N \cdots.$$

Considérons maintenant le cas où X est une variété complexe quelconque et où $\mathcal{A}^\bullet = \Omega_X^\bullet$ est le complexe de De Rham holomorphe (avec la différentielle extérieure usuelle). Le lemme de Poincaré holomorphe montre que $\Omega_X^\bullet$ est une résolution du faisceau constant $\mathbb{C}_X$, i.e., on a un quasi-isomorphisme de complexes de faisceaux $\mathbb{C}_X \to \Omega_X^\bullet$, où $\mathbb{C}_X$ désigne le complexe réduit à un seul terme en degré 0. Par définition de l'hypercohomologie on a donc

$$H^k(X, \mathbb{C}_X) = \mathbb{H}^k(X, \Omega_X^\bullet), \tag{9.20}$$

et la suite exacte d'hypercohomologie du complexe $\Omega_X^\bullet$ fournit une suite spectrale

$$E_1^{p,q} = H^q(X, \Omega_X^p) \Rightarrow G^pH^{p+q}(X, \mathbb{C}_X). \tag{9.21}$$

Or les groupes $\mathbb{H}^k(X, \Omega_X^\bullet)$ peuvent être calculés en utilisant la résolution de $\Omega_X^\bullet$ par le complexe de Dolbeault $\mathcal{L}^{p,q} = \mathcal{C}^\infty(\Lambda^{p,q}T_X^\star)$ (ces faisceaux sont bien acycliques !). On voit alors que la suite spectrale d'hypercohomologie (9.21) n'est autre que la suite spectrale de Hodge-Frölicher précédemment définie.

§10. Déformations et théorèmes de semi-continuité

L'objet de ce paragraphe est d'étudier la dépendance des groupes $H^{p,q}(X_t, \mathbb{C})$ ou plus généralement des groupes de cohomologie $H^q(X_t, E_t)$, lorsque la paire (X_t, E_t) dépend holomorphiquement d'un paramètre t dans un certain espace complexe S. Nous aborderons ces résultats en adoptant le point de vue original de Kodaira-Spencer, tel qu'il est développé dans leurs travaux originaux sur la théorie des déformations (voir par exemple les Oeuvres Complètes de Kodaira [Kod75]). La méthode de Kodaira-Spencer exploite les propriétés de continuité ou de semi-continuité des espaces propres des Laplaciens en fonction du paramètre t. Une autre approche fournissant des résultats plus précis consiste à utiliser le théorème des images directes de Grauert [Gra60].

10.1. Définition. *Une déformation de variétés complexes compactes est par définition un morphisme analytique propre $\sigma : \mathcal{X} \to S$ d'espaces complexes connexes, dont toutes les fibres $X_t = \sigma^{-1}(t)$ sont des variétés lisses de même dimension n, et satisfaisant l'hypothèse locale suivante :*

(H) *Tout point $\zeta \in \mathcal{X}$ admet un voisinage $\mathcal{U}$ tel qu'il existe un biholomorphisme $\psi : U \times V \to \mathcal{U}$ où U est un ouvert de $\mathbb{C}^n$ et V un voisinage de $t = \sigma(\zeta)$, vérifiant $\sigma \circ \psi = \mathrm{pr}_2 : U \times V \to V$ (seconde projection).*

On dit alors que $(X_t)_{t \in S}$ est une famille holomorphe de déformations de l'une quelconque des fibres X_{t_0}, et que S est la base de la déformation. Une famille holomorphe de fibrés vectoriels (resp. de faisceaux) $E_t \to X_t$ est par définition une famille de fibrés (resp. faisceaux) obtenus à partir d'un fibré (resp. faisceau) global $\mathcal{E} \to \mathcal{X}$, par restriction aux différentes fibres X_t.

Si S est lisse, l'hypothèse (H) équivaut à supposer que σ est une submersion holomorphe, en vertu du théorème du rang constant. Il y a néanmoins des situations où l'on doit nécessairement considérer aussi le cas de bases S singulières (par exemple lorqu'on cherche à construire la "déformation universelle" d'une variété). Dans un cadre topologique (différentiable et lisse), nous avons le lemme suivant, connu sous le nom de lemme d'Ehresmann.

10.2. Lemme d'Ehresmann. *Soit $\sigma : \mathcal{X} \to S$ une submersion différentiable propre et lisse.*

a) *Si S est contractile, alors pour tout $t_0 \in S$, il existe un diagramme commutatif*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{X} & \xrightarrow{\Phi} & X_{t_0} \times S \\ & \mathrm{pr}_1 \searrow \quad \swarrow \sigma & \\ & S & \end{array}$$

où Φ est un difféomorphisme.

b) *Pour une base S quelconque, $\mathcal{X} \to S$ est un fibré (différentiablement) localement trivial. En particulier, si S est connexe, les fibres sont toutes difféomorphes.*

Preuve. a) Soit $H : S\times[0,1] \to S$ une homotopie différentiable entre $H(\bullet,0) = \mathrm{Id}_S$ et $h(\bullet,1) =$ application constante $S \to \{t_0\}$. Le produit fibré

$$\widetilde{\mathcal{X}} = \{(x,s,t) \in \mathcal{X} \times S \times [0,1]\,;\, \sigma(x) = H(s,t)\}$$

muni de la projection $\widetilde{\sigma} = \mathrm{pr}_2 \times \mathrm{pr}_3 : \widetilde{\mathcal{X}} \to S \times [0,1]$ est encore une submersion différentiable, comme on le vérifie aisément. On en déduit qu'il existe un champ de vecteurs ξ sur $\widetilde{X}$ qui relève le champ de vecteurs $\frac{\partial}{\partial t}$ sur $S \times [0,1]$, i.e. $\sigma_\star\xi = \frac{\partial}{\partial t}$ (il existe localement des relèvements par la propriété de submersivité, et on recolle ces relèvements au moyen d'une partition de l'unité). Soit φ_t le flot de ce relèvement : alors, si $(x,s,0) \in \widetilde{\mathcal{X}}_{\restriction S\times\{0\}} \simeq \mathcal{X}$, on a par construction $\varphi_t(x,s,0) = (?,s,t)$, donc $\Phi = \varphi_1$ définit un difféomorphisme de $\widetilde{\mathcal{X}}_{\restriction S\times\{0\}} \simeq \mathcal{X}$ sur $\widetilde{\mathcal{X}}_{\restriction S\times\{1\}} \simeq X_{t_0} \times S$, commutant avec la projection sur S.

b) se déduit immédiatement de a). □

Il résulte de b) que le fibré $t \mapsto H^k(X_t,\mathbb{C})$ est un fibré localement trivial en $\mathbb{C}$-espaces vectoriels de dimension finie. On a par ailleurs dans chaque fibre un sous-groupe abélien libre $\mathrm{Im}\, H^k(X_t,\mathbb{Z}) \subset H^k(X_t,\mathbb{C})$ de rang b_k qui engendre $H^k(X_t,\mathbb{C})$ comme $\mathbb{C}$-espace vectoriel. Les matrices de transition de ce système localement constant sont dans $\mathrm{SL}_{b_k}(\mathbb{Z})$. Comme les matrices de transition sont localement constantes, le fibré $t \mapsto H^k(X_t,\mathbb{C})$ peut être muni d'une connexion D telle que $D^2 = 0$: cette connexion est appelée *connexion de Gauss-Manin*. Le lemme suivant nous sera utile.

10.3. Lemme. *Soit $\sigma : \mathcal{X} \to S$ une submersion différentiable propre et lisse et $\mathcal{E}$ un fibré vectoriel de classe C^∞ au dessus de $\mathcal{X}$. Considérons une famille d'opérateurs elliptiques*

$$P_t : C^\infty(X_t,E_t) \longrightarrow C^\infty(X_t,E_t)$$

de degré δ. On suppose que P_t est autoadjoint semipositif relativement à une métrique h_t sur E_t et à une forme volume dV_t sur X_t, et tel que les coefficients de P_t, h_t et dV_t sont de classe C^∞ sur $\mathcal{X}$. Alors les valeurs propres de P_t, comptées avec multiplicité, se rangent en une suite

$$\lambda_0(t) \leqslant \lambda_1(t) \leqslant \cdots \leqslant \lambda_k(t) \to +\infty,$$

où la k-ième valeur propre $\lambda_k(t)$ est une fonction continue de t. De plus, si λ n'est pas dans le spectre $\{\lambda_k(t_0)\}_{k\in\mathbb{N}}$ de P_{t_0}, la somme directe $W_{\lambda,t} \subset C^\infty(X_t,E_t)$ des espaces propres de P_t de valeurs propres $\lambda_k(t) \leqslant \lambda$ définit un fibré vectoriel $t \mapsto W_{t,\lambda}$ de classe C^∞ dans un voisinage de t_0.

Preuve. Comme les résultats sont locaux au dessus de S, on peut supposer que $\mathcal{X} = X_{t_0} \times S$ et $\mathcal{E} = \mathrm{pr}_1^\star E_{t_0}$ ont leurs fibres X_t et E_t indépendantes de t (mais les formes dV_t sur X_t et les métriques h_t sur E_t vont en général dépendre de t). Soit $\Pi_{\lambda,t}$ l'opérateur de projection orthogonale sur $W_{\lambda,t}$ dans

$L^2(X_t, E_t) \simeq L^2(X_{t_0}, E_{t_0})$. Si $\Gamma(0, \lambda)$ désigne le cercle de centre 0 et de rayon λ dans le plan complexe, la formule de Cauchy donne

$$\Pi_{\lambda,t} = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\Gamma(0,\lambda)} (z \,\mathrm{Id} - P_t)^{-1} dz,$$

où l'intégrale est vue comme une intégrale à valeurs vectorielles dans l'espace des opérateurs bornés sur $L^2(M_{t_0}, E_{t_0})$ (il suffit de vérifier la formule sur les vecteurs propres de P_t, ce qui est élémentaire). Les démonstrations faites au § 3 montrent qu'il existe une famille d'opérateurs pseudo-différentiels Q_t d'ordre $-\delta$, dont le symbole dépend de manière C^∞ de t (et avec uniformité des estimations par dérivation en t), tels que $P_t Q_t = \mathrm{Id} + R_t$ pour des opérateurs régularisants R_t dont le noyau dépend aussi de manière C^∞ de t. Comme Q_t est une famille d'opérateurs compacts sur $L^2(X_t, E_t)$ qui dépend de manière C^∞ de t, les valeurs propres de Q_t dépendent continûment de t. Quitte à changer Q_{t_0} sur un sous-espace de dimension finie, on peut supposer que Q_{t_0} est un isomorphisme de $L^2(X_{t_0}, E_{t_0})$ sur $W^\delta(X_{t_0}, E_{t_0})$. Il en sera alors de même pour Q_t dans un voisinage de t_0, et par suite $z \,\mathrm{Id} - P_t$ est inversible si et seulement si $(z \,\mathrm{Id} - P_t) Q_t = \mathrm{Id} + R_t + z Q_t$ est inversible. Si λ n'est pas dans le spectre de P_{t_0}, on voit donc que pour tout $z \in \Gamma(0, \lambda)$ l'inverse $(z \,\mathrm{Id} - P_t)^{-1} = Q_t (\mathrm{Id} + R_t + z Q_t)^{-1}$ dépend de façon C^∞ de t comme opérateur $L^2(X_t, E_t) \to W^\delta(X_t, E_t)$, par suite $t \mapsto \Pi_{\lambda,t}$ est C^∞ au voisinage de t. Ceci entraîne que $t \mapsto W_{t,\lambda}$ est une fibration localement triviale de classe C^∞ au voisinage de t_0. La continuité de la valeur propre $\lambda_k(t)$ de P_t résulte de la constance du rang de $W_{\lambda,t}$ au voisinage de t_0, pour $\lambda = \lambda_k(t_0) \pm \varepsilon$. □

10.4. Théorème de semi-continuité (Kodaira-Spencer)**.** *Si $\mathcal{X} \to S$ est un morphisme $\mathbb{C}$-analytique propre et lisse et si $\mathcal{E}$ est un faisceau localement libre sur $\mathcal{X}$, les dimensions $h^q(t) = h^q(X_t, \mathcal{E}_t)$ sont des fonctions semi-continues supérieurement. Plus précisément, les sommes alternées*

$$h^q(t) - h^{q-1}(t) + \cdots + (-1)^q h^0(t), \qquad 0 \leqslant q \leqslant n = \dim X_t$$

sont des fonctions semi-continues supérieurement.

Preuve. Soit E_t le fibré vectoriel holomorphe associé à $\mathcal{E}_t$. Munissons $\mathcal{E}$ et $\mathcal{X}$ de métriques hermitiennes arbitraires. D'après l'isomorphisme de Hodge pour la d''-cohomologie, on peut interpréter $H^q(X_t, \mathcal{E}_t)$ comme l'espace des formes harmoniques pour le Laplacien $\Delta_t''^q$ agissant sur $C^\infty(X_t, \Lambda^{0,q} T^\star_{X_t} \otimes E_t)$. Fixons un point $t_0 \in S$ et un réel $\lambda > 0$ qui n'appartient pas au spectre des opérateurs $\Delta_{t_0}''^q$, $0 \leqslant q \leqslant n = \dim X_t$. Alors

$$W_t^q = W_{\lambda,t}^q = \text{somme directe des espaces propres de } \Delta_t''^q \text{ de valeurs propres} \leqslant \lambda$$

définit un fibré W^q de classe C^∞ au voisinage de t_0. De plus la différentielle d_t'' commute avec Δ_t'' et envoie donc les espaces propres de $\Delta_t''^q$ dans les espaces propres de $\Delta_t''^{q+1}$ associés aux mêmes valeurs propres. Ceci montre que $(W_t^\bullet, d_t'')$ est un sous-complexe de dimension finie du complexe de Dolbeault $\big(C^\infty(X_t, \Lambda^{0,q} T^\star_{X_t} \otimes E_t), d_t''\big)$.

La cohomologie de ce sous-complexe coïncide avec $H^q(X_t, E_t)$ puisque la relation $d''_t d''^\star_t + d''^\star_t d''_t = \Delta''_t$ montre que $\frac{1}{\lambda_k} d''^\star_t$ est un opérateur d'homotopie sur le sous-complexe formé des espaces propres de valeur propre λ_k lorsque $\lambda_k \neq 0$. Si Z^q_t désigne le noyau du morphisme $d''^q_t : W^q_t \to W^{q+1}_t$, alors $z^q(t) := \dim Z^q_t$ est une fonction semi-continue supérieurement pour la topologie de Zariski, comme on le voit aisément en regardant le rang des mineurs de la matrice définissant le morphisme $d''^q : W^q \to W^{q+1}$. Le complexe tronqué

$$0 \to W^0_t \to W^1_t \to \cdots \to W^{q-1}_t \to Z^q_t \to 0$$

ayant pour cohomologie les groupes $H^j(X_t, E_t)$ d'indices $0 \leqslant j \leqslant q$, on obtient

$$h^q(t) - h^{q-1}(t) + \cdots + (-1)^q h^0(t) = z^q(t) - w^{q-1} + w^{q-2} + \cdots + (-1)^q w^0,$$

où w^q désigne le rang de W^q. La semi-continuité supérieure du membre de gauche en résulte, et celle de $h^q(t)$ est alors immédiate par récurrence sur q. □

10.5. Invariance des nombres de Hodge. *Soit $\mathcal{X} \to S$ un morphisme $\mathbb{C}$-analytique propre et lisse. On suppose que les fibres X_t sont des variétés kählériennes. Alors les nombres de Hodge $h^{p,q}(X_t)$ sont constants. De plus, dans la décomposition*

$$H^k(X_t, \mathbb{C}) = \bigoplus_{p+q=k} H^{p,q}(X_t, \mathbb{C}),$$

les fibrations $t \mapsto H^{p,q}(X_t, \mathbb{C})$ définissent des sous-fibrés de classe C^∞ (en général non holomorphes) de $t \mapsto H^k(X_t, \mathbb{C})$.

Preuve. Le lemme 10.2 entraîne que les nombres de Betti $b_k = \dim H^k(X_t, \mathbb{C})$ sont constants. Comme $h^{p,q}(X_t, \mathbb{C}) = h^q(X_t, \Omega^p_{X_t})$ est semi-continue supérieurement d'après le th. 10.4 et

$$h^{p,q}(X_t) = b_k - \sum_{r+s=k,\ (r,s)\neq(p,q)} h^{r,s}(X_t),$$

ces fonctions sont en fait aussi semi-continues inférieurement. Par suite elles sont continues et donc constantes. Un théorème de Kodaira [Kod75] montre que si une fibre X_{t_0} est kählérienne, alors les fibres voisines X_t sont kählériennes et les métriques kählériennes ω_t peuvent être choisies de sorte qu'elles dépendent de manière C^∞ de t. Les espaces de (p,q)-formes harmoniques dépendent alors de manière C^∞ de t d'après le le th. 10.4, et on en déduit que $t \mapsto H^{p,q}(X_t, \mathbb{C})$ est un sous-fibré de classe C^∞ de $H^k(X_t, \mathbb{C})$. □

On peut en fait obtenir des résultats plus précis et plus généraux au moyen du théorème des images directes de Grauert [Gra60]. Rappelons qu'étant donné une application continue $f : X \to Y$ entre espaces topologiques et un faisceau $\mathcal{E}$ de groupes abéliens sur X, on définit le faisceau image directe $R^k f_\star \mathcal{E}$ sur Y comme étant le faisceau associé au préfaisceau $U \mapsto H^k(f^{-1}(U), \mathcal{E})$, pour tout

ouvert U de Y. Plus généralement, étant donné un complexe de faisceaux $\mathcal{A}^\bullet$, nous avons des faisceaux images directes $\mathbb{R}^q f_\star \mathcal{A}^\bullet$, obtenus à partir des préfaisceaux d'hypercohomologie
$$U \mapsto \mathbb{H}^k(f^{-1}(U), \mathcal{A}^\bullet).$$
La démonstration du théorème des images directes proposée par [FoK71] et [KiV71] (voir aussi [DoV72]) fournit les résultats fondamentaux suivants que nous admettrons.

10.6. Théorème des images directes. *Soit $\sigma : \mathcal{X} \to S$ un morphisme propre d'espaces analytiques complexes et $\mathcal{A}^\bullet$ un complexe borné de faisceaux cohérents de $\mathcal{O}_\mathcal{X}$-modules. Alors*

a) *Les faisceaux images directes $\mathbb{R}^k \sigma_\star \mathcal{A}^\star$ sont des faisceaux cohérents sur S.*

b) *Tout point de S admet un voisinage $U \subset S$ sur lequel il existe un complexe borné $\mathcal{W}^\bullet$ de faisceaux de $\mathcal{O}_S$-modules localement libres dont les faisceaux de cohomologie $\mathcal{H}^k(\mathcal{W}^\bullet)$ sont isomorphes aux faisceaux $\mathbb{R}^k \sigma_\star \mathcal{A}^\bullet$.*

c) *Si σ est à fibres équidimensionnelles* (*"morphisme géométriquement plat"*), *l'hypercohomologie de la fibre $X_t = \sigma^{-1}(t)$ à valeurs dans $\mathcal{A}_t^\bullet = \mathcal{A}^\bullet \otimes_{\mathcal{O}_\mathcal{X}} \mathcal{O}_{X_t}$* (*où $\mathcal{O}_{X_t} = \mathcal{O}_\mathcal{X}/\sigma^\star \mathfrak{m}_{S,t}$*)*, est donnée par*
$$H^k(X_t, \mathcal{A}_t^\bullet) = H^k(W_t^\bullet),$$
où ($W_t^\bullet$) *est le complexe d'espaces de dimension finie $W_t^k = \mathcal{W}^k \otimes_{\mathcal{O}_{S,t}} \mathcal{O}_{S,t}/\mathfrak{m}_{S,t}$.*

d) *Sous l'hypothèse du* c)*, si les espaces d'hypercohomologie $\mathbb{H}^k(X_t, \mathcal{A}_t^\bullet)$ des fibres sont de dimension constante, les faisceaux $\mathbb{R}^k \sigma_\star \mathcal{A}^\bullet$ sont localement libres sur S.*

Les mêmes résultats sont vrais en particulier pour les images directes $R^k \sigma_\star \mathcal{E}$ d'un faisceau cohérent $\mathcal{E}$ sur $\mathcal{X}$, et les groupes de cohomologie $H^k(X_t, \mathcal{E}_t)$ des fibres.

On notera que la propriété d) est en fait une conséquence formelle de c), car l'hypothèse garantit que les matrices holomorphes définissant les morphismes $\mathcal{W}^k \to \mathcal{W}^{k+1}$ sont de rang constant en chaque point $t \in S$. De (10.6 b) on déduit alors le résultat suivant dû à H. Flenner [Fle81], avec une démonstration identique à celle du th. 10.4.

10.7. Théorème de semi-continuité. *Si $\mathcal{X} \to S$ est un morphisme analytique propre à fibres équidimensionnelles et si $\mathcal{E}$ est un faisceau cohérent sur $\mathcal{X}$, les sommes alternées*
$$h^q(t) - h^{q-1}(t) + \cdots + (-1)^q h^0(t),$$
des dimensions $h^k(t) = h^k(X_t, \mathcal{E}_t)$ sont des fonctions semi-continues supérieurement de t dans la topologie de Zariski analytique (*topologie dont les fermés sont les ensembles analytiques*)*.*

Soit $\sigma : \mathcal{X} \to S$ une submersion $\mathbb{C}$-analytique propre et lisse. On suppose que la suite spectrale de Hodge des fibres X_t dégénère en E_1 pour tour $t \in S$ (d'après

(10.7) c'est en fait une propriété ouverte pour la topologie de Zariski analytique sur S). Si $U \subset S$ est un ouvert contractile, alors $\sigma^{-1}(U) \simeq X_t \times U$ pour toute fibre au dessus de $t \in U$. Si $\mathbb{Z}_{\mathcal{X}}$, $\mathbb{C}_X$ désignent les faisceaux localement constants de base $\mathcal{X}$ et de fibres $\mathbb{Z}$, $\mathbb{C}$, on obtient

$$\Gamma(U, R^k\sigma_\star\mathbb{Z}_{\mathcal{X}}) = H^k(\sigma^{-1}(U), \mathbb{Z}) = H^k(X_t, \mathbb{Z}),$$
$$\Gamma(U, R^k\sigma_\star\mathbb{C}_{\mathcal{X}}) = H^k(\sigma^{-1}(U), \mathbb{C}) = H^k(X_t, \mathbb{C}),$$

de sorte que $R^k\sigma_\star\mathbb{Z}_{\mathcal{X}}$ et $R^k\sigma_\star\mathbb{C}_{\mathcal{X}}$ sont des faisceaux localement constants sur S, de fibres $H^k(X_t, \mathbb{Z})$ et $H^k(X_t, \mathbb{C})$. Le fibré $t \mapsto H^k(X_t, \mathbb{C})$, muni de sa connexion plate D (connexion de Gauss-Manin), possède une structure holomorphe canonique induite par la composante $D^{0,1}$ de la connexion de Gauss-Manin. Le fibré plat $\bigoplus_k H^k(X_t, \mathbb{C})$ est appelé *fibré de Hodge* de la fibration $\mathcal{X} \to S$.

Considérons maintenant le complexe de De Rham relatif $(\Omega^\bullet_{\mathcal{X}/S}, d_{\mathcal{X}/S})$ de la fibration $\mathcal{X} \to S$. Ce complexe fournit une résolution du faisceau $\sigma^{-1}\mathcal{O}_S$ (image inverse “purement faisceautique” de $\mathcal{O}_S$), par suite

$$\mathbb{R}^k\sigma_\star\Omega^\bullet_{\mathcal{X}/S} = R^k\sigma_\star(\sigma^{-1}\mathcal{O}_S) = (R^k\sigma_\star\mathbb{C}_{\mathcal{X}}) \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_S. \tag{10.8}$$

La dernière égalité s'obtient par un argument immédiat de $\mathcal{O}_S(U)$ linéarité pour la cohomologie calculée sur les ouverts $\sigma^{-1}(U)$ (la structure complexe de $\sigma^{-1}(U)$ n'intervenant pas ici). En d'autres termes, $\mathbb{R}^k\sigma_\star\Omega^\bullet_{\mathcal{X}/S}$ est le $\mathcal{O}_S$-module localement libre associé au fibré plat $t \mapsto H^q(X_t, \mathbb{C})$. On a une suite spectrale d'hypercohomologie relative

$$E_1^{p,q} = R^q\sigma_\star\Omega^p_{\mathcal{X}/S} \Rightarrow G^p\mathbb{R}^{p+q}\sigma_\star\Omega^\bullet_{\mathcal{X}/S} = G^pR^{p+q}\sigma_\star\mathbb{C}_{\mathcal{X}}$$

(la suite spectrale relative est obtenue simplement en “faisceautisant” la suite spectrale d'hypercohomologie absolue (9.19) du complexe $\Omega^\bullet_{\mathcal{X}/S}$ sur les ouverts $\sigma^{-1}(U)$). Comme la cohomologie de $\Omega^p_{\mathcal{X}/S}$ sur les fibres X_t n'est autre que l'espace de rang constant $H^q(X_t, \Omega^p_{X_t})$, le th. 10.6 d) montre que les faisceaux images directes $R^q\sigma_\star\Omega^p_{\mathcal{X}/S}$ sont localement libres. Par ailleurs, la filtration $F^pH^k(X_t, \mathbb{C}) \subset H^k(X_t, \mathbb{C})$ est obtenue au niveau des $\mathcal{O}_S$-modules localement libres associés en prenant l'image du morphisme $\mathcal{O}_S$-linéaire

$$\mathbb{R}^k\sigma_\star F^p\Omega^\bullet_{\mathcal{X}/S} \longrightarrow \mathbb{R}^k\sigma_\star\Omega^\bullet_{\mathcal{X}/S},$$

c'est donc un sous-faisceau cohérent (et même un sous-faisceau localement libre, d'après la propriété de constance du rang sur les fibres X_t). De là et de (10.8) on déduit le

10.9. Théorème (holomorphie de la filtration de Hodge). *La filtration de Hodge $F^pH^k(X_t, \mathbb{C}) \subset H^k(X_t, \mathbb{C})$ est constituée de sous-fibrés vectoriels holomorphes relativement à la structure holomorphe définie par la connexion de Gauss-Manin.*

On voit qu'en général $H^{p,q}(X_t,\mathbb{C}) = F^pH^k(X_t,\mathbb{C}) \cap \overline{F^qH^k(X_t,\mathbb{C})}$ n'a aucune raison d'être un sous-fibré holomorphe de $H^k(X_t,\mathbb{C})$ pour $p+q=k$ quelconques, bien que $H^{p,q}(X_t,\mathbb{C})$ possède une structure naturelle de fibré holomorphe (obtenue à partir du faisceau cohérent $R^q\sigma_\star\Omega^p_{\mathcal{X}/S}$, ou comme quotient des $F^pH^k(X_t,\mathbb{C})$). Autrement dit, c'est la *décomposition* de Hodge qui n'est pas holomorphe.

10.10. Exemple. Soit $S = \{\tau \in \mathbb{C}\,;\, \mathrm{Im}\,\tau > 0\}$ le demi-plan supérieur, et $\mathcal{X} \to S$ la famille "universelle" des courbes elliptiques au-dessus de S, définie par $X_\tau = \mathbb{C}/(\mathbb{Z}+\mathbb{Z}\tau)$. Les deux éléments de base du fibré de Hodge $H^1(X_\tau,\mathbb{C})$, duaux de la base $(1,\tau)$ du réseau des périodes, sont $\alpha = dx - \mathrm{Re}\,\tau/\,\mathrm{Im}\,\tau\,dy$ et $\beta = (\mathrm{Im}\,\tau)^{-1}dy$ ($z = x+\mathrm{i}y \in \mathbb{C}$ désignant la coordonnée sur X_τ). Ces éléments vérifient donc $D\alpha = D\beta = 0$ et définissent la structure holomorphe du fibré de Hodge ; le sous-fibré $H^{1,0}(X_\tau,\mathbb{C})$ engendré par la 1-forme $dz = \alpha + \tau\beta$ est bien holomorphe (comme il se doit !), cependant on voit que les composantes $\beta^{1,0} = -\frac{\mathrm{i}}{2}(\mathrm{Im}\,\tau)^{-1}dz$ et $\beta^{0,1} = \frac{\mathrm{i}}{2}(\mathrm{Im}\,\tau)^{-1}d\overline{z}$ ne sont pas holomorphes en τ.

Partie II :
Estimations L^2 et théorèmes d'annulation

§11. Concepts de pseudoconvexité et de positivité

Les énoncés et démonstrations des théorèmes d'annulation mettent en jeu plusieurs notions de pseudoconvexité et de positivité. Nous présentons d'abord un résumé synthétique des concepts de base qui nous seront nécessaires.

§11.A. Fonctions plurisousharmoniques

Les fonctions plurisousharmoniques ont été introduites indépendamment par Lelong et Oka en 1942 en vue de l'étude de la convexité holomorphe. Nous renvoyons à [Lel67, 69] pour plus de détails.

11.1. Définition. *Une fonction* $u : \Omega \to [-\infty, +\infty[$ *définie sur un ouvert* $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ *est dite plurisousharmonique (psh en abrégé) si*

a) *u est semi-continue supérieurement* ;

b) *pour toute droite complexe* $L \subset \mathbb{C}^n$, $u_{\restriction \Omega \cap L}$ *est sous-harmonique sur* $\Omega \cap L$, *c'est-à-dire, pour tous* $a \in \Omega$ *et* $\xi \in \mathbb{C}^n$ *tels que* $|\xi| < d(a, \complement\Omega)$, *la fonction* u *satisfait l'inégalité de moyenne*

$$u(a) \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(a + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}\,\xi)\,d\theta.$$

L'ensemble des fonctions psh sur Ω *sera noté* $\mathrm{Psh}(\Omega)$.

Nous donnons ci-dessous une liste de quelques propriétés fondamentales satisfaites par les fonctions psh. Ces propriétés découlent toutes facilement de la définition.

11.2. Propriétés fondamentales.

a) Toute fonction $u \in \mathrm{Psh}(\Omega)$ est sous-harmonique en ses $2n$ variables réelles, i.e. satisfait l'inégalité de valeur moyenne sur les boules (ou sphères) euclidiennes :

$$u(a) \leqslant \frac{1}{\pi^n r^{2n}/n!} \int_{B(a,r)} u(z)\,d\lambda(z)$$

pour tout $a \in \Omega$ et tout $r < d(a, \complement\Omega$. Dans ce cas, on a ou bien $u \equiv -\infty$ ou bien $u \in L^1_{\mathrm{loc}}$ sur tout composante connexe de Ω.

b) Pour toute suite décroissante de fonctions psh $u_k \in \mathrm{Psh}(\Omega)$, la limite $u = \lim u_k$ est psh sur Ω.

c) Soit $u \in \mathrm{Psh}(\Omega)$ telle que $u \not\equiv -\infty$ sur toute composante connexe de Ω. Si (ρ_ε) est une famille de noyaux régularisants, alors $u \star \rho_\varepsilon$ est C^∞ et psh sur

$$\Omega_\varepsilon = \big\{x \in \Omega\,;\, d(x, \complement\Omega) > \varepsilon\big\},$$

la famille $(u \star \rho_\varepsilon)$ est croissante en ε et $\lim_{\varepsilon\to 0} u \star \rho_\varepsilon = u$.

d) Soient $u_1, \ldots, u_p \in \mathrm{Psh}(\Omega)$ et $\chi : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ une fonction convexe telle que $\chi(t_1, \ldots, t_p)$ est croissante en chaque variable t_j. Alors $\chi(u_1, \ldots, u_p)$ est psh sur Ω. En particulier $u_1 + \cdots + u_p$, $\max\{u_1, \ldots, u_p\}$, $\log(\mathrm{e}^{u_1} + \cdots + \mathrm{e}^{u_p})$ sont psh sur Ω. □

11.3. Lemme. *Une fonction $u \in C^2(\Omega, \mathbb{R})$ est psh sur Ω si et seulement si la forme hermitienne $Hu(a)(\xi) = \sum_{1\leqslant j,k\leqslant n} \partial^2 u/\partial z_j \partial\overline{z}_k(a)\, \xi_j \overline{\xi}_k$ est semi-positive en tout point $a \in \Omega$.*

Preuve. C'est une conséquence facile de la formule standard suivante

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(a + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}\,\xi)\, d\theta - u(a) = \frac{2}{\pi}\int_0^1 \frac{dt}{t}\int_{|\zeta|<t} Hu(a + \zeta\xi)(\xi)\, d\lambda(\zeta),$$

où $d\lambda$ est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{C}$. Le lemme 11.3 suggère fortement que la plurisousharmonicité est l'analogue complexe naturel de la propriété de convexité linéaire dans le cas réel. □

Pour des fonctions non régulières, on obtient une caractérisation analogue de la plurisousharmonicité au moyen d'un procédé de régularisation.

11.4. Théorème. *Si $u \in \mathrm{Psh}(\Omega)$ avec $u \not\equiv -\infty$ sur toute composante connexe de Ω, alors pour tout $\xi \in \mathbb{C}^n$*

$$Hu(\xi) = \sum_{1\leqslant j,k\leqslant n} \frac{\partial^2 u}{\partial z_j \partial\overline{z}_k}\, \xi_j\overline{\xi}_k \in \mathcal{D}'(\Omega)$$

est une mesure positive. Inversement, si $v \in \mathcal{D}'(\Omega)$ est telle que $Hv(\xi)$ est une mesure positive pour tout $\xi \in \mathbb{C}^n$, il existe une unique fonction $u \in \mathrm{Psh}(\Omega)$ qui soit localement intégrable sur Ω et telle que v est la distribution associée à u. □

En vue de dégager une meilleure compréhension géométrique de la notion de plurisousharmonicité, nous supposons plus généralement que la fonction u vit sur une variété complexe X de dimension n. Si $\Phi : X \to Y$ est une application holomorphe et si $v \in C^2(Y, \mathbb{R})$, nous avons $d'd''(v \circ \Phi) = \Phi^\star d'd''v$, donc

$$H(v \circ \Phi)(a, \xi) = Hv\big(\Phi(a), \Phi'(a).\xi\big).$$

En particulier Hu, vue comme forme hermitienne sur T_X, ne dépend pas du choix des coordonnées $(z_1, \ldots, z_n)$. Par conséquent, la notion de fonction psh a bien un sens sur toute variété complexe. Plus généralement, nous avons

11.5. Proposition. *Si $\Phi : X \to Y$ est une application holomorphe et $v \in \mathrm{Psh}(Y)$, alors $v \circ \Phi \in \mathrm{Psh}(X)$.* □

11.6. Exemple. Il est bien connu que $\log|z|$ est psh (i.e. sous-harmonique) sur $\mathbb{C}$. Donc $\log|f| \in \mathrm{Psh}(X)$ pour toute fonction holomorphe $f \in H^0(X, \mathcal{O}_X)$. Plus généralement

$$\log\big(|f_1|^{\alpha_1} + \cdots + |f_q|^{\alpha_q}\big) \in \mathrm{Psh}(X)$$

pour tout choix de fonctions $f_j \in H^0(X, \mathcal{O}_X)$ et de réels $\alpha_j \geqslant 0$ (appliquer la propriété 11.2 d avec $u_j = \alpha_j \log|f_j|$). Nous nous intéresserons plus particulièrement aux singularités de cette fonction le long de la variété des zéros $f_1 = \cdots = f_q = 0$, lorsque les α_j sont des nombres rationnels. □

11.7. Définition. *On dira qu'une fonction psh $u \in \mathrm{Psh}(X)$ a des singularités analytiques* (*resp. algébriques*) *si u peut s'écrire localement sous la forme*

$$u = \frac{\alpha}{2} \log\big(|f_1|^2 + \cdots + |f_N|^2\big) + v,$$

avec des fonctions holomorphes (*resp. algébriques*) *f_j, $\alpha \in \mathbb{R}_+$* (*resp. $\alpha \in \mathbb{Q}_+$*), *et où v est une fonction bornée.*

Nous introduisons alors l'idéal $\mathcal{J} = \mathcal{J}(u/\alpha)$ des germes de fonctions holomorphes h telles qu'il existe une constante $C \geqslant 0$ pour laquelle $|h| \leqslant C\mathrm{e}^{u/\alpha}$, i.e.

$$|h| \leqslant C\big(|f_1| + \cdots + |f_N|\big).$$

On obtient ainsi un faisceau d'idéaux globalement défini sur X, égal localement à la clôture intégrale $\overline{\mathcal{I}}$ du faisceau d'idéaux $\mathcal{I} = (f_1, \ldots, f_N)$, par suite $\mathcal{J}$ est cohérent sur X. Si $(g_1, \ldots, g_{N'})$ sont des générateurs locaux de $\mathcal{J}$, nous avons encore

$$u = \frac{\alpha}{2} \log\big(|g_1|^2 + \cdots + |g_{N'}|^2\big) + O(1).$$

D'un point de vue algébrique, les singularités de u sont en correspondance bijective avec les "données algébriques" $(\mathcal{J}, \alpha)$. Nous verrons plus loin une autre méthode encore plus importante pour associer un faisceau d'idéaux à une fonction psh.

§11.B. Courants positifs

La théorie des courants a été fondée par G. De Rham [DR55]. Nous rappelons ici seulement les définitions les plus fondamentales. Le lecteur pourra consulter [Fed69] pour un exposé beaucoup plus complet de cette théorie. Dans la situation complexe, la notion spécifique importante de courant positif a été dégagée et étudiée par P. Lelong [Lel57, 69].

Un *courant* de degré q sur une variété différentiable M n'est rien d'autre qu'une q-forme différentielle Θ à coefficients distributions. L'espace des courants de degré q sur M sera noté $\mathcal{D}'^q(M)$. Alternativement, on peut considérer les courants de degré q comme les éléments Θ du dual $\mathcal{D}'_p(M) := \big(\mathcal{D}^p(M)\big)'$ de l'espace $\mathcal{D}^p(M)$ des formes différentielles C^∞ de degré $p = \dim M - q$ à support compact ; l'accouplement de dualité est donné par

$$\langle \Theta, \alpha \rangle = \int_M \Theta \wedge \alpha, \qquad \alpha \in \mathcal{D}^p(M). \tag{11.8}$$

Un exemple fondamental est le *courant d'intégration* $[S]$ sur une sous-variété S orientée et compacte (éventuellement à bord) de M :

$$\langle [S], \alpha \rangle = \int_S \alpha, \qquad \deg\alpha = p = \dim_{\mathbb{R}} S. \tag{11.9}$$

Alors $[S]$ est un courant à coefficients mesures, et la formule de Stokes montre que $d[S] = (-1)^{q-1}[\partial S]$, en particulier $d[S] = 0$ si et seulement si S est une sous-variété sans bord. En raison de cet exemple, l'entier p est appelé dimension de $\Theta \in \mathcal{D}'_p(M)$. On dit que le courant Θ est *fermé* si $d\Theta = 0$.

Sur une variété complexe X, nous avons des notions analogues de bidegré et de bidimension ; comme dans le cas réel, nous notons

$$\mathcal{D}'^{p,q}(X) = \mathcal{D}'_{n-p,n-q}(X), \qquad n = \dim X,$$

l'espace des courants de bidegré (p,q) et bidimension $(n-p, n-q)$ sur X. Suivant [Lel57], un courant Θ de bidimension (p,p) est dit (*faiblement*) *positif* si pour tout choix de $(1,0)$-formes $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ de classe C^∞ sur X la distribution

$$\Theta \wedge i\alpha_1 \wedge \overline{\alpha}_1 \wedge \cdots \wedge i\alpha_p \wedge \overline{\alpha}_p \quad \text{est une mesure positive.} \tag{11.10}$$

11.11. Exercice. Si Θ est positif, montrer que les coefficients $\Theta_{I,J}$ de Θ sont des mesures complexes, et qu'ils sont majorés à des constantes près par la mesure trace

$$\sigma_\Theta = \Theta \wedge \frac{1}{p!}\beta^p = 2^{-p} \sum \Theta_{I,I}, \qquad \text{où} \quad \beta = \frac{i}{2} d'd''|z|^2 = \frac{i}{2} \sum_{1 \leqslant j \leqslant n} dz_j \wedge d\overline{z}_j,$$

qui est une mesure positive.
Indication. Observer que $\sum \Theta_{I,I}$ est invariant par des changements de coordonnées unitaires et que les (p,p)-formes $i\alpha_1 \wedge \overline{\alpha}_1 \wedge \cdots \wedge i\alpha_p \wedge \overline{\alpha}_p$ engendrent $\Lambda^{p,p}T^\star_{\mathbb{C}^n}$ comme $\mathbb{C}$-espace vectoriel. □

On voit facilement qu'un courant $\Theta = i \sum_{1 \leqslant j,k \leqslant n} \Theta_{jk} dz_j \wedge d\overline{z}_k$ de bidegré $(1,1)$ est positif si et seulement si la mesure complexe $\sum \lambda_j \overline{\lambda}_k \Theta_{jk}$ est une mesure positive pour tout n-uplet $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^n$.

11.12. Exemple. Si u est une fonction psh (non identiquement $-\infty$) sur X, on peut associer à u un courant positif fermé $\Theta = i\partial\overline{\partial} u$ de bidegré $(1,1)$. Inversement, tout courant positif fermé de bidegré $(1,1)$ peut s'écrire sous cette forme sur tout sous-ensemble ouvert $\Omega \subset X$ tel que $H^2_{DR}(\Omega, \mathbb{R}) = H^1(\Omega, \mathcal{O}) = 0$, par exemple sur des ouverts de coordonnées biholomorphes à des boules (exercice pour le lecteur). $\square$

Il n'est pas difficile de montrer qu'un produit $\Theta_1 \wedge \cdots \wedge \Theta_q$ de courants positifs de bidegré $(1,1)$ est positif chaque fois que le produit est bien défini (c'est certainement le cas si tous Θ_j sauf un au plus sont de classe C^∞) ; d'autres conditions beaucoup plus fines existent, mais nous laisserons ce sujet de côté ici.

Nous discutons maintenant un autre exemple très important de courant positif fermé. A tout ensemble analytique A fermé dans X, de dimension pure p, on associe un courant d'intégration

$$\langle [A], \alpha \rangle = \int_{A_{\rm reg}} \alpha, \qquad \alpha \in \mathcal{D}^{p,p}(X), \tag{11.13}$$

obtenu en intégrant α sur l'ensemble des points réguliers de A. En vue de montrer que (11.13) donne bien une définition légitime d'un courant sur X, il faut montrer que $A_{\rm reg}$ est localement d'aire finie dans un voisinage de tout point de $A_{\rm sing}$. Ce résultat, dû à [Lel57] peut se montrer comme suit. Supposons (après translation des coordonnées) que $0 \in A_{\rm sing}$. Du théorème de paramétrisation locale pour les ensembles analytiques, on déduit qu'il existe un changement linéaire de coordonnées sur $\mathbb{C}^n$ tel que toutes les projections

$$\pi_I : (z_1, \ldots, z_n) \mapsto (z_{i_1}, \ldots, z_{i_p})$$

définissent des revêtements ramifiés finis de l'intersection $A \cap \Delta_I$ de A avec un petit polydisque $\Delta_I = \Delta'_I \times \Delta''_I$ de $\mathbb{C}^n = \mathbb{C}^p \times \mathbb{C}^{n-p}$, sur le polydisque Δ'_I de $\mathbb{C}^p$. Soit n_I le nombre de feuillets de chacun de ces revêtements. Alors, si $\Delta = \bigcap \Delta_I$, l'aire p-dimensionnelle de $A \cap \Delta$ est majorée par la somme des aires de ses projections comptées avec multiplicités, i.e.

$$\mathrm{Aire}(A \cap \Delta) \leqslant \sum n_I \mathrm{Vol}(\Delta'_I).$$

Le fait que $[A]$ soit positif est facile. En fait, en termes de coordonnées locales $(w_1, \ldots, w_p)$ sur $A_{\rm reg}$, on a

$$i\alpha_1 \wedge \overline{\alpha}_1 \wedge \cdots \wedge i\alpha_p \wedge \overline{\alpha}_p = |\det(\alpha_{jk})|^2 \, iw_1 \wedge \overline{w}_1 \wedge \cdots \wedge iw_p \wedge \overline{w}_p$$

si $\alpha_j = \sum \alpha_{jk} dw_k$. Ceci montre qu'un tel produit de formes est $\geqslant 0$ par rapport à l'orientation canonique définie par $iw_1 \wedge \overline{w}_1 \wedge \cdots \wedge iw_p \wedge \overline{w}_p$. Un résultat plus profond, également démontré par P. Lelong [Lel57], est que $[A]$ est un courant d-fermé sur X, en d'autres termes, l'ensemble $A_{\rm sing}$ (qui est de dimension réelle $\leqslant 2p-2$)

ne fournit aucune contribution au courant bord $d[A]$. Finalement, en liaison avec l'exemple 11.12, nous avons l'importante

11.14. Équation de Lelong-Poincaré. *Soit $f \in H^0(X, \mathcal{O}_X)$ une fonction holomorphe non nulle, $Z_f = \sum m_j Z_j$, $m_j \in \mathbb{N}$, le diviseur des zéros de f, et $[Z_f] = \sum m_j [Z_j]$ le courant d'intégration associé. Alors*

$$\frac{\mathrm{i}}{\pi}\partial\overline{\partial}\log|f| = [Z_f].$$

Preuve (abrégée). Il est clair que $\mathrm{i}\,d'd''\log|f| = 0$ au voisinage de tout point $x \notin \mathrm{Supp}(Z_f) = \bigcup Z_j$, par suite il suffit de vérifier l'équation au voisinage de tout point de $\mathrm{Supp}(Z_f)$. Soit A l'ensemble des points singuliers de $\mathrm{Supp}(Z_f)$, i.e. la réunion des intersections $Z_j \cap Z_k$ et des lieux singuliers $Z_{j,\mathrm{sing}}$; nous avons alors $\dim A \leqslant n-2$. Au voisinage de tout point $x \in \mathrm{Supp}(Z_f) \smallsetminus A$ il existe des coordonnées locales $(z_1, \ldots, z_n)$ telles que $f(z) = z_1^{m_j}$, où m_j est la multiplicité de f le long de la composante Z_j qui contient x, et où $z_1 = 0$ est une équation locale de Z_j près de x. Comme $\frac{\mathrm{i}}{\pi}d'd''\log|z| =$ mesure de Dirac δ_0 dans $\mathbb{C}$, nous trouvons $\frac{\mathrm{i}}{\pi}d'd''\log|z_1| = [\text{hyperplan } z_1 = 0]$, donc

$$\frac{\mathrm{i}}{\pi}d'd''\log|f| = m_j\frac{\mathrm{i}}{\pi}d'd''\log|z_1| = m_j[Z_j]$$

au voisinage de x. Ceci montre que l'équation est bien vérifiée sur $X \smallsetminus A$. Par suite la différence $\frac{\mathrm{i}}{\pi}d'd''\log|f| - [Z_f]$ est un courant fermé de degré 2 à coefficients mesures, dont le support est contenu dans A. Ce courant est nécessairement nul car A est de dimension trop petite pour pouvoir porter son support (A est stratifié en sous-variétés de codimension réelle $\geqslant 4$, alors que le courant lui-même est de codimension réelle 2). □

Pour conclure ce paragraphe, nous abordons maintenant les notions de cohomologie de De Rham et de Dolbeault dans le contexte de la théorie des courants. Une observation de base est que les lemmes de Poincaré et de Dolbeault-Grothendieck sont encore valables pour les courants. De façon précise, si $(\mathcal{D}'^q, d)$ et $(\mathcal{D}'(F)^{p,q}, d'')$ désignent les complexes de faisceaux des courants de degré q (resp. des courants de bidegrés (p,q) à valeurs dans un fibré vectoriel holomorphe F), on a encore des résolutions de De Rham et de Dolbeault faisceautiques

$$0 \to \mathbb{R} \to \mathcal{D}'^{\bullet}, \qquad 0 \to \Omega^p_X \otimes \mathcal{O}(F) \to \mathcal{D}'(F)^{p,\bullet}.$$

De là il résulte des isomorphismes canoniques

$$\begin{aligned} H^q_{\mathrm{DR}}(M,\mathbb{R}) &= H^q\big((\Gamma(M,\mathcal{D}'^{\bullet}), d)\big), \\ H^{p,q}(X,F) &= H^q\big((\Gamma(X,\mathcal{D}'(F)^{p,\bullet}), d'')\big). \end{aligned} \tag{11.15}$$

En d'autres termes, on peut attacher une classe de cohomologie $\{\Theta\} \in H^q_{\mathrm{DR}}(M,\mathbb{R})$ à tout courant fermé Θ de degré q, resp. une classe de cohomologie $\{\Theta\} \in$

$H^{p,q}(X,F)$ à tout courant d''-fermé de bidegré (p,q). En remplaçant si nécessaire les courants mis en jeu par des représentants C^∞ de même classe de cohomologie, on voit qu'il existe un accouplement de cup produit bien défini, donné par le produit extérieur des formes différentielles

$$\begin{aligned} H^{q_1}(M,\mathbb{R})\times\cdots\times H^{q_m}(M,\mathbb{R}) &\longrightarrow H^{q_1+\cdots+q_m}(M,\mathbb{R}),\\ (\{\Theta_1\},\,\ldots\,,\{\Theta_1\}) &\longmapsto \{\Theta_1\}\wedge\cdots\wedge\{\Theta_m\}.\end{aligned}$$

En particulier, si M est une variété compacte orientée et si $q_1+\cdots+q_m=\dim M$, on obtient un nombre d'intersection bien défini

$$\{\Theta_1\}\cdot\{\Theta_2\}\cdot\,\cdots\,\cdot\{\Theta_m\}=\int_M\{\Theta_1\}\wedge\cdots\wedge\{\Theta_m\}.$$

Notons cependant que le produit ponctuel $\Theta_1\wedge\cdots\wedge\Theta_m$ n'existe pas en général.

§11.C. Fibrés vectoriels positifs

Soit (E,h) un fibré vectoriel holomorphe hermitien sur une variété complexe X. Son tenseur de courbure de Chern

$$\Theta(E)=\sum_{1\leqslant j,k\leqslant n,\;1\leqslant\lambda,\mu\leqslant r}c_{jk\lambda\mu}dz_j\wedge d\overline{z}_k\otimes e_\lambda^\star\otimes e_\mu.$$

peut s'identifier à une forme hermitienne sur $T_X\otimes E$, à savoir,

$$\widetilde{\Theta}(E)(\xi\otimes v)=\sum_{1\leqslant j,k\leqslant n,\;1\leqslant\lambda,\mu\leqslant r}c_{jk\lambda\mu}\xi_j\overline{\xi}_kv_\lambda\overline{v}_\mu,\qquad \overline{c}_{jk\lambda\mu}=c_{kj\mu\lambda}.\tag{11.16}$$

Ceci conduit d'une manière naturelle aux concepts de positivité, en suivant des définitions introduites par Kodaira [Kod53], Nakano [Nak55] et Griffiths [Gri66].

11.17. Définition. *Le fibré vectoriel holomorphe hermitien E est dit*

a) *positif au sens de Nakano si* :
$\widetilde{\Theta}(E)(\tau)>0$ *pour tout tenseur non nul* $\tau=\sum\tau_{j\lambda}\partial/\partial z_j\otimes e_\lambda\in T_X\otimes E$.

b) *positif au sens de Griffiths si* :
$\widetilde{\Theta}(E)(\xi\otimes v)>0$ *pour tout tenseur décomposable non nul* $\xi\otimes v\in T_X\otimes E$;

Les concepts de semi-positivité correspondants sont définis en relâchant les inégalités strictes en des inégalités larges.

11.18. Cas particulier des fibrés de rang 1. Supposons que E soit un fibré en droites. La matrice hermitienne $H=(h_{11})$ associée à une trivialisation $\tau: E_{\restriction\Omega}\simeq\Omega\times\mathbb{C}$ est alors simplement une fonction positive, et il sera commode de la noter $\mathrm{e}^{-2\varphi}$, $\varphi\in C^\infty(\Omega,\mathbb{R})$. Dans ce cas, la forme de courbure $\Theta(E)$ peut s'identifier à la $(1,1)$-forme $2d'd''\varphi$, et

$$\frac{\mathrm{i}}{2\pi}\Theta(E)=\frac{\mathrm{i}}{\pi}d'd''\varphi=dd^c\varphi\qquad\text{où}\quad d^c=\frac{\mathrm{i}}{2\pi}(d''-d')$$

est une $(1,1)$-forme réelle. Donc E est semi-positif (au sens de Nakano ou au sens de Griffiths) si et seulement si φ est psh, resp. positif si et seulement si φ est *strictement psh*. Dans ce contexte, l'équation de Lelong-Poincaré peut se généraliser comme suit : soit $\sigma \in H^0(X,E)$ une section holomorphe non nulle. Alors

$$dd^c \log \|\sigma\| = [Z_\sigma] - \frac{\mathrm{i}}{2\pi}\Theta(E). \tag{11.19}$$

La Formule (11.19) est immédiate si on écrit $\|\sigma\| = |\tau(\sigma)|\mathrm{e}^{-\varphi}$ et si on applique l'équation de Lelong-Poincaré à la fonction holomorphe $f = \tau(\sigma)$. Comme nous le verrons plus tard, il est important pour les applications de considérer aussi le cas de métriques hermitiennes singulières (cf. [Dem90b]).

11.20. Définition. *Une métrique (hermitienne) singulière sur un fibré en droites E est une métrique donnée dans toute trivialisation $\tau : E_{\restriction\Omega} \xrightarrow{\simeq} \Omega\times\mathbb{C}$ par*

$$\|\xi\| = |\tau(\xi)|\,\mathrm{e}^{-\varphi(x)}, \qquad x\in\Omega,\ \xi\in E_x$$

où $\varphi \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ est une fonction arbitraire, appelée poids de la métrique par rapport à la trivialisation τ.

Si $\tau' : E_{\restriction\Omega'} \to \Omega'\times\mathbb{C}$ est une autre trivialisation, φ' le poids associé et $g\in\mathcal{O}^\star(\Omega\cap\Omega')$ la fonction de transition, alors $\tau'(\xi) = g(x)\,\tau(\xi)$ pour tout $\xi\in E_x$, donc $\varphi' = \varphi + \log|g|$ sur $\Omega\cap\Omega'$. La forme de courbure de E est alors donnée formellement par le courant de bidegré $(1,1)$ $\frac{\mathrm{i}}{\pi}\Theta(E) = dd^c\varphi$ sur Ω ; l'hypothèse $\varphi\in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ garantit que $\Theta(E)$ existe au sens des distributions. Comme dans le cas C^∞, la forme $\frac{\mathrm{i}}{\pi}\Theta(E)$ est globalement définie sur X et indépendante du choix des trivialisations, et sa classe de cohomologie de De Rham est l'image de la première classe de Chern $c_1(E)\in H^2(X,\mathbb{Z})$ dans $H^2_{DR}(X,\mathbb{R})$. Avant d'aller plus loin, nous discutons deux exemples fondamentaux.

11.21. Exemple. Soit $D = \sum \alpha_j D_j$ un diviseur à coefficients $\alpha_j\in\mathbb{Z}$ et soit $E = \mathcal{O}(D)$ le faisceau inversible associé, défini comme le faisceau des fonctions méromorphes u telles que $\mathrm{div}(u) + D \geqslant 0$; le fibré en droites correspondant peut alors être muni de la métrique singulière définie par $\|u\| = |u|$ (module de la fonction méromorphe u). Si g_j est un générateur de l'idéal de D_j sur un ouvert $\Omega\subset X$, alors $\tau(u) = u\prod g_j^{\alpha_j}$ définit une trivialisation de $\mathcal{O}(D)$ sur Ω, donc notre métrique singulière est associée au poids $\varphi = \sum\alpha_j\log|g_j|$. L'équation de Lelong-Poincaré implique

$$\frac{\mathrm{i}}{\pi}\Theta\big(\mathcal{O}(D)\big) = dd^c\varphi = [D],$$

où $[D] = \sum\alpha_j[D_j]$ désigne le courant d'intégration sur D. □

11.22. Exemple. Supposons que $\sigma_1, \ldots, \sigma_N$ soient des sections holomorphes non nulles de E. On peut alors définir un métrique hermitienne naturelle (éventuellement singulière) sur $E^\star$, en posant

$$\|\xi^\star\|^2 = \sum_{1\leqslant j\leqslant n} \big|\xi^\star.\sigma_j(x)\big|^2 \quad \text{pour } \ \xi^\star \in E^\star_x.$$

La métrique duale de E est donnée par

$$\|\xi\|^2 = \frac{|\tau(\xi)|^2}{|\tau(\sigma_1(x))|^2 + \cdots + |\tau(\sigma_N(x))|^2}$$

par rapport à toute trivialisation locale τ. La fonction poids associée est donc donnée par $\varphi(x) = \log\big(\sum_{1\leqslant j\leqslant N} |\tau(\sigma_j(x))|^2\big)^{1/2}$. Dans ce cas φ est une fonction psh, donc $\mathrm{i}\,\Theta(E)$ est un courant positif fermé. Notons Σ le système linéaire défini par $\sigma_1, \ldots, \sigma_N$ et $B_\Sigma = \bigcap \sigma_j^{-1}(0)$ son ensemble base. On a une application méromorphe

$$\Phi_\Sigma : X \smallsetminus B_\Sigma \to \mathbb{P}^{N-1}, \qquad x \mapsto [\sigma_1(x) : \sigma_2(x) : \cdots : \sigma_N(x)].$$

Avec ces notations, la courbure $\frac{\mathrm{i}}{2\pi}\Theta(E)$ restreinte à $X \smallsetminus B_\Sigma$ s'identifie à l'image-inverse par Φ_Σ de la métrique de Fubini-Study $\omega_{\mathrm{FS}} = \frac{\mathrm{i}}{2\pi} d'd'' \log(|z_1|^2 + \cdots + |z_N|^2)$ sur $\mathbb{P}^{N-1}$. Elle est donc semi-positive. □

11.23. Fibrés en droites amples et très amples. *Un fibré en droites holomorphe E sur une variété complexe compacte X est dit*

a) *très ample si l'application $\Phi_{|E|} : X \to \mathbb{P}^{N-1}$ associée au système linéaire complet $|E| = \mathbb{P}(H^0(X, E))$ est un plongement régulier (ceci sous-entend en particulier que l'ensemble base est vide, i.e. $B_{|E|} = \emptyset$).*

b) *ample s'il existe un multiple mE, $m > 0$, qui soit très ample.*

Nous utilisons ici une notation additive pour $\mathrm{Pic}(X) = H^1(X, \mathcal{O}^\star)$, le symbole mE désigne donc le fibré en droites $E^{\otimes m}$. Grâce à l'exemple 11.22, tout fibré en droites ample E a une métrique hermitienne de classe C^∞ ayant une forme de courbure définie positive ; en effet, si le système linéaire $|mE|$ donne un plongement dans l'espace projectif, alors on obtient une métrique hermitienne de classe C^∞ sur $E^{\otimes m}$, et la racine m-ième donne une métrique sur E telle que $\frac{\mathrm{i}}{2\pi}\Theta(E) = \frac{1}{m}\Phi^\star_{|mE|}\omega_{\mathrm{FS}}$. Inversement, le théorème de plongement de Kodaira [Kod54] nous dit que tout fibré en droites positif E est ample (voir l'exercice 15.11 pour une preuve analytique directe de ce théorème fondamental).

§12. Théorie de Hodge des variétés kählériennes complètes

Le but de cette section est essentiellement d'étendre au cas des variétés kählériennes complètes les résultats de théorie de Hodge déjà démontrés dans le cas compact.

§12.A. Variétés riemanniennes complètes

Avant de traiter de la situation complexe, nous aurons besoin de quelques considérations générales sur la théorie de Hodge des variétés riemanniennes complètes. Rappelons qu'une variété riemannienne (M, g) est dite *complète* si la distance géodésique δ_g est complète, ou, ce qui revient au même (lemme de Hopf-Rinow ci-dessous), si les boules géodésiques fermées sont toutes compactes. Nous aurons besoin plus précisément de la caractérisation suivante.

12.1. Lemme (Hopf-Rinow)**.** *Les propriétés suivantes sont équivalentes*:

a) (M, g) *est complète*;

b) *les boules géodésiques fermées* $\overline{B}_g(a, r)$ *sont compactes*;

c) *il existe une fonction exhaustive* $\psi \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ *telle que* $|d\psi|_g \leqslant 1$;

d) *il existe dans* M *une suite exhaustive* $(K_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ *de compacts et des fonctions* $\theta_\nu \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ *telles que*

$$\begin{aligned}&\theta_\nu = 1 \quad \textit{sur un voisinage de } K_\nu, \qquad \mathrm{Supp}\ \theta_\nu \subset K^\circ_{\nu+1},\\ &0 \leqslant \theta_\nu \leqslant 1 \quad \textit{et} \quad |d\theta_\nu|_g \leqslant 2^{-\nu}.\end{aligned}$$

Preuve. a) $\Longrightarrow$ b). Le point x étant fixé, on note $r_0 = r_0(x)$ le sup des réels $r > 0$ tels que $\overline{B}_g(a, r)$ soit compacte. Supposons $r_0 < +\infty$. Etant donné une suite de points (x_ν) dans $\overline{B}_g(a, r_0)$ et $\varepsilon > 0$, on choisit une suite de points $x_{\nu,\varepsilon} \in \overline{B}(a, r_0-\varepsilon)$ telle que $\delta_g(x_\nu, x_{\nu,\varepsilon}) < 2\varepsilon$. Par compacité de $\overline{B}_g(a, r_0-\varepsilon)$, on peut extraire de $(x_{\nu,\varepsilon}$ une sous-suite convergente pour chaque $\varepsilon > 0$. Grâce à un procédé diagonal, on voit facilement qu'on peut extraire de (x_ν) une sous-suite de Cauchy. Par conséquent cette suite converge et $\overline{B}_g(a, r_0)$ est compacte. La locale compacité de M implique que $\overline{B}_g(a, r_0 + \eta)$ est encore compacte pour $\eta > 0$ assez petit, ce qui est une contradiction si $r_0 < +\infty$.

b) $\Longrightarrow$ c). Supposons M connexe. Choisissons un point $x_0 \in M$ et posons $\psi_0(x) = \frac{1}{2}\delta(x_0, x)$. Alors ψ_0 est exhaustive, et c'est une fonction lipschitzienne de rapport $\frac{1}{2}$, donc ψ_0 est différentiable presque partout sur M. On obtient la fonction ψ cherchée par régularisation.

c) $\Longrightarrow$ d). Soit ψ comme dans a) et soit $\rho \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ une fonction telle que $\rho = 1$ sur $]-\infty, 1.1]$, $\rho = 0$ sur $[1.99, +\infty[$ and $0 \leqslant \rho' \leqslant 2$ sur $[1, 2]$. Alors

$$K_\nu = \{x \in M\ ;\ \psi(x) \leqslant 2^{\nu+1}\}, \qquad \theta_\nu(x) = \rho\big(2^{-\nu-1}\psi(x)\big)$$

vérifient les propriétés annoncées.

d) $\Longrightarrow$ c). Poser $\psi = \sum 2^{\nu-1}(1 - \theta_\nu)$.

c) $\Longrightarrow$ b). L'inégalité $|d\psi|_g \leqslant 1$ implique $|\psi(x) - \psi(y)| \leqslant \delta_g(x, y)$ pour tous $x, y \in M$, donc la boule géodésique $\overline{B}_g(a, r) \subset \{x \in M\,;\, \delta_g(x, a) \leqslant \psi(a) + r\}$ est relativement compacte.

b) $\Longrightarrow$ a). C'est évident ! □

Soit (M,g) une variété riemannienne, non nécessairement complète pour l'instant, et E un fibré vectoriel hermitien sur M muni d'une connexion hermitienne D. On considére l'opérateur non borné entre espaces de Hilbert encore noté D

$$D : L^2(M, \Lambda^p T^\star_M \otimes E) \longrightarrow L^2(M, \Lambda^{p+1} T^\star_M \otimes E),$$

dont le domaine $\mathrm{Dom}\, D$ est défini comme suit : une section $u \in L^2$ est dite être dans $\mathrm{Dom}\, D$ si Du calculé au sens des distributions est encore dans L^2. Le domaine ainsi défini est toujours dense dans L^2, car $\mathrm{Dom}\, D$ contient l'espace $\mathcal{D}(M, \Lambda^p T^\star_M E)$ des sections C^∞ à support compact, qui est lui-même dense dans L^2. De plus, l'opérateur D ainsi défini, bien que non borné, est *fermé*, c'est-à-dire que que son graphe est fermé ; cela résulte aussitôt du fait que les opérateurs différentiels sont continus pour la topologie faible des distributions. L'adjoint formel $D^\star$ admet de même une extension en un opérateur fermé

$$D^\star : L^2(M, \Lambda^{p+1} T^\star_M \otimes E) \longrightarrow L^2(M, \Lambda^p T^\star_M \otimes E).$$

Des résultats élémentaires bien connus de théorie spectrale dûs à Von Neumann garantissent par ailleurs l'existence d'un opérateur $D^\star_{\mathcal{H}}$ fermé à domaine dense, appelé adjoint hilbertien de D, défini comme suit : un élément $v \in L^2(M, \Lambda^{p+1} T^\star_M \otimes E)$ est dans $\mathrm{Dom}\, D^\star_{\mathcal{H}}$ si la forme linéaire $L^2 \to \mathbb{C}$, $u \mapsto \langle\!\langle Du, v\rangle\!\rangle$ est continue ; elle s'écrit alors $u \mapsto \langle\!\langle u, w\rangle\!\rangle$ pour un unique élément $w \in L^2(M, \Lambda^p T^\star_M \otimes E)$. On pose $D^\star_{\mathcal{H}} v = w$, de sorte que $D^\star_{\mathcal{H}}$ est défini par la relation habituelle d'adjonction

$$\langle\!\langle Du, v\rangle\!\rangle = \langle\!\langle u, D^\star_{\mathcal{H}} v\rangle\!\rangle \qquad \forall u \in \mathrm{Dom}\, D.$$

(Noter que l'adjoint formel $D^\star$, lui, est défini en exigeant seulement la validité de cette relation pour $u \in \mathcal{D}(M, \Lambda^p T^\star_M \otimes E)$). Il est clair qu'on a toujours $\mathrm{Dom}\, D^\star_{\mathcal{H}} \subset \mathrm{Dom}\, D^\star$ et que $D^\star_{\mathcal{H}} = D^\star$ sur $\mathrm{Dom}\, D^\star_{\mathcal{H}}$; en général, néanmoins, les domaines sont distincts (c'est le cas par exemple si $M =]0,1[$, $g = dx^2$, $D = d/dx$!). Une observation fondamentale est que ce phénomène ne peut se produire si la métrique riemannienne g est *complète*.

12.2. Proposition. *Si la variété (M,g) est complète, alors :*

a) *L'espace $\mathcal{D}(M, \Lambda^\bullet T^\star_M E)$ est dense dans $\mathrm{Dom}\, D$, $\mathrm{Dom}\, D^\star$ et $\mathrm{Dom}\, D \cap \mathrm{Dom}\, D^\star$ respectivement, pour les normes des graphes*

$$u \mapsto \|u\| + \|Du\|, \quad u \mapsto \|u\| + \|D^\star u\|, \quad u \mapsto \|u\| + \|Du\| + \|D^\star u\|.$$

b) $D^\star_{\mathcal{H}} = D^\star$ *(i.e. les deux domaines coïncident), et* $D^{\star\star}_{\mathcal{H}} = D^{\star\star} = D$.

c) *Soit $\Delta = DD^\star + D^\star D$ le laplacien calculé au sens des distributions. Pour tout $u \in \mathrm{Dom}\, \Delta \subset L^2(M, \Lambda^\bullet T^\star_M E)$, on a $\langle u, \Delta u\rangle = \|Du\|^2 + \|D^\star u\|^2$. En particulier*

$$\mathrm{Dom}\, \Delta \subset \mathrm{Dom}\, D \cap \mathrm{Dom}\, D^\star, \qquad \mathrm{Ker}\, \Delta = \mathrm{Ker}\, D \cap \mathrm{Ker}\, D^\star,$$

et Δ est auto-adjoint.

d) *Si $D^2 = 0$, il y a une décomposition orthogonale*

$$L^2(M, \Lambda^\bullet T^\star_M E) = \mathcal{H}^\bullet_{L^2}(M,E) \oplus \overline{\operatorname{Im} D} \oplus \overline{\operatorname{Im} D^\star},$$
$$\operatorname{Ker} D = \mathcal{H}^\bullet_{L^2}(M,E) \oplus \overline{\operatorname{Im} D},$$

où $\mathcal{H}^\bullet_{L^2}(M,E) = \big\{u \in L^2(M, \Lambda^\bullet T^\star_M \otimes E)\,;\ \Delta u = 0\big\}$ est l'espace des formes harmoniques L^2 sur M.

Preuve. a) Il faut montrer par exemple que tout élément $u \in \operatorname{Dom} D$ peut être approximé pour la norme du graphe de D par des formes C^∞ à support compact. Par hypothèse, u et Du sont dans L^2. Soit (θ_ν) une suite de fonctions tronquantes comme dans le lemme 12.1 d). Alors $\theta_\nu u \to u$ dans $L^2(M, \Lambda^\bullet T^\star_M \otimes E)$ et $D(\theta_\nu u) = \theta_\nu Du + d\theta_\nu \wedge u$ où

$$|d\theta_\nu \wedge u| \leqslant |d\theta_\nu|\ |u| \leqslant 2^{-\nu}|u|.$$

Par suite $d\theta_\nu \wedge u \to 0$ et $D(\theta_\nu u) \to Du$. Après avoir remplacé u par $\theta_\nu u$, on peut supposer que u est à support compact, et à l'aide d'une partition de l'unité, on se ramène au cas où $\operatorname{Supp} u$ est contenu dans une carte de coordonnées de M sur laquelle E est trivial. Soit (ρ_ε) une famille de noyaux régularisants. Un lemme classique en théorie des EDP (lemme de Friedrichs), montre que pour tout opérateur différentiel P d'ordre 1 à coefficients de classe C^1 on a $\|P(\rho_\varepsilon \star u) - \rho_\varepsilon Pu\|_{L^2} \to 0$ lorsque ε tend vers 0 (u étant une section L^2 à support compact dans la carte considérée). En appliquant ce lemme à $P = D$, $P = D^\star$ respectivement, on déduit les propriétés de densité voulues.

b) est équivalent au fait que

$$\langle\!\langle Du, v\rangle\!\rangle = \langle\!\langle u, D^\star v\rangle\!\rangle, \qquad \forall u \in \operatorname{Dom} D, \quad \forall v \in \operatorname{Dom} D^\star.$$

Or, d'après a), on peut trouver $u_\nu,\ v_\nu \in \mathcal{D}(M, \Lambda^\bullet T^\star_M \otimes E)$ tels que

$$u_\nu \to u, \quad v_\nu \to v, \quad Du_\nu \to Du \quad \text{et} \quad D^\star v_\nu \to D^\star v \quad \text{dans} \quad L^2(M, \Lambda^\bullet T^\star_M \otimes E).$$

L'égalité cherchée est alors la limite des égalités $\langle\!\langle Du_\nu, v_\nu\rangle\!\rangle = \langle\!\langle u_\nu, D^\star v_\nu\rangle\!\rangle$.

c) Soit $u \in \operatorname{Dom}\Delta$. Comme $\Delta u \in L^2$ et que Δ est un opérateur elliptique d'ordre 2, on obtient $u \in W^2_{\mathrm{loc}}$ grâce à la version locale de l'inégalité de Gårding. En particulier $Du,\ D^\star u \in W^1_{\mathrm{loc}} \subset L^2_{\mathrm{loc}}$ et nous pouvons effectuer toutes les intégrations par parties que nous voulons après avoir multiplié les formes mises en jeu par des fonctions C^∞ à support compact θ_ν. Des calculs simples donnent alors

$$\begin{aligned}
&\|\theta_\nu Du\|^2 + \|\theta_\nu D^\star u\|^2 = \\
&= \langle\!\langle \theta_\nu^2 Du, Du\rangle\!\rangle + \langle\!\langle u, D(\theta_\nu^2 D^\star u)\rangle\!\rangle \\
&= \langle\!\langle D(\theta_\nu^2 u), Du\rangle\!\rangle + \langle\!\langle u, \theta_\nu^2 DD^\star u\rangle\!\rangle - 2\langle\!\langle \theta_\nu d\theta_\nu \wedge u, Du\rangle\!\rangle + 2\langle\!\langle u, \theta_\nu d\theta_\nu \wedge D^\star u\rangle\!\rangle \\
&= \langle\!\langle \theta_\nu^2 u, \Delta u\rangle\!\rangle - 2\langle\!\langle d\theta_\nu \wedge u, \theta_\nu Du\rangle\!\rangle + 2\langle\!\langle u, d\theta_\nu \wedge (\theta_\nu D^\star u)\rangle\!\rangle \\
&\leqslant \langle\!\langle \theta_\nu^2 u, \Delta u\rangle\!\rangle + 2^{-\nu}\big(2\|\theta_\nu Du\|\ \|u\| + 2\|\theta_\nu D^\star u\|\ \|u\|\big) \\
&\leqslant \langle\!\langle \theta_\nu^2 u, \Delta u\rangle\!\rangle + 2^{-\nu}\big(\|\theta_\nu Du\|^2 + \|\theta_\nu D^\star u\|^2 + 2\|u\|^2\big).
\end{aligned}$$

Par conséquent

$$\|\theta_\nu Du\|^2 + \|\theta_\nu D^\star u\|^2 \leqslant \frac{1}{1-2^{-\nu}}\big(\langle\!\langle \theta_\nu^2 u, \Delta u\rangle\!\rangle + 2^{1-\nu}\|u\|^2\big).$$

En faisant tendre ν vers $+\infty$, on obtient $\|Du\|^2+\|D^\star u\|^2 \leqslant \langle\!\langle u, \Delta u\rangle\!\rangle$, en particulier Du, $D^\star u$ sont dans L^2. Ceci implique

$$\langle\!\langle u, \Delta v\rangle\!\rangle = \langle\!\langle Du, Dv\rangle\!\rangle + \langle\!\langle D^\star u, D^\star v\rangle\!\rangle, \qquad \forall u, v \in \operatorname{Dom}\Delta,$$

parce que l'égalité a lieu pour $\theta_\nu u$ et v, et parce que nous avons $\theta_\nu u \to u$, $D(\theta_\nu u) \to Du$ et $D^\star(\theta_\nu u) \to D^\star u$ dans L^2. Il en résulte que Δ est auto-adjoint.

d) Si P est un opérateur fermé à domaine dense sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}$, alors $\operatorname{Ker} P$ et fermé et $\operatorname{Ker} P^\star = (\operatorname{Im} P)^\perp$. Par suite $(\operatorname{Ker} P^\star)^\perp = (\operatorname{Im} P)^{\perp\perp} = \overline{\operatorname{Im} P}$. Comme $\operatorname{Ker} P^\star$ est lui aussi fermé il vient

$$\mathcal{H} = \operatorname{Ker} P^\star \oplus (\operatorname{Ker} P^\star)^\perp = \operatorname{Ker} P^\star \oplus \overline{\operatorname{Im} P}.$$

Ce résultat appliqué à $P = \Delta$ donne

$$\mathcal{H}^\bullet_{L^2}(M, E) = \operatorname{Ker}\Delta \oplus \overline{\operatorname{Im}\Delta},$$

et il est clair d'après (12.2 c) que $\operatorname{Im}\Delta \subset \operatorname{Im} D \oplus \operatorname{Im} D^\star$. Mais par ailleurs, on voit facilement que $\operatorname{Ker}\Delta$, $\overline{\operatorname{Im} D}$ et $\overline{\operatorname{Im} D^\star}$ sont deux à deux orthogonaux en utilisant (12.2 a,c). La propriété d) s'ensuit comme dans le cas où M est compacte. $\square$

12.3. Définition. *Etant donné une variété riemannienne (M, g) et un fibré hermitien E muni d'une connexion hermitienne plate D, on note $H^p_{\mathrm{DR},\,L^2}(M, E)$ les groupes de cohomologie de De Rham L^2, à savoir les groupes de cohomologie du complexe $(K^\bullet, D)$ défini par*

$$K^p = \big\{u \in L^2(M, \Lambda^p T^\star_M \otimes E)\,;\, Du \in L^2\big\}.$$

En d'autres termes, on a $H^p_{\mathrm{DR},\,L^2}(M, E) = \operatorname{Ker} D/\operatorname{Im} D$ où D est l'extension L^2 de la connexion, calculée au sens des distributions. Comme $\mathcal{H}^p_{L^2}(M, E) = \operatorname{Ker} D/\overline{\operatorname{Im} D}$ d'après (12.2 d), il s'ensuit :

12.4. Proposition. *On a un isomorphisme canonique*

$$\mathcal{H}^p_{L^2}(M, E) \simeq H^p_{\mathrm{DR},\,L^2}(M, E)_{\mathrm{sep}}$$

entre $\mathcal{H}^p_{L^2}(M, E)$ et l'espace séparé associé à la cohomologie de De Rham L^2.

En général l'espace $H^p_{\mathrm{DR},\,L^2}(M, E)$ n'est pas toujours séparé, mais il l'est dans le cas important où la cohomologie L^2 est de dimension finie :

12.5. Corollaire. *Si (M,g) est complète et si $H^p_{\mathrm{DR},\,L^2}(M,E)$ est de dimension finie, alors cet espace est séparé et on a un isomorphisme canonique*

$$\mathcal{H}^p_{L^2}(M,E) \simeq H^p_{\mathrm{DR},\,L^2}(M,E).$$

Preuve. L'espace K^p peut être considéré comme un espace de Hilbert pour la norme $u \mapsto (\|u\|_{L^2} + \|Du\|_{L^2})^{1/2}$. Il s'agit de voir que $\operatorname{Im} D = D(K^{p-1})$ est fermé dans $\operatorname{Ker} D$, $\operatorname{Ker} D$ étant lui-même fermé dans K^p. Or $D : K^{p-1} \to \operatorname{Ker} D$ est continu et son image est de codimension finie par hypothèse. Le fait que l'image soit fermée est alors une conséquence directe du théorème de Banach. □

12.6. Remarque. Pour la cohomologie de De Rham L^2, on peut observer qu'on obtient des groupes de cohomologie identiques en travaillant avec le sous-complexe des formes C^∞ globalement L^2, c'est-à-dire

$$\widetilde{K}^p = \big\{u \in C^\infty(M, \Lambda^p T^\star_M \otimes E)\,;\, u \in L^2 \text{ et } Du \in L^2\big\} \subset K^p.$$

Pour cela, il suffit de construire un opérateur $\widetilde{K}^\bullet \to K^\bullet$ qui soit un inverse homotopique de l'inclusion ; ceci peut se faire en utilisant une régularisation par des flots de champs de vecteurs tendant vers 0 suffisamment vite à l'infini. □

§12.B. Cas des variétés hermitiennes et kählériennes complètes

Les résultats précédents admettent bien entendu des analogues complexes, avec des démonstrations quasiment identiques (les détails seront donc laissés au lecteur). On dira qu'une variété hermitienne ou kählérienne (X,ω) est *complète* si la variété riemannienne sous-jacente est complète.

12.7. Proposition. *Soit (X,ω) une variété hermitienne complète et E un fibré holomorphe hermitien sur X. Il y a un isomorphisme canonique*

$$\mathcal{H}^{p,q}_{L^2}(M,E) \simeq H^{p,q}_{L^2}(M,E)_{\mathrm{sep}}$$

entre l'espace des formes harmoniques L^2 et le groupe de cohomologie de Dolbeault L^2 séparé, ce dernier espace étant lui-même égal à $H^{p,q}_{L^2}(M,E)$ si la cohomologie de Dolbeault est de dimension finie.

12.8. Corollaire. *Soit (X,ω) une variété kählérienne et E un fibré hermitien plat sur X.*

a) *Sans autre hypothèse, on a pour tout k une décomposition orthogonale*

$$\mathcal{H}^k_{L^2}(M,E) = \bigoplus_{p+q=k} \mathcal{H}^{p,q}_{L^2}(M,E), \qquad \overline{\mathcal{H}^{p,q}_{L^2}(M,E)} = \mathcal{H}^{q,p}_{L^2}(M,E^\star).$$

b) *Si de plus (X,ω) est complète, il y a des isomorphismes canoniques*

$$H^k_{L^2}(M,E)_{\mathrm{sep}} \simeq \bigoplus_{p+q=k} H^{p,q}_{L^2}(M,E)_{\mathrm{sep}}, \qquad \overline{H^{p,q}_{L^2}(M,E)_{\mathrm{sep}}} \simeq H^{q,p}_{L^2}(M,E^\star)_{\mathrm{sep}}.$$

c) *Si (X,ω) est complète, et si les groupes de cohomologie de De Rham et de Dolbeault L^2 sont de dimension finie, on a des isomorphismes canoniques*

$$H^k_{L^2}(M,E) \simeq \bigoplus_{p+q=k} H^{p,q}_{L^2}(M,E), \qquad \overline{H^{p,q}_{L^2}(M,E)} \simeq H^{q,p}_{L^2}(M,E^\star).$$

§12.C. Théorie de Hodge des variétés kählériennes faiblement pseudoconvexes

Les variétés kählériennes *faiblement pseudoconvexes* fournissent un exemple important de variétés kählériennes complètes.

12.9. Définition. *Une variété complexe X est dite faiblement pseudoconvexe s'il existe une fonction d'exhaustion psh ψ de classe C^∞ sur X (rappelons qu'une fonction ψ est dite exhaustive si pour tout $c > 0$ l'ensemble de sous-niveau $X_c = \psi^{-1}(c)$ est relativement compact, i.e. $\psi(z)$ tend vers $+\infty$ quand z tend vers l'infini suivant le filtre des complémentaires de parties compactes de X).*

En particulier, les variétés complexes compactes X sont faiblement pseudoconvexes (prendre $\psi = 0$), de même que les variétés de Stein, par exemple les sous-variétés algébriques affines de $\mathbb{C}^N$ (prendre $\psi(z) = |z|^2$), les boules ouvertes $X = B(z_0,r)$ $\big($prendre $\psi(z) = 1/(r - |z-z_0|^2)\big)$, les ouverts convexes, etc. Une observation de base est la suivante :

12.10. Proposition. *Toute variété kählérienne (X,ω) faiblement pseudoconvexe possède une métrique kählérienne complète $\widehat{\omega}$.*

Preuve. Pour toute fonction convexe croissante $\chi \in C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$, nous considérons $(1,1)$-forme fermée

$$\omega_\chi = \omega + \mathrm{i}\, d'd''(\chi\circ\psi) = \omega + \chi'(\psi)\,\mathrm{i}\, d'd''\psi + \chi''(\psi)\,\mathrm{i}\, d'\psi\wedge d''\psi.$$

Comme les trois termes sont positifs ou nuls, c'est une métrique kählérienne. La présence du troisième terme implique que la norme de $\chi''(\psi)^{1/2}d\psi$ par rapport à ω_χ est inférieure ou égale à 1, donc si ρ est une primitive de $(\chi'')^{1/2}$ nous avons $|d(\rho\circ\psi)|_{\omega_\chi} \leqslant 1$. D'après (12.1 c), ω_χ sera complète dès que $\rho\circ\psi$ est exhaustive, c'est-à-dire dès que $\lim_{+\infty}\rho(t) = +\infty$. On obtient donc la condition suffisante

$$\int_{t_0}^{+\infty} \chi''(t)^{1/2}dt = +\infty,$$

qui est réalisée par exemple pour le choix $\chi(t) = t^2$ ou $\chi(t) = t - \log t$, $t \geqslant 1$. $\square$

Nous allons maintenant établir un théorème de décomposition de Hodge pour des variétés kählériennes faiblement pseudoconvexes ayant "suffisamment de directions strictement pseudoconvexes". Suivant Andreotti-Grauert [AG62], nous introduisons la :

12.11. Définition. *Une variété complexe X sera dite ℓ-convexe (resp. absolument ℓ-convexe) si X possède une fonction d'exhaustion (resp. une fonction d'exhaustion psh) ψ qui est fortement ℓ-convexe sur le complémentaire $X \smallsetminus K$ d'une partie compacte, i.e. telle que $\mathrm{i}\, d'd''\psi$ a au moins $n-\ell+1$ valeurs propres positives en tout point de $X \smallsetminus K$, où $n = \dim_{\mathbb{C}} X$.*

12.12. Exemple. Soit $\overline{X}$ une variété projective lisse telle qu'il existe un morphisme surjectif $F : \overline{X} \to \overline{Y}$ sur une autre variété projective lisse $\overline{Y}$. Soit D un diviseur de $\overline{Y}$ et soient $X = \overline{X} \smallsetminus F^{-1}(D)$, $Y = \overline{Y} \smallsetminus D$. On suppose que F induit une submersion $\overline{X} \smallsetminus F^{-1}(D) \to \overline{Y} \smallsetminus D$ et que $\mathcal{O}(D)_{\restriction D}$ est ample. Alors X est absolument ℓ-convexe pour $\ell = \dim X - \dim Y + 1$. En effet, l'hypothèse d'amplitude de $\mathcal{O}(D)_{\restriction D}$ entraîne qu'il existe une métrique hermitienne sur $\mathcal{O}(D)$ dont la courbure est définie positive au voisinage de D, c'est-à-dire sur un ouvert de la forme $\overline{Y} \smallsetminus K'$ où K' est une partie compacte de $\overline{Y} \smallsetminus D$. Soit $\sigma \in H^0(\overline{Y}, \mathcal{O}(D))$ la section canonique de diviseur D. Alors $-\log|\sigma|^2$ est fortement psh sur $Y \smallsetminus K'$, par suite $\psi = -\log|\sigma \circ F|^2$ est psh et fortement ℓ-convexe sur $X \smallsetminus K$, où $K = F^{-1}(K')$. Par ailleurs, ψ définit clairement une exhaustion de X. On ne sait rien de ψ sur K, mais il suffit de tronquer ψ en prenant un maximum régularisé $\psi_C = \max_\varepsilon(\psi, C)$ avec une constante $C > \sup_K \psi$ pour obtenir une fonction ψ_C partout psh sur X. $\square$

Nous pouvons maintenant énoncer le théorème de décomposition de Hodge pour les variétés absolument ℓ-convexes. Ce résultat est dû à T. Ohsawa [Ohs81, 87] ; nous en présentons ici une démonstration simplifiée décrite dans [Dem90a]. Une approche purement algébrique de ces résultats a été proposée par Bauer-Kosarew [BaKo89, 91] et [Kos91].

12.13. Théorème (Ohsawa [Ohs81, 87], [OT88]). *Soit (X, ω) une variété kählérienne et $n = \dim_{\mathbb{C}} X$. On suppose que X est absolument ℓ-convexe. Alors, en des degrés convenables, il y a décomposition et symétrie de Hodge:*

$$H^k_{\mathrm{DR}}(X, \mathbb{C}) \simeq \bigoplus_{p+q=k} H^{p,q}(X, \mathbb{C}), \qquad \overline{H^{p,q}(X, \mathbb{C})} \simeq H^{q,p}(X, \mathbb{C}), \qquad k \geqslant n + \ell,$$

$$H^k_{\mathrm{DR},\,c}(X, \mathbb{C}) \simeq \bigoplus_{p+q=k} H^{p,q}_c(X, \mathbb{C}), \qquad \overline{H^{p,q}_c(X, \mathbb{C})} \simeq H^{q,p}_c(X, \mathbb{C}), \qquad k \leqslant n - \ell,$$

tous ces groupes étant de dimension finie. ($H^k_{\mathrm{DR},\,c}(X, \mathbb{C})$ et $H^{p,q}_c(X, \mathbb{C})$ désignent ici les groupes de cohomologie à support compact). De plus, on a un isomorphisme de Lefschetz

$$\omega^{n-p-q} \wedge \bullet \quad : \quad H^{p,q}_c(X, \mathbb{C}) \longrightarrow H^{n-q,n-p}(X, \mathbb{C}), \qquad p + q \leqslant n - \ell.$$

Preuve. La finitude des groupes de cohomologie de De Rham mis en jeu s'obtient facilement au moyen de la théorie de Morse. Rappelons brièvement l'argument : une petite perturbation convenable d'une exhaustion fortement ℓ-convexe donne une fonction de Morse ψ qui est encore fortement ℓ-convexe sur le complémentaire $X \smallsetminus K$ d'un compact ; le Hessien réel $D^2\psi$ de ψ en un point critique induit une forme hermitienne sur l'espace tangent complexifié $\mathbb{C} \otimes T_X$, et sa restriction à $T_X^{1,0}$ s'identifie au Hessien complexe $\mathrm{i}\, d'd''\psi$; comme le Hessien complexe a par hypothèse au moins $n-\ell+1$ valeurs propres positives sur $X \smallsetminus K$, il en résulte que $D^2\psi$ a au plus $2n-(n-\ell+1) = n+\ell-1$ valeurs propres négatives sur $X \smallsetminus K$, sans quoi les espaces propres positifs et négatifs de $D^2\psi$ auraient une intersection non triviale. Par suite tous les points critiques d'indice $\geqslant n+\ell$ sont situés dans K et leur nombre est fini. Ceci entraîne que les groupes $H^k_{\mathrm{DR}}(X, \mathbb{C})$ de degré $k \geqslant n+\ell$ sont de dimension finie. La finitude des groupes de cohomologie de Dolbeault $H^{p,q}(X, \mathbb{C}) = H^q(X, \Omega^p_X)$ résulte quant à elle du théorème d'Andreotti-Grauert [AG62] (*tous les groupes de cohomologie de degré supérieur à ℓ à valeurs dans un faisceau cohérent quelconque sont séparés et de dimension finie si la variété est ℓ-convexe*). On notera toutefois que la ℓ-convexité, bien que suffisante pour assurer la finitude des différents groupes mis en jeu, ne suffit pas à garantir l'existence d'une décomposition de Hodge, ni même la symétrie de Hodge ; le lecteur trouvera un contre-exemple simple dans Grauert-Riemenschneider [GR70].

Soit maintenant ω une métrique kählérienne sur X et ψ une fonction d'exhaustion psh fortement ℓ-convexe sur $X \smallsetminus K$. Comme on va le voir, l'existence d'une décomposition de Hodge résulte directement du fait qu'on a une telle décomposition pour les formes harmoniques L^2. Le point-clé réside dans l'observation que toute forme L^2_{loc} de degré $k \geqslant n+\ell$ devient globalement L^2 pour un choix convenable de métrique $\omega_\chi = \omega + \mathrm{i}\, d'd''(\chi \circ \psi)$; les groupes $H^k_{\mathrm{DR}}(X, \mathbb{C})$ et $H^{p,q}(X, \mathbb{C})$ pourront alors être considérés comme des limites inductives de groupes de cohomologie L^2. Dans la suite, on désignera par des notations telles que $L^2_{\omega_\chi}(X, \Lambda^{p,q}T^\star_X)$, $\mathcal{H}^{p,q}_{L^2,\omega_\chi}(X, \mathbb{C})$ les espaces de formes (resp. de formes harmoniques) L^2 relativement à ω_χ. Puisque ω_χ est kählérienne, on a

$$(12.14)\quad \mathcal{H}^k_{L^2,\omega_\chi}(M, \mathbb{C}) = \bigoplus_{p+q=k} \mathcal{H}^{p,q}_{L^2,\omega_\chi}(M, \mathbb{C}), \quad \overline{\mathcal{H}^{p,q}_{L^2,\omega_\chi}(M, \mathbb{C})} = \mathcal{H}^{q,p}_{L^2,\omega_\chi}(M, \mathbb{C}),$$

avec un isomorphisme $\mathcal{H}^k_{L^2,\omega_\chi}(M, \mathbb{C}) \simeq H^k_{L^2,\omega_\chi}(M, \mathbb{C})_{\mathrm{sep}}$ dès lors que ω_χ est complète. Dans la suite, on supposera toujours que ω_χ est complète, il suffit d'imposer par exemple $\chi''(t) \geqslant 1$ sur $[0, +\infty[$.

12.15. Lemme. *Soit u une forme de bidegré (p, q) à coefficients L^2_{loc} sur X. Si $p+q \geqslant n+\ell$, alors $u \in L^2_{\omega_\chi}(X, \Lambda^{p,q}T^\star_X)$ dès que χ croît suffisamment vite à infini.*

Preuve. En un point $x \in X$ fixé, il existe une base orthogonale $(\partial/\partial z_1, \ldots, \partial/\partial z_n)$ de $T_{X,x}$ dans laquelle

$$\omega(x) = i \sum_{1 \leqslant j \leqslant n} dz_j \wedge d\overline{z}_j, \qquad \omega_\chi(x) = i \sum_{1 \leqslant j \leqslant n} \lambda_j(x)\, dz_j \wedge d\overline{z}_j,$$

où $\lambda_1 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n$ sont les valeurs propres de ω_χ par rapport à ω. Alors les éléments de volume $dV_\omega = \omega^n/2^n n!$ et $dV_{\omega_\chi} = \omega_\chi^n/2^n n!$ sont liés par la relation

$$dV_{\omega_\chi} = \lambda_1 \cdots \lambda_n\, dV_\omega$$

et pour une (p,q)-forme $u=\sum_{I,J}u_{I,J}dz_I\wedge d\overline{z}_J$ on trouve

$$|u|^2_{\omega_\chi}=\sum_{|I|=p,|J|=q}\Big(\prod_{k\in I}\lambda_k\prod_{k\in J}\lambda_k\Big)^{-1}|u_{I,J}|^2.$$

Il en résulte en particulier

$$|u|^2_{\omega_\chi}dV_{\omega_\chi}\leqslant\frac{\lambda_1\cdots\lambda_n}{\lambda_1\cdots\lambda_p\,\lambda_1\cdots\lambda_q}\,|u|^2_\omega dV_\omega=\frac{\lambda_{p+1}\cdots\lambda_n}{\lambda_1\cdots\lambda_q}\,|u|^2_\omega dV_\omega.$$

D'autre part, on a des majorations

$$\lambda_j\leqslant 1+C_1\chi'(\psi),\quad 1\leqslant j\leqslant n-1,\qquad \lambda_n\leqslant 1+C_1\chi'(\psi)+C_2\chi''(\psi)$$

où $C_1(x)$ est la plus grande valeur propre de $\mathrm{i}\,d'd''\psi(x)$ et $C_2(x)=|\partial\psi(x)|^2$; pour obtenir les $n-1$ premières inégalités, on a seulement besoin d'appliquer le principe du minimax sur le noyau de $\partial\psi$. Comme $\mathrm{i}\,d'd''\psi$ a au plus $\ell-1$ valeurs propres nulles sur $X\smallsetminus K$, le principe du minimax donne aussi des minorations

$$\lambda_j\geqslant 1,\quad 1\leqslant j\leqslant \ell-1,\qquad \lambda_j\geqslant 1+c\,\chi'(\psi),\quad \ell\leqslant j\leqslant n,$$

où $c(x)\geqslant 0$ est la ℓ-ième valeur propre de $\mathrm{i}\,d'd''\psi(x)$ et $c(x)>0$ sur $X\smallsetminus K$. Si nous supposons $\chi'\geqslant 1$, nous en déduisons aisément

$$\begin{aligned}\frac{|u|^2_{\omega_\chi}dV_{\omega_\chi}}{|u|^2_\omega dV_\omega}&\leqslant\frac{\big(1+C_1\chi'(\psi)\big)^{n-p-1}\big(1+C_1\chi'(\psi)+C_2\chi''(\psi)\big)}{\big(1+c\chi'(\psi)\big)^{q-\ell+1}}\\&\leqslant C_3\big(\chi'(\psi)^{n+\ell-p-q-1}+\chi''(\psi)\chi'(\psi)^{n+\ell-p-q-2}\big)\quad\text{sur}\quad X\smallsetminus K.\end{aligned}$$

Pour $p+q\geqslant n+\ell$, ceci est inférieur ou égal à

$$C_3\big(\chi'(\psi)^{-1}+\chi''(\psi)\chi'(\psi)^{-2}\big),$$

et il est facile de montrer que cette quantité peut être rendue arbitrairement petite à l'infini sur X quand χ croît suffisamment vite à infini sur $\mathbb{R}$. □

Preuve du théorème (12.13), *fin.* Un résultat bien connu de Andreotti-Grauert [AG62] garantit que la topologie naturelle des groupes de cohomologie $H^q(X,\mathcal{F})$ d'un faisceau cohérent quelconque $\mathcal{F}$ sur une variété ℓ-convexe sont séparés pour $q\geqslant\ell$. Si $\mathcal{F}=\mathcal{O}(E)$ est le faisceau des sections d'un fibré vectoriel holomorphe, les groupes $H^q(X,\mathcal{O}(E))$ sont algébriquement et topologiquement isomorphes aux groupes de cohomologie du complexe de Dolbeault des formes de type $(0,q)$ à coefficients L^2_{loc} dont la d''-differentielle est à coefficients L^2_{loc}, muni de la topologie de Fréchet définie par les semi-normes $u\mapsto\|u\|_{L^2(K)}+\|d''u\|_{L^2(K)}$. Pour le voir, on peut reprendre mot à mot la démonstration du théorème (1.3), en observant que le complexe L^2_{loc} fournit encore une résolution de $\mathcal{O}(E)$ par des faisceaux (acycliques) de $\mathcal{C}^\infty$-modules. Il résulte de ce qui précède que le morphisme

$$L^2_{\omega_\chi}(X, \Lambda^{p,q}T^\star_X) \supset \mathrm{Ker}\, D''_{\omega_\chi} \longrightarrow H^{p,q}(X,\mathbb{C}) = H^q(X, \Omega^p_X)$$

est continu et de noyau fermé. Par conséquent ce noyau contient l'adhérence $\overline{\mathrm{Im}\, D''_{\omega_\chi}}$, et nous obtenons une factorisation

$$\mathcal{H}^{p,q}_{\omega_\chi}(X,\mathbb{C}) \simeq \mathrm{Ker}\, D''_{\omega_\chi} / \overline{\mathrm{Im}\, D''_{\omega_\chi}} \longrightarrow H^{p,q}(X,\mathbb{C}).$$

La démonstration de la proposition (12.2) montre d'ailleurs que $\overline{\mathrm{Im}\, D''_{\omega_\chi}}$ coïncide avec l'adhérence de $D''\big(\mathcal{D}(X, \Lambda^{p,q}T^\star_X)\big)$ dans $L^2_{\omega_\chi}(X, \Lambda^{p,q}T^\star_X)$. Considérons le morphisme limite

$$\varinjlim_{\chi} \mathcal{H}^{p,q}_{\omega_\chi}(X,\mathbb{C}) \longrightarrow H^{p,q}(X,\mathbb{C}), \tag{12.16}$$

où la limite inductive est étendue à l'ensemble des fonctions convexes croissantes χ de classe C^∞ telles que $\chi''(t) \geqslant 1$ sur $[0, +\infty[$, avec la relation d'ordre

$$\chi_1 \preccurlyeq \chi_2 \iff \chi_1 \leqslant \chi_2 \;\text{ et }\; L^2_{\omega_{\chi_1}}(X, \Lambda^{p,q}T^\star_X) \subset L^2_{\omega_{\chi_2}}(X, \Lambda^{p,q}T^\star_X) \;\text{ pour }\; k = p+q\,;$$

il est facile de voir que cet ordre est filtrant en reprenant les arguments utilisés pour le lemme (12.15). Il est bien connu par ailleurs que les groupes de cohomologie de De Rham sont toujours séparés pour la topologie induite par la topologie de Fréchet sur les espaces de formes, par suite on a un morphisme limite

$$\varinjlim_{\chi} \mathcal{H}^{k}_{\omega_\chi}(X,\mathbb{C}) \longrightarrow H^{k}_{\mathrm{DR}}(X,\mathbb{C}) \tag{12.16$_{\mathrm{DR}}$}$$

analogue à (12.16). La formule de décomposition du théorème (12.13) se déduit maintenant de (12.14) et du lemme élémentaire suivant.

12.17. Lemme. *Les morphismes limites* (12.16), (12.16)$_{\mathrm{DR}}$ *sont bijectifs pour* $k = p+q \geqslant n+\ell$.

Preuve. Traitons par exemple le cas du morphisme (12.16). Soit u une forme L^2_{loc} d''-fermée de bidegré (p,q), $p+q \geqslant n+\ell$. Alors il existe un choix de χ pour lequel $u \in L^2_{\omega_\chi}$, donc $u \in \mathrm{Ker}\; D''_{\omega_\chi}$ et (12.16) est surjectif. Si une classe $\{u\} \in \mathcal{H}^{p,q}_{\omega_{\chi_0}}(X,\mathbb{C})$ est envoyée sur zéro dans $H^{p,q}(X,\mathbb{C})$, on peut écrire $u = d''v$ pour une certaine forme v à coefficients L^2_{loc} et de bidegré $(p, q-1)$. Dans le cas $p+q > n+\ell$, nous aurons $v \in L^2_{\omega_\chi}$ pour $\chi \succcurlyeq \chi_0$ assez grand, donc la classe de $u = D''_{\omega_\chi} v$ dans $H^{p,q}_{\omega_\chi}(X,\mathbb{C})$ est nulle et (12.16) est injectif. Quand $p+q = n+\ell$, la forme v n'appartient plus nécessairement à un des espaces $L^2_{\omega_\chi}$, mais il suffit de montrer que $u = d''v$ est dans l'adhérence de Im D''_{ω_χ} pour χ assez grand. Soit $\theta \in C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$

une fonction tronquante telle que $\theta(t) = 1$ pour $t \leqslant 1/2$, $\theta(t) = 0$ pour $t \geqslant 1$ et $|\theta'| \leqslant 3$. Alors

$$d''\big(\theta(\varepsilon\psi)v\big) = \theta(\varepsilon\psi)d''v + \varepsilon\theta'(\varepsilon\psi)d''\psi \wedge v.$$

D'après la preuve du lemme (12.15), il existe une fonction continue $C(x) > 0$ telle que $|v|^2_{\omega_\chi} dV_{\omega_\chi} \leqslant C\big(1+\chi''(\psi)/\chi'(\psi)\big)|v|^2_\omega dV_\omega$, alors que $|d''\psi|^2_{\omega_\chi} \leqslant 1/\chi''(\psi)$ d'après la définition même de ω_χ. Nous voyons donc que l'intégrale

$$\int_X |\theta'(\varepsilon\psi)d''\psi \wedge v|^2_{\omega_\chi} dV_{\omega_\chi} \leqslant \int_X C\big(1/\chi''(\psi) + 1/\chi'(\psi)\big)|v|^2 dV$$

est finie pour χ assez grand, et par convergence dominée $d''\big(\theta(\varepsilon\psi)v\big)$ converge vers $d''v = u$ dans $L^2_{\omega_\chi}(X, \Lambda^{p,q}T^\star_X)$. $\square$

La dualité de Poincaré et de Serre montre que les espaces $H^k_{\mathrm{DR},\,c}(X,\mathbb{C})$ et $H^{p,q}_c(X,\mathbb{C})$ à support compact sont duaux des espaces $H^{2n-k}_{\mathrm{DR}}(X,\mathbb{C})$ et $H^{n-p,n-q}(X,\mathbb{C})$ dès lors que ces derniers sont séparés de de dimension finie, ce qui est bien le cas si $k = p+q \leqslant n-\ell$. Nous obtenons donc une décomposition de Hodge duale

$$(12.18)\quad H^k_c(X,\mathbb{C}) \simeq \bigoplus_{p+q=k} H^{p,q}_c(X,\mathbb{C}), \quad \overline{H^{p,q}_c(X,\mathbb{C})} \simeq H^{q,p}_c(X,\mathbb{C}), \quad k \leqslant n-\ell.$$

Il est par ailleurs facile de prouver que l'isomorphisme de Lefschetz

$$(12.19)\qquad \omega_\chi^{n-p-q} \wedge \bullet : \ \ \mathcal{H}^{p,q}_{\omega_\chi}(X,\mathbb{C}) \longrightarrow \mathcal{H}^{n-q,n-p}_{\omega_\chi}(X,\mathbb{C})$$

donne à la limite un isomorphisme entre la cohomologie à support compact et la cohomologie sans supports (ce résultat est dû à Ohsawa [Ohs81]). En effet, si $p+q \leqslant n-\ell$, le morphisme naturel

$$(12.20)\qquad H^{p,q}_c(X,\mathbb{C}) = \operatorname{Ker} D''_{\mathcal{D}} / \operatorname{Im} D''_{\mathcal{D}} \longrightarrow \operatorname{Ker} D''_{\omega_\chi} / \overline{\operatorname{Im} D''_{\omega_\chi}} \simeq \mathcal{H}^{p,q}_{\omega_\chi}(X)$$

est dual du morphisme $\mathcal{H}^{n-p,n-q}_{\omega_\chi}(X,\mathbb{C}) \longrightarrow H^{n-p,n-q}(X,\mathbb{C})$, qui est surjectif pour χ assez grand d'après le lemme (12.17) et la finitude du groupe $H^{n-p,n-q}(X,\mathbb{C})$. Donc (12.20) est injectif pour χ grand, et après composition avec l'isomorphisme de Lefschetz (12.19) nous obtenons une injection

$$\omega^{n-p-q} \wedge \bullet = \omega_\chi^{n-p-q} \wedge \bullet : \ \ H^{p,q}_c(X,\mathbb{C}) \longrightarrow H^{n-q,n-p}_{L^2,\,\omega_\chi}(X,\mathbb{C})_{\mathrm{sep}} \simeq \mathcal{H}^{n-q,n-p}_{\omega_\chi}(X,\mathbb{C})$$

(l'égalité $\omega^{n-p-q} \wedge \bullet = \omega_\chi^{n-p-q} \wedge \bullet$ résulte du fait que ω_χ a même classe de cohomologie que ω). En prenant la limite inductive sur χ et en combinant avec l'isomorphisme limite (12.16), on obtient une application injective

$$(12.21)\qquad \omega^{n-p-q} \wedge \bullet \ \ : \ \ H^{p,q}_c(X,\mathbb{C}) \longrightarrow H^{n-q,n-p}(X,\mathbb{C}), \quad p+q \leqslant n-\ell.$$

Comme les deux membres ont la même dimension par le théorème de dualité de Serre et la symétrie de Hodge, cette application est nécessairement un isomorphisme. □

12.22. Remarque. Puisque l'isomorphisme de Lefschetz (12.21) peut se factoriser à travers $H^{p,q}(X,\mathbb{C})$ ou à travers $H_c^{n-q,n-p}(X,\mathbb{C})$, on déduit de celui-ci que les morphismes naturels

$$H_c^{p,q}(X,\mathbb{C}) \longrightarrow H^{p,q}(X,\mathbb{C})$$

sont injectifs pour $p+q \leqslant n-\ell$ et surjectifs pour $p+q \geqslant n+\ell$. Bien entendu, on a des propriétés entièrement analogues pour les groupes de cohomologie de De Rham.

§13. Technique de Bochner et théorèmes d'annulation

Soit X une variété complexe munie d'une métrique kählérienne $\omega = \sum \omega_{jk} dz_j \wedge d\overline{z}_k$. Soit (E,h) un fibré vectoriel holomorphe hermitien sur X. Nous notons $D = D' + D''$ sa connexion de Chern et $\Theta(E)$ le tenseur de courbure associé.

13.1. Relations de commutation de base. *Soit L l'opérateur $Lu = \omega \wedge u$ agissant sur les formes à valeurs vectorielles et soit $\Lambda = L^\star$ son adjoint. Alors*

$$\begin{aligned} [D''^\star, L] &= \mathrm{i}\, d', & [D'^\star, L] &= -\mathrm{i}\, d'', \\ [\Lambda, D''] &= -\mathrm{i}\, d'^\star, & [\Lambda, D'] &= \mathrm{i}\, d''^\star. \end{aligned}$$

Preuve (abrégée). C'est une conséquence assez simple de la relation de commutation (6.14) déjà démontrée pour la connexion triviale $d = d' + d''$ sur $E = X \times \mathbb{C}$. En effet, pour tout point $x_0 \in X$, il existe un repère holomorphe local $(e_\lambda)_{1\leqslant\lambda\leqslant r}$ de E tel que

$$\langle e_\lambda, e_\mu \rangle = \delta_{\lambda\mu} + O(|z|^2).$$

(La preuve est entièrement similaire à celle du théorème 5.8). Pour $s = \sum s_\lambda \otimes e_\lambda$ avec $s_\lambda \in C^\infty(X, \Lambda^{p,q} T_X^\star)$, nous obtenons

$$D''s = \sum d'' s_\lambda \otimes e_\lambda + O(|z|), \qquad D''^\star s = \sum d''^\star s_\lambda \otimes e_\lambda + O(|z|).$$

Les relations annoncées s'ensuivent aisément. □

13.2. Identité de Bochner-Kodaira-Nakano. *Si (X,ω) est une variété kählérienne, les laplaciens complexes Δ' et Δ'' agissant sur les formes à valeurs dans E satisfont l'identité*

$$\Delta'' = \Delta' + [\mathrm{i}\,\Theta(E), \Lambda].$$

Preuve. La dernière égalité (13.1) donne $D''^\star = -\mathrm{i}[\Lambda, D']$, donc

$$\Delta'' = [D'', D''^\star] = -\mathrm{i}\big[D'', [\Lambda, D']\big].$$

L'identité de Jacobi implique

$$\big[D'', [\Lambda, D']\big] = \big[\Lambda, [D', D'']\big] + \big[D', [D'', \Lambda]\big] = [\Lambda, \Theta(E)] + \mathrm{i}[D', D'^\star],$$

si l'on tient compte du fait que $[D', D''] = D^2 = \Theta(E)$. L'identité annoncée s'ensuit. □

Supposons que X soit *compacte* et soit $u \in C^\infty(X, \Lambda^{p,q}T_X^\star \otimes E)$ une (p,q)-forme arbitraire. Une intégration par parties donne

$$\langle \Delta' u, u\rangle = \|D'u\|^2 + \|D'^\star u\|^2 \geqslant 0,$$

et on a une égalité analogue pour Δ''. De l'identité de Bochner-Kodaira-Nakano, on déduit l'inégalité a priori

$$\|D''u\|^2 + \|D''^\star u\|^2 \geqslant \int_X \langle [\mathrm{i}\,\Theta(E), \Lambda]u, u\rangle dV_\omega. \tag{13.3}$$

Cette inégalité est connue sous le nom *d'inégalité de Bochner-Kodaira-Nakano* (voir [Boc48], [Kod53], [Nak55]). Lorsque u est Δ''-harmonique, on obtient

$$\int_X \langle [\mathrm{i}\,\Theta(E), \Lambda]u, u\rangle\, dV \leqslant 0.$$

Si l'opérateur hermitien $[\mathrm{i}\,\Theta(E), \Lambda]$ est positif sur chaque fibre de $\Lambda^{p,q}T_X^\star \otimes E$, on voit que u est nécessairement nulle, donc

$$H^{p,q}(X, E) = \mathcal{H}^{p,q}(X, E) = 0$$

d'après la théorie de Hodge. Dans cette approche, le point essentiel est de savoir calculer la forme de courbure $\Theta(E)$ et de trouver des conditions suffisantes pour que l'opérateur $[\mathrm{i}\,\Theta(E), \Lambda]$ soit défini positif. Des calculs élémentaires (quelque peu pénibles) donnent la formule suivante : si la courbure de E est écrite sous la forme (11.16) et si

$$u = \sum u_{J,K,\lambda} dz_I \wedge d\overline{z}_J \otimes e_\lambda, \qquad |J| = p,\ |K| = q,\ 1 \leqslant \lambda \leqslant r$$

est une (p,q)-forme à valeurs dans E, alors

$$\begin{aligned} \langle [\mathrm{i}\,\Theta(E), \Lambda]u, u\rangle = &\sum_{j,k,\lambda,\mu,J,S} c_{jk\lambda\mu}\, u_{J,jS,\lambda}\, \overline{u_{J,kS,\mu}} \\ &+ \sum_{j,k,\lambda,\mu,R,K} c_{jk\lambda\mu}\, u_{kR,K,\lambda}\, \overline{u_{jR,K,\mu}} \\ &- \sum_{j,\lambda,\mu,J,K} c_{jj\lambda\mu}\, u_{J,K,\lambda}\, \overline{u_{J,K,\mu}}, \end{aligned} \tag{13.4}$$

où les sommations sont étendues à tous les indices $1 \leqslant j,k \leqslant n$, $1 \leqslant \lambda,\mu \leqslant r$ et tous les multi-indices $|J| = p$, $|K| = q$, $|R| = p-1$, $|S| = q-1$ (ici la notation $u_{JK\lambda}$ s'applique à des multi-indices non nécessairement croissants, on convient que le signe de ce coefficient est alterné sous l'action des permutations). Compte tenu de la complexité du terme de courbure (13.4), le signe de ce terme est en général difficile à élucider, sauf dans quelques cas très particuliers.

Le cas le plus simple est le cas $p = n$. Tous les termes de la deuxième sommation figurant dans (13.4) sont alors tels que $j = k$ et $R = \{1,\ldots,n\} \smallsetminus \{j\}$, par conséquent les deuxièmes et troisièmes sommations sont égales. Il s'ensuit que

$$\langle[\mathrm{i}\,\Theta(E),\Lambda]u,u\rangle = \sum_{j,k,\lambda,\mu,J,S} c_{jk\lambda\mu}\, u_{J,jS,\lambda}\, \overline{u_{J,kS,\mu}}$$

est positive sur les (n,q)-formes, sous l'hypothèse que E est positif au sens de Nakano. Dans ce cas, X est automatiquement kählérienne puisque

$$\omega = \mathrm{Tr}_E(\mathrm{i}\,\Theta(E)) = \mathrm{i}\sum_{j,k,\lambda} c_{jk\lambda\lambda} dz_j \wedge d\overline{z}_k = \mathrm{i}\,\Theta(\det E)$$

définit alors une métrique kählérienne.

13.5. Théorème d'annulation de Nakano (1955)**.** *Soit X une variété complexe compacte et soit E un fibré vectoriel positif au sens de Nakano sur X. Alors*

$$H^{n,q}(X,E) = H^q(X, K_X \otimes E) = 0 \qquad \text{pour tout } q \geqslant 1. \qquad \square$$

Un autre cas abordable est le cas où E est un fibré en droites ($r = 1$). En effet, en chaque point $x \in X$, nous pouvons alors choisir un système de coordonnées qui diagonalise simultanément les formes hermitiennes $\omega(x)$ et $\Theta(E)(x)$, de telle manière que

$$\omega(x) = \mathrm{i}\sum_{1\leqslant j\leqslant n} dz_j \wedge d\overline{z}_j, \qquad \Theta(E)(x) = \mathrm{i}\sum_{1\leqslant j\leqslant n} \gamma_j dz_j \wedge d\overline{z}_j$$

avec $\gamma_1 \leqslant \cdots \leqslant \gamma_n$. Les valeurs propres de courbure $\gamma_j = \gamma_j(x)$ sont alors définies de manière unique et dépendent continûment de x. Dans les notations antérieures, nous avons $\gamma_j = c_{jj11}$ et tous les autres coefficients $c_{jk\lambda\mu}$ sont nuls. Pour toute (p,q)-forme $u = \sum u_{JK} dz_J \wedge d\overline{z}_K \otimes e_1$, ceci donne

$$\begin{aligned}\langle[\mathrm{i}\,\Theta(E),\Lambda]u,u\rangle &= \sum_{|J|=p,\,|K|=q} \Big(\sum_{j\in J}\gamma_j + \sum_{j\in K}\gamma_j - \sum_{1\leqslant j\leqslant n}\gamma_j\Big)|u_{JK}|^2 \\ &\geqslant (\gamma_1 + \cdots + \gamma_q - \gamma_{n-p+1} - \cdots - \gamma_n)|u|^2. \qquad (13.6)\end{aligned}$$

Supposons que $\mathrm{i}\,\Theta(E)$ soit positive. Il est alors naturel de munir X de la métrique kählérienne particulière $\omega = \mathrm{i}\,\Theta(E)$. Alors $\gamma_j = 1$ pour $j = 1,2,\ldots,n$ et on obtient

$$\langle[\mathrm{i}\,\Theta(E),\Lambda]u,u\rangle = (p+q-n)|u|^2.$$

Par conséquent :

13.7. Théorème d'annulation de Kodaira-Akizuki-Nakano ([AN54]). *Si E est un fibré en droites positif sur une variété complexe compacte X, alors*

$$H^{p,q}(X,E) = H^q(X,\Omega_X^p \otimes E) = 0 \qquad \textit{pour} \;\; p+q \geqslant n+1. \qquad \square$$

Plus généralement, si E est un fibré vectoriel positif au sens de Griffiths (ou ample), de rang $r \geqslant 1$, Le Potier [LP75] a démontré que $H^{p,q}(X,E) = 0$ pour $p+q \geqslant n+r$. La preuve n'est pas une conséquence directe de la technique de Bochner. Une preuve assez simple a été obtenue par M. Schneider [Sch74], en utilisant la suite spectrale de Leray associée à la projection sur X du fibré projectivisé $\mathbb{P}(E) \to X$.

13.8. Exercice. Il est important pour diverses applications de disposer de théorèmes d'annulation qui soient également valables dans le cas de fibrés en droites semi-positifs. On a par exemple le résultat suivant dû à J. Girbau [Gir76] : soit (X,ω) une variété kählérienne compacte; supposons que E soit un fibré en droites et que $\mathrm{i}\,\Theta(E) \geqslant 0$ ait au moins $n-k$ valeurs propres positives en chaque point, pour un certain entier $k \geqslant 0$; alors $H^{p,q}(X,E) = 0$ pour $p+q \geqslant n+k+1$. *Indication :* utiliser la métrique kählérienne $\omega_\varepsilon = \mathrm{i}\,\Theta(E) + \varepsilon\omega$ avec $\varepsilon > 0$ petit.

Une version plus naturelle et plus puissante de ce résultat a été obtenue par A. Sommese [Som78, ShSo85] : suivant ces auteurs, on dira que E est k-ample si un certain multiple mE est tel que l'application canonique

$$\Phi_{|mE|} : X \smallsetminus B_{|mE|} \to \mathbb{P}^{N-1}$$

a toutes ses fibres de dimension $\leqslant k$ et $\dim B_{|mE|} \leqslant k$; si X est projective et si E est k-ample, alors $H^{p,q}(X,E) = 0$ pour $p+q \geqslant n+k+1$.
Indication : prouver le résultat dual, à savoir que $H^{p,q}(X,E^{-1}) = 0$ pour $p+q \leqslant n-k-1$, par récurrence sur k. Montrer d'abord que E est 0-ample si et seulement si E est positif; utiliser alors des sections hyperplanes $Y \subset X$ pour démontrer l'étape de récurrence, en considérant les suites exactes

$$0 \longrightarrow \Omega_X^p \otimes E^{-1} \otimes \mathcal{O}(-Y) \longrightarrow \Omega_X^p \otimes E^{-1} \longrightarrow \big(\Omega_X^p \otimes E^{-1}\big)_{\restriction Y} \longrightarrow 0,$$
$$0 \longrightarrow \Omega_Y^{p-1} \otimes E^{-1}_{\restriction Y} \longrightarrow \big(\Omega_X^p \otimes E^{-1}\big)_{\restriction Y} \longrightarrow \Omega_Y^p \otimes E^{-1}_{\restriction Y} \longrightarrow 0. \qquad \square$$

§14. Estimations L^2 et théorèmes d'existence

Le point de départ est le théorème d'existence L^2 suivant, qui est dû essentiellement à Hörmander [Hör65, 66], et Andreotti-Vesentini [AV65]. Nous en esquisserons seulement les idées principales, en renvoyant par exemple à [Dem82] pour un exposé détaillé de la situation technique considérée ici.

14.1. Théorème. *Soit* (X,ω) *une variété kählérienne* <u>*complète*</u>. *Soit* E *un fibré vectoriel hermitien de rang* r *sur* X, *tel que l'opérateur de courbure* $A = A^{p,q}_{E,\omega} = [\mathrm{i}\,\Theta(E),\Lambda_\omega]$ *soit semi-positif sur toutes les fibres de* $\Lambda^{p,q}T^\star_X\otimes E$, $q\geqslant 1$. *Soit* $g\in L^2(X,\Lambda^{p,q}T^\star_X\otimes E)$ *une forme telle que*

$$D''g=0 \quad et \qquad \int_X \langle A^{-1}g,g\rangle\,dV_\omega<+\infty$$

(aux points où A *n'est pas défini positif, on suppose qu'un antécédent* $A^{-1}g$ *existe presque partout; on choisit alors l'antécédent* $A^{-1}g$ *de norme minimale, orthogonal à* $\mathrm{Ker}\,A$*). Alors il existe* $f\in L^2(X,\Lambda^{p,q-1}T^\star_X\otimes E)$ *telle que*

$$D''f=g \quad et \qquad \int_X |f|^2\,dV_\omega\leqslant\int_X\langle A^{-1}g,g\rangle\,dV_\omega.$$

Preuve. Soit $u\in L^2(X,\Lambda^{p,q}T^\star_X\otimes E)$ une forme telle que $D''u\in L^2$ et $D''^\star u\in L^2$ au sens des distributions. Le lemme (12.2 a) montre (sous l'hypothèse indispensable que ω est complète) que u est limite d'une suite de formes u_ν de classe C^∞ et à support compact, de telle manière que $u_\nu\to u$, $D''u_\nu\to D''u$ et $D''^\star u_\nu\to D''^\star u$ dans L^2. Il s'ensuit que l'inégalité a priori (13.3) s'étend à des formes arbitraires u telles que $u,\ D''u,\ D''^\star u\in L^2$. Maintenant, comme $\mathrm{Ker}\,D''$ est faiblement (et donc fortement) fermé, on obtient une décomposition orthogonale de l'espace de Hilbert $L^2(X,\Lambda^{p,q}T^\star_X\otimes E)$, à savoir

$$L^2(X,\Lambda^{p,q}T^\star_X\otimes E)=\mathrm{Ker}\,D''\oplus(\mathrm{Ker}\,D'')^\perp.$$

Soit $v=v_1+v_2$ la décomposition correspondante d'une forme $v\in\mathcal{D}^{p,q}(X,E)$ de classe C^∞ à support compact (en général, v_1, v_2 ne sont pas à support compact !). Puisque $(\mathrm{Ker}\,D'')^\perp=\overline{\mathrm{Im}\,D''^\star}\subset\mathrm{Ker}\,D''^\star$ par dualité et $g,v_1\in\mathrm{Ker}\,D''$ par hypothèse, nous obtenons $D''^\star v_2=0$ et

$$|\langle g,v\rangle|^2=|\langle g,v_1\rangle|^2\leqslant\int_X\langle A^{-1}g,g\rangle\,dV_\omega\int_X\langle Av_1,v_1\rangle\,dV_\omega$$

grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz. L'inégalité a priori (13.3) appliquée à $u=v_1$ donne

$$\int_X\langle Av_1,v_1\rangle\,dV_\omega\leqslant\|D''v_1\|^2+\|D''^\star v_1\|^2=\|D''^\star v_1\|^2=\|D''^\star v\|^2.$$

En combinant les deux inégalités, nous trouvons

$$|\langle g,v\rangle|^2\leqslant\Big(\int_X\langle A^{-1}g,g\rangle\,dV_\omega\Big)\|D''^\star v\|^2$$

pour toute (p,q)-forme v de classe C^∞ à support compact. Ceci montre qu'on a une forme linéaire bien définie

$$w=D''^\star v\longmapsto\langle v,g\rangle,\qquad L^2(X,\Lambda^{p,q-1}T^\star_X\otimes E)\supset D''^\star(\mathcal{D}^{p,q}(E))\longrightarrow\mathbb{C}$$

sur l'image de $D''^\star$. Cette forme linéaire est continue par rapport à la norme L^2, et sa norme est $\leqslant C$ avec

$$C = \Big(\int_X \langle A^{-1}g, g\rangle\, dV_\omega\Big)^{1/2}.$$

D'après le théorème de Hahn-Banach, il existe un élément $f \in L^2(X, \Lambda^{p,q-1}T_X^\star \otimes E)$ tel que $||f|| \leqslant C$ et $\langle v, g\rangle = \langle D''^\star v, f\rangle$ pour tout v, par suite $D''f = g$ au sens des distributions. L'inégalité $||f|| \leqslant C$ est équivalente à la dernière estimation du théorème. □

Le théorème d'existence L^2 précédent peut être appliqué dans le contexte général des variétés kählériennes *faiblement pseudoconvexes* (voir définition (12.9)), et ce même si la métrique kählérienne considérée ω n'est pas complète. En effet, d'après la proposition (12.10), on obtient des métriques kählériennes complètes en posant

$$\omega_\varepsilon = \omega + \varepsilon\,\mathrm{i}\,d'd''\psi^2 = \omega + 2\varepsilon(2\mathrm{i}\,\psi d'd''\psi + \mathrm{i}\,d'\psi \wedge d''\psi)$$

avec une fonction d'exhaustion C^∞ psh $\psi \geqslant 0$. Par conséquent, le théorème d'existence L^2 (14.1) s'applique à chaque métrique kählérienne ω_ε. On vérifie par ailleurs (les calculs sont laissés au lecteur !) que les quantités $|g|^2_\omega\, dV_\omega$ et $\langle (A^{p,q}_{E,\omega})^{-1}g, g\rangle_\omega\, dV_\omega$ sont fonctions décroissantes de ω lorsque $p = n = \dim_{\mathbb{C}} X$. Pour une forme D''-fermée g de bidegré (n,q) on obtient donc des solutions f_ε de l'équation $D''f_\varepsilon = g$ telles que

$$\int_X |f_\varepsilon|^2_{\omega_\varepsilon}\, dV_{\omega_\varepsilon} \leqslant \int_X \langle (A^{p,q}_{E,\omega_\varepsilon})^{-1}g, g\rangle_{\omega_\varepsilon}\, dV_{\omega_\varepsilon} \leqslant \int_X \langle (A^{p,q}_{E,\omega})^{-1}g, g\rangle_\omega\, dV_\omega.$$

Ces solutions f_ε étant bornées uniformément en norme L^2 sur tout compact, on peut en extraire une sous-suite faiblement convergente dans L^2. La limite f est solution de $D''f = g$ et satisfait l'estimation L^2 voulue relativement à la métrique ω initialement donnée (qui, répétons-le, n'est pas nécessairement complète). Un cas particulier important est le suivant :

14.2. Théorème. *Soit (X, ω) une variété kählérienne,* $\dim X = n$. *Supposons que X soit faiblement pseudoconvexe. Soit E un fibré en droites hermitien et soient*

$$\gamma_1(x) \leqslant \cdots \leqslant \gamma_n(x)$$

les valeurs propres de courbure (i.e. les valeurs propres de $\mathrm{i}\,\Theta(E)$ par rapport à la métrique ω) en tout point. Supposons que la courbure soit semi-positive, i.e. $\gamma_1 \geqslant 0$ partout. Alors pour toute forme $g \in L^2(X, \Lambda^{n,q}T_X^\star \otimes E)$ telle que

$$D''g = 0 \quad et \qquad \int_X \langle (\gamma_1 + \cdots + \gamma_q)^{-1}|g|^2\, dV_\omega < +\infty,$$

(on suppose donc $g(x) = 0$ presque partout aux points où $\gamma_1(x) + \cdots + \gamma_q(x) = 0$), il existe $f \in L^2(X, \Lambda^{n,q-1}T^\star_X \otimes E)$ telle que

$$D''f = g \quad et \qquad 2\int_X |f|^2\,dV_\omega \leqslant \int_X (\gamma_1 + \cdots + \gamma_q)^{-1}|g|^2\,dV_\omega.$$

Preuve. En effet, pour $p = n$, la formule (13.6) montre que

$$\langle Au, u\rangle \geqslant (\gamma_1 + \cdots + \gamma_q)|u|^2,$$

donc $\langle A^{-1}u, u\rangle \geqslant (\gamma_1 + \cdots + \gamma_q)^{-1}|u|^2$. □

Une observation importante est que le théorème ci-dessus s'applique encore quand la métrique hermitienne de E est une métrique singulière à courbure positive au sens des courants. En effet, par les techniques standard de régularisation (convolution des fonctions psh par des noyaux régularisants), la métrique peut être rendue C^∞ et les solutions obtenues au moyen des théorèmes (14.1) ou (14.2) pour les métriques régularisées ont des limites satisfaisant les estimations désirées. En particulier, nous obtenons le corollaire suivant.

14.3. Corollaire. *Soit (X, ω) une variété kählérienne,* $\dim X = n$. *Supposons que X soit faiblement pseudoconvexe. Soit E un fibré en droites holomorphe muni d'une métrique singulière dont le poids local est noté $\varphi \in L^1_{\mathrm{loc}}$. Supposons que*

$$\mathrm{i}\,\Theta(E) = 2\mathrm{i}\,d'd''\varphi \geqslant \varepsilon\omega$$

pour un certain $\varepsilon > 0$. Alors pour toute forme $g \in L^2(X, \Lambda^{n,q}T^\star_X \otimes E)$ telle que $D''g = 0$, il existe $f \in L^2(X, \Lambda^{p,q-1}T^\star_X \otimes E)$ telle que $D''f = g$ et

$$\int_X |f|^2 \mathrm{e}^{-2\varphi}\,dV_\omega \leqslant \frac{1}{q\varepsilon}\int_X |g|^2\mathrm{e}^{-2\varphi}\,dV_\omega. \qquad \square$$

Nous avons noté ici de façon quelque peu incorrecte la métrique sous la forme $|f|^2\mathrm{e}^{-2\varphi}$, comme si le poids φ était globalement défini sur X (bien sûr, ceci n'est possible que si E est globalement trivial). Par abus d'écriture, nous utiliserons quand même cette notation car elle souligne clairement la dépendance de la norme L^2 en fonction du poids psh.

§15. Théorèmes d'annulation de Nadel et Kawamata-Viehweg

Nous introduisons d'abord le concept de *faisceau d'idéaux multiplicateurs*, suivant A. Nadel [Nad89]. L'idée principale remonte en fait aux travaux fondamentaux de E. Bombieri [Bom70] et H. Skoda [Sko72].

15.1. Définition. *Soit φ une fonction psh sur un ouvert $\Omega \subset X$; on associe à φ le faisceau d'idéaux $\mathcal{I}(\varphi) \subset \mathcal{O}_\Omega$, formé des germes de fonctions holomorphes $f \in \mathcal{O}_{\Omega,x}$ telles que $|f|^2\mathrm{e}^{-2\varphi}$ soit intégrable par rapport à la mesure de Lebesgue dans* *des coordonnées locales quelconques près de x. Ce faisceau sera appelé faisceau d'idéaux multiplicateurs associé au poids φ.*

La variété des zéros $V(\mathcal{I}(\varphi))$ est donc l'ensemble des points au voisinage desquels $\mathrm{e}^{-2\varphi}$ est non intégrable. Bien entendu, de tel points ne peuvent apparaître que là où φ a des pôles logarithmiques. La formulation précise est la suivante.

15.2. Définition. *On dira qu'une fonction psh φ a un pôle logarithmique de coefficient γ en un point $x \in X$ si le nombre de Lelong*

$$\nu(\varphi, x) := \liminf_{z \to x} \frac{\varphi(z)}{\log|z-x|}$$

est non nul et si $\nu(\varphi, x) = \gamma$.

15.3. Lemme (Skoda [Sko72]). *Soit φ une fonction psh sur un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ et soit $x \in \Omega$.*

a) *Si $\nu(\varphi, x) < 1$, alors $\mathrm{e}^{-2\varphi}$ est intégrable au voisinage de x, en particulier $\mathcal{I}(\varphi)_x = \mathcal{O}_{\Omega,x}$.*

b) *Si $\nu(\varphi, x) \geqslant n + s$ pour un certain entier $s \geqslant 0$, alors $\mathrm{e}^{-2\varphi} \geqslant C|z-x|^{-2n-2s}$ au voisinage de x et $\mathcal{I}(\varphi)_x \subset \mathfrak{m}_{\Omega,x}^{s+1}$, où $\mathfrak{m}_{\Omega,x}$ désigne l'idéal maximal de $\mathcal{O}_{\Omega,x}$.*

Preuve. La démonstration repose sur des estimations classiques de théorie du potentiel complexe, voir H. Skoda [Sko72]. □

15.4. Proposition ([Nad89]). *Pour toute fonction psh φ sur $\Omega \subset X$, le faisceau $\mathcal{I}(\varphi)$ est un faisceau cohérent d'idéaux sur Ω.*

Preuve. Puisque le résultat est local, nous pouvons supposons que Ω est la boule unité de $\mathbb{C}^n$. Soit $\mathcal{H}_\varphi(\Omega)$ l'ensemble des fonctions f holomorphes sur Ω telles que $\int_\Omega |f|^2 \mathrm{e}^{-2\varphi}\, d\lambda < +\infty$. D'après la propriété noethérienne forte des faisceaux cohérents, l'ensemble $\mathcal{H}_\varphi(\Omega)$ engendre un faisceau d'idéaux cohérent $\mathcal{J} \subset \mathcal{O}_\Omega$. Il est clair que $\mathcal{J} \subset \mathcal{I}(\varphi)$; pour démontrer l'égalité, il suffit de vérifier que $\mathcal{J}_x + \mathcal{I}(\varphi)_x \cap \mathfrak{m}_{\Omega,x}^{s+1} = \mathcal{I}(\varphi)_x$ pour tout entier s, en vertu du lemme de Krull. Soit $f \in \mathcal{I}(\varphi)_x$ un germe défini sur un voisinage V de x et soit θ une fonction tronquante à support dans V, telle que $\theta = 1$ au voisinage de x. On résout l'équation $d''u = g := d''(\theta f)$ au moyen des estimations L^2 de Hörmander (14.3), où E est le fibré en droites trivial $\Omega \times \mathbb{C}$ muni du poids strictement psh

$$\widetilde{\varphi}(z) = \varphi(z) + (n+s)\log|z-x| + |z|^2.$$

Nous obtenons une solution u telle que $\int_\Omega |u|^2 \mathrm{e}^{-2\varphi}|z-x|^{-2(n+s)} d\lambda < \infty$, donc $F = \theta f - u$ est holomorphe, $F \in \mathcal{H}_\varphi(\Omega)$ et $f_x - F_x = u_x \in \mathcal{I}(\varphi)_x \cap \mathfrak{m}_{\Omega,x}^{s+1}$. Ceci démontre notre affirmation. □

Les faisceaux d'idéaux multiplicateurs satisfont la propriété essentielle suivante de fonctorialité, relativement aux images directes de faisceaux par des modifications.

15.5. Proposition. *Soit $\mu : X' \to X$ une modification de variétés complexes non singulières (i.e. une application holomorphe propre génériquement $1:1$), et soit φ une fonction psh sur X. Alors*

$$\mu_\star\big(\mathcal{O}(K_{X'}) \otimes \mathcal{I}(\varphi \circ \mu)\big) = \mathcal{O}(K_X) \otimes \mathcal{I}(\varphi).$$

Preuve. Soit $n = \dim X = \dim X'$ et soit $S \subset X$ un sous-ensemble analytique tel que $\mu : X' \smallsetminus S' \to X \smallsetminus S$ soit un biholomorphisme. Par définition des faisceaux d'idéaux multiplicateurs, $\mathcal{O}(K_X) \otimes \mathcal{I}(\varphi)$ s'identifie au faisceau des n-formes holomorphes f sur un ouvert quelconque $U \subset X$, telles que $\mathrm{i}^{n^2} f \wedge \overline{f}\, \mathrm{e}^{-2\varphi} \in L^1_{\mathrm{loc}}(U)$. Puisque φ est localement majorée, nous pouvons même considérer des formes f qui sont a priori définies seulement sur $U \smallsetminus S$, car f est dans $L^2_{\mathrm{loc}}(U)$ et s'étend donc automatiquement à travers S. La formule de changement de variables donne

$$\int_U \mathrm{i}^{n^2} f \wedge \overline{f}\, \mathrm{e}^{-2\varphi} = \int_{\mu^{-1}(U)} \mathrm{i}^{n^2} \mu^\star f \wedge \overline{\mu^\star f}\, \mathrm{e}^{-2\varphi\circ\mu},$$

donc $f \in \Gamma(U, \mathcal{O}(K_X) \otimes \mathcal{I}(\varphi))$ si et seulement si $\mu^\star f \in \Gamma(\mu^{-1}(U), \mathcal{O}(K_{X'}) \otimes \mathcal{I}(\varphi \circ \mu))$. La prop. 15.5 est démontrée. □

15.6. Remarque. Si φ a des singularités algébriques ou analytiques (cf. définition 11.7), le calcul de $\mathcal{I}(\varphi)$ se réduit à un problème purement algébrique.

Le première observation est que $\mathcal{I}(\varphi)$ se calcule aisément si $\varphi = \sum \alpha_j \log |g_j|$ où $D_j = g_j^{-1}(0)$ sont des diviseurs irréductible lisses à croisements normaux. Alors $\mathcal{I}(\varphi)$ est le faisceau des fonctions holomorphes h sur les ouverts $U \subset X$, telles que

$$\int_U |h|^2 \prod |g_j|^{-2\alpha_j} dV < +\infty.$$

Puisque les g_j peuvent être prises comme fonctions coordonnées dans des systèmes de coordonnées locales convenables $(z_1, \ldots, z_n)$, la condition d'intégrabilité est que h soit divisible par $\prod g_j^{m_j}$, où $m_j - \alpha_j > -1$ pour chaque j, i.e. $m_j \geqslant \lfloor \alpha_j \rfloor$ ($\lfloor\ \rfloor$ désigne la partie entière). Par suite

$$\mathcal{I}(\varphi) = \mathcal{O}(-\lfloor D \rfloor) = \mathcal{O}(-\sum \lfloor \alpha_j \rfloor D_j)$$

où $\lfloor D \rfloor$ est la partie entière du $\mathbb{Q}$-diviseur $D = \sum \alpha_j D_j$.

Maintenant, considérons le cas général de singularités algébriques ou analytiques, et supposons que

$$\varphi \sim \frac{\alpha}{2} \log\big(|f_1|^2 + \cdots + |f_N|^2\big)$$

au voisinage des pôles. D'après la remarque énoncée après la déf. 11.7, nous pouvons supposer que les (f_j) sont des générateurs du faisceau d'idéaux intégralement clos $\mathcal{J} = \mathcal{J}(\varphi/\alpha)$, défini comme le faisceau des fonctions holomorphes h telles que $|h| \leqslant C \exp(\varphi/\alpha)$. Dans ce cas, le calcul se fait comme suit.

Choisissons d'abord une modification lisse $\mu : \widetilde{X} \to X$ de X telle que $\mu^\star \mathcal{J}$ soit un faisceau inversible $\mathcal{O}(-D)$ associé à un diviseur à croisements normaux $D = \sum \lambda_j D_j$, où (D_j) sont les composantes du diviseur exceptionnel de $\widetilde{X}$ (considérer l'éclatement X' de X par rapport à l'idéal $\mathcal{J}$, de sorte que l'image inverse de $\mathcal{J}$ sur X' devienne un faisceau inversible $\mathcal{O}(-D')$, puis éclater de nouveau X' de manière à rendre X' lisse et D' à croisements normaux, en invoquant Hironaka [Hi64]). Nous avons alors $K_{\widetilde{X}} = \mu^\star K_X + R$ où $R = \sum \rho_j D_j$ est le diviseur des zéros du jacobien J_μ de l'application d'éclatement. De la formule d'image directe 15.5, nous déduisons

$$\mathcal{I}(\varphi) = \mu_\star\big(\mathcal{O}(K_{\widetilde{X}} - \mu^\star K_X) \otimes \mathcal{I}(\varphi \circ \mu)\big) = \mu_\star\big(\mathcal{O}(R) \otimes \mathcal{I}(\varphi \circ \mu)\big).$$

Maintenant, les $(f_j \circ \mu)$ sont des générateurs de l'idéal $\mathcal{O}(-D)$, donc

$$\varphi \circ \mu \sim \alpha \sum \lambda_j \log |g_j|$$

où les g_j sont des générateurs locaux de $\mathcal{O}(-D_j)$. Nous sommes donc ramenés à calculer le faisceau d'idéaux multiplicateurs dans le cas où les pôles sont donnés par un $\mathbb{Q}$-diviseur à croisements normaux $\sum \alpha \lambda_j D_j$. Nous obtenons $\mathcal{I}(\varphi \circ \mu) = \mathcal{O}(-\sum \lfloor \alpha \lambda_j \rfloor D_j)$, donc

$$\mathcal{I}(\varphi) = \mu_\star \mathcal{O}_{\widetilde{X}}\big(\textstyle\sum (\rho_j - \lfloor \alpha \lambda_j \rfloor) D_j\big). \qquad \square$$

15.7. Exercice. Calculer le faisceau d'idéaux multiplicateurs $\mathcal{I}(\varphi)$ associé à la fonction psh $\varphi = \log(|z_1|^{\alpha_1} + \cdots + |z_p|^{\alpha_p})$, pour des nombres réels arbitraires $\alpha_j > 0$.

Indication : en utilisant la formule de Parseval et des coordonnées polaires $z_j = r_j \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta_j}$, montrer que le problème est équivalent à déterminer pour quels p-uplets $(\beta_1, \ldots, \beta_p) \in \mathbb{N}^p$ l'intégrale

$$\int_{[0,1]^p} \frac{r_1^{2\beta_1} \cdots r_p^{2\beta_p}\, r_1 dr_1 \cdots r_p dr_p}{r_1^{2\alpha_1} + \cdots + r_p^{2\alpha_p}} = \int_{[0,1]^p} \frac{t_1^{(\beta_1+1)/\alpha_1} \cdots t_p^{(\beta_p+1)/\alpha_p}}{t_1 + \cdots + t_p} \prod_{j=1}^p \frac{1}{2\alpha_j} \frac{dt_j}{t_j}$$

est convergente. Déduire de là que $\mathcal{I}(\varphi)$ est engendré par les monômes $z_1^{\beta_1} \cdots z_p^{\beta_p}$ tels que $\sum (\beta_p + 1)/\alpha_p > 1$. (Cet exercice montre que la définition analytique de $\mathcal{I}(\varphi)$ est parfois aussi très commode pour les calculs). $\square$

Soit E un fibré en droites sur X muni d'une métrique singulière h de courant de courbure $\Theta_h(E)$. Si φ est le poids représentant la métrique h sur un ouvert $\Omega \subset X$, le faisceau d'idéaux $\mathcal{I}(\varphi)$ est indépendant du choix de la trivialisation. Il est donc la restriction à Ω d'un faisceau cohérent global sur X que nous noterons indifféremment $\mathcal{I}(h) = \mathcal{I}(\varphi)$ par abus de notation. Dans ce contexte, nous avons le théorème d'annulation fondamental suivant, qui est probablement un des résultats les plus centraux de la géométrie algébrique ou analytique (comme nous le verrons plus tard, ce théorème contient le théorème d'annulation de Kawamata-Viehweg comme cas particulier).

15.8. Théorème d'annulation de Nadel ([Nad89], [Dem93b])**.** *Soit (X,ω) une variété kählérienne faiblement pseudoconvexe, et soit E un fibré en droites holomorphe sur X muni d'une métrique hermitienne h singulière de poids φ. Supposons qu'il existe une fonction continue positive ε sur X telle que $\mathrm{i}\,\Theta_h(E) \geqslant \varepsilon\omega$. Alors*

$$H^q\big(X, \mathcal{O}(K_X+E)\otimes \mathcal{I}(h)\big) = 0 \qquad \textit{pour tout } q \geqslant 1.$$

Preuve. Soit $\mathcal{L}^q$ le faisceau des germes de (n,q)-formes u à valeurs dans E et à coefficients mesurables, telles que à la fois $|u|^2 \mathrm{e}^{-2\varphi}$ et $|d''u|^2\mathrm{e}^{-2\varphi}$ soient localement intégrables. L'opérateur d'' définit un complexe de faisceaux $(\mathcal{L}^\bullet, d'')$ qui est une résolution du faisceau $\mathcal{O}(K_X+E)\otimes\mathcal{I}(\varphi)$: en effet, le noyau de d'' en degré 0 consiste en les germes de n-formes holomorphes à valeurs dans E qui satisfont la condition d'intégrabilité ; donc la fonction coefficient appartient à $\mathcal{I}(\varphi)$; l'exactitude en degré $q \geqslant 1$ découle du corollaire 14.3 appliqué à des boules arbitrairement petites. Comme chaque faisceau $\mathcal{L}^q$ est un $\mathcal{C}^\infty$-module, $\mathcal{L}^\bullet$ est une résolution par des faisceaux acycliques. Soit ψ une fonction d'exhaustion psh de classe C^∞ sur X. Appliquons le corollaire 14.3 globalement sur X, avec la métrique initiale de E multipliée par le facteur $\mathrm{e}^{-\chi\circ\psi}$, où χ est une fonction convexe croissante de croissance arbitrairement rapide à l'infini. Ce facteur peut être utilisé pour assurer la convergence des intégrales à l'infini. Du corollaire 14.3, nous déduisons alors que $H^q\big(\Gamma(X,\mathcal{L}^\bullet)\big) = 0$ pour $q \geqslant 1$. Le théorème s'ensuit grâce à l'isomorphisme de De Rham-Weil (1.2). □

15.9. Corollaire. *Soit (X,ω), E et φ comme dans le théorème* 15.8 *et soient $x_1, \ldots, x_N$ des points isolés de la variété des zéros $V(\mathcal{I}(\varphi))$. Alors il existe une application surjective*

$$H^0(X, \mathcal{O}(K_X+E)) \longrightarrow\!\!\!\!\!\rightarrow \bigoplus_{1\leqslant j\leqslant N} \mathcal{O}(K_X+E)_{x_j} \otimes \big(\mathcal{O}_X/\mathcal{I}(\varphi)\big)_{x_j}.$$

Preuve. Considérons la suite exacte longue de cohomologie associée à la suite exacte courte $0 \to \mathcal{I}(\varphi) \to \mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_X/\mathcal{I}(\varphi) \to 0$, tordue par $\mathcal{O}(K_X+E)$, et appliquons le théorème 15.8 pour obtenir l'annulation du premier groupe H^1. La propriété de surjectivité annoncée s'ensuit. □

15.10. Corollaire. *Soit (X,ω), E et φ comme dans le théorème* 15.8*. Supposons que la fonction poids φ soit telle que $\nu(\varphi,x) \geqslant n+s$ en un certain point $x\in X$ tel que $\nu(\varphi,y) < 1$ pour $y \neq x$ assez voisin de x. Alors $H^0(X, K_X+E)$ engendre tous les s-jets de sections au point x.*

Preuve. Le lemme de Skoda 15.3 b) montre que $e^{-2\varphi}$ est intégrable au voisinage de tout point $y \neq x$ suffisamment proche de x, donc $\mathcal{I}(\varphi)_y = \mathcal{O}_{X,y}$, alors que $\mathcal{I}(\varphi)_x \subset \mathfrak{m}_{X,x}^{s+1}$ d'après 15.3 a). Le corollaire 15.10 est donc un cas particulier de 15.9. □

La philosophie de ces résultats (qui peuvent être considérés comme des généralisations du théorème de Hörmander-Bombieri-Skoda [Bom70], [Sko72, 75]) est que le problème de construire des sections holomorphes de $K_X + E$ peut se résoudre en construisant des métriques hermitiennes convenables sur E telles que le poids φ ait des pôles logarithmiques isolés en des points donnés x_j.

15.11. Exercice. Supposons que X soit compacte et que L soit un fibré en droites positif sur X. Soit $\{x_1, \ldots, x_N\}$ un ensemble fini. Montrer qu'il existe des constantes $a, b \geqslant 0$ dépendant seulement de L et N telles que pour tout $s \in \mathbb{N}$ le groupe $H^0(X, \mathcal{O}(mL))$ engendre les jets d'ordre s en tout point x_j pour $m \geqslant as + b$.
Indication : Appliquer le corollaire 15.9 à $E = -K_X + mL$, avec une métrique singulière sur L de la forme $h = h_0 e^{-\varepsilon\psi}$, où h_0 est de classe C^∞ à courbure positive, $\varepsilon > 0$ petit, et $\psi(z) \sim \log|z - x_j|$ au voisinage de x_j. Déduire de là le théorème de plongement de Kodaira :

15.12. Théorème de plongement de Kodaira. *Si L est un fibré en droites sur une variété complexe compacte, L est ample si et seulement si L est positif.* □

Une façon équivalente d'énoncer le théorème de plongement de Kodaira est la suivante :

15.13. Critère de projectivité de Kodaira. *Une variété complexe compacte X est algébrique projective si et seulement si X possède une métrique de Hodge, c'est-à-dire une métrique kählérienne de classe de cohomologie entière.*

Preuve. Si $X \subset \mathbb{P}^N$ est algébrique projective, alors la restriction de la métrique de Fubini-Study à X est une métrique de Hodge. Inversement, si X possède une métrique de Hodge ω, la classe de cohomologie représentant $\{\omega\}$ dans $H^2(X, \mathbb{Z})$ définit un fibré en droites complexe topologique (i.e. de classe C^∞), soit L. Comme ω est de type $(1,1)$, la suite exacte exponentielle (8.20)

$$H^1(X, \mathcal{O}_X^\star) \to H^2(X, \mathbb{Z}) \to H^2(X, \mathcal{O}) = H^{0,2}(X, \mathbb{C})$$

montre qu'on peut représenter le fibré en droites L par un cocycle de $H^1(X, \mathcal{O}_X^\star)$, en d'autres termes, L peut être muni d'une structure holomorphe. De plus, il existe une métrique hermitienne h sur L telle que $\frac{\mathrm{i}}{2\pi}\Theta_h(L) = \omega$. Par conséquent L est ample et X est projective. □

15.14. Exercice (conditions de Riemann caractérisant les variétés abéliennes)**.** Un tore complexe $X = \mathbb{C}^n/\Gamma$ est appelé *variété abélienne* si X est algébrique projective. Montrer en utilisant (15.13) qu'un tore X est une variété abélienne si et seulement si il existe une forme hermitienne définie positive H sur $\mathbb{C}^n$ telle que

$\operatorname{Im} H(\gamma_1, \gamma_2) \in \mathbb{Z}$ pour tous γ_1, γ_2 dans le réseau Γ.
Indication : utiliser un procédé de moyennisation pour réduire la démonstration au cas de métriques kählériennes invariantes par translations. Observer que les tores réels $\mathbb{Z}\gamma_1 + \mathbb{Z}\gamma_2$ définissent un système de générateurs du groupe d'homologie $H_2(X, \mathbb{Z})$ et que $\int_{\mathbb{Z}\gamma_1+\mathbb{Z}\gamma_2} \omega = \omega(\gamma_1, \gamma_2)$.

15.15. Exercice (solution du problème de Levi)**.** Montrer que les deux propriétés suivantes sont équivalentes.

a) X est fortement pseudoconvexe, i.e. X admet une fonction d'exhaustion fortement psh.

b) X est de Stein, i.e. les fonctions holomorphes globales séparent les points, fournissent des systèmes de coordonnées locales en tout point, et X est holomorphiquement convexe (par définition, ceci signifie que pour toute suite discrète (z_ν) dans X il existe une fonction $f \in H^0(X, \mathcal{O}_X)$ telle que $|f(z_\nu)| \to \infty$). □

15.16. Remarque. Tant que l'on s'intéresse seulement au cas des formes de bidegré (n, q), $n = \dim X$, les estimations L^2 s'étendent aux espaces complexes possédant des singularités arbitraires. En effet, si X est un espace complexe et φ une fonction poids psh sur X, on peut encore définir un faisceau $K_X(\varphi)$ sur X, tel que les sections de $K_X(\varphi)$ sur un ouvert U sont les n-formes holomorphes f sur la partie régulière $U \cap X_{\mathrm{reg}}$, satisfaisant la condition d'intégrabilité $\mathrm{i}^{n^2} f \wedge \overline{f}\, \mathrm{e}^{-2\varphi} \in L^1_{\mathrm{loc}}(U)$. Dans ce contexte, la propriété de fonctorialité 15.5 s'écrit

$$\mu_\star\big(K_{X'}(\varphi \circ \mu)\big) = K_X(\varphi),$$

et elle est valable pour des espaces complexes X, X' arbitraires, $\mu : X' \to X$ étant une modification. Si X est non singulier, on a $K_X(\varphi) = \mathcal{O}(K_X) \otimes \mathcal{I}(\varphi)$, cependant, si X est singulier, le symboles K_X et $\mathcal{I}(\varphi)$ ne doivent pas être dissociés. L'énoncé du théorème d'annulation de Nadel devient $H^q(X, \mathcal{O}(E) \otimes K_X(\varphi)) = 0$ pour $q \geqslant 1$, sous les mêmes hypothèses (X kählérien et faiblement pseudoconvexe, courbure de $E \geqslant \varepsilon\omega$). La preuve s'obtient en restreignant toute la situation à X_{reg}. Bien qu'en général X_{reg} ne soit pas faiblement pseudoconvexe (une condition nécessaire pour qu'il le soit est que $\operatorname{codim} X_{\mathrm{sing}} = 1$), X_{reg} est toujours kählérien complet (le complémentaire d'un sous-ensemble analytique dans un espace kählérien faiblement pseudoconvexe est kählérien complet, voir par exemple [Dem82]). Par conséquent, le théorème d'annulation de Nadel est essentiellement insensible à la présence de singularités. □

Nous déduisons maintenant une version algébrique du théorème d'annulation de Nadel obtenue indépendamment par Kawamata [Kaw82] et Viehweg [Vie82] (la preuve originale reposait sur une méthode différente, utilisant des revêtements cycliques pour ramener la situation au cas du théorème de Kodaira usuel). Avant d'énoncer le théorème, nous avons besoin d'une définition.

15.17. Définition. *Un fibré en droites L sur une variété complexe compacte est dit gros si sa dimension de Kodaira est égale à $n = \dim X$, c'est-à-dire, s'il existe une constante $c > 0$ telle que*

$$H^0(X, \mathcal{O}(kL)) \geqslant c\,k^n, \qquad k \geqslant k_0.$$

15.18. Définition. *Un fibré en droites L sur une variété algébrique projective est dit numériquement effectif (nef en abrégé) si L satisfait l'une des trois propriétés équivalentes qui suivent :*

a) *Pour toute courbe algébrique irréductible $C \subset X$, on a $L \cdot C = \int_C c_1(L) \geqslant 0$.*

b) *Si A est un fibré en droites ample, alors $kL + A$ est ample pour tout $k \geqslant 0$.*

c) *Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une métrique hermitienne h_ε de classe C^∞ sur L telle que $\mathrm{i}\Theta_{h_\varepsilon}(L) \geqslant -\varepsilon\omega$, où ω est une métrique hermitienne fixée sur X.*

L'équivalence des propriétés 15.18 a) et b) est bien connue et nous l'admettrons ici (voir par exemple Hartshorne [Har70] pour la démonstration). Il est clair d'autre part que 15.18 c) implique 15.18 a), tandis que 15.18 b) implique 15.18 c) ; en effet si $\omega = \frac{\mathrm{i}}{2\pi}\Theta(A)$ est la courbure d'une métrique de A à courbure positive, et si h_k est une métrique sur L induisant une métrique à courbure positive sur $kL + A$, il vient $k\frac{\mathrm{i}}{2\pi}\Theta(L) + \frac{\mathrm{i}}{2\pi}\Theta(A) > 0$, d'où $\frac{\mathrm{i}}{2\pi}\Theta(L) \geqslant -\frac{1}{k}\omega$. Maintenant, si $D = \sum \alpha_j D_j \geqslant 0$ est un $\mathbb{Q}$-diviseur effectif, nous définissons le *faisceau d'idéaux multiplicateurs* $\mathcal{I}(D)$ comme étant le faisceau $\mathcal{I}(\varphi)$ associé à la fonction psh $\varphi = \sum \alpha_j \log |g_j|$ définie par des générateurs g_j de $\mathcal{O}(-D_j)$; d'après la remarque 15.6, le calcul de $\mathcal{I}(D)$ peut se faire algébriquement en utilisant des désingularisations $\mu : \widetilde{X} \to X$ telles que $\mu^\star D$ devienne un diviseur à croisements normaux sur $\widetilde{X}$.

15.19. Théorème d'annulation de Kawamata-Viehweg. *Soit X une variété algébrique projective lisse et soit F un fibré en droites sur X tel que F possède un multiple mF s'écrivant sous la forme $mF = L + D$ où L est un fibré en droites nef et gros, et D un diviseur effectif. Alors*

$$H^q\big(X, \mathcal{O}(K_X + F) \otimes \mathcal{I}(m^{-1}D)\big) = 0 \quad \textit{pour} \ \ q \geqslant 1.$$

15.20. Corollaire. *Si F est nef et gros, alors $H^q\big(X, \mathcal{O}(K_X + F)\big) = 0$ pour $q \geqslant 1$.*

Preuve. Soit A un diviseur très ample non singulier. On a une suite exacte

$$0 \to H^0(X, \mathcal{O}(kL - A)) \to H^0(X, \mathcal{O}(kL)) \to H^0(A, \mathcal{O}(kL)_{\restriction A}),$$

et $\dim H^0(A, \mathcal{O}(kL)_{\restriction A}) \leqslant C\,k^{n-1}$ pour une certaine constante $C \geqslant 0$. Comme L est gros, il existe un entier $k_0 \gg 0$ tel que $\mathcal{O}(k_0 L - A)$ possède une section non triviale. Si E est le diviseur de cette section, on obtient $\mathcal{O}(k_0 L - A) \simeq \mathcal{O}(E)$, donc $\mathcal{O}(k_0 L) \simeq \mathcal{O}(A + E)$. Maintenant, pour $k \geqslant k_0$, il vient $\mathcal{O}(kL) = \mathcal{O}((k - k_0)L + A + E)$.

D'après 15.18 b), le fibré en droites $\mathcal{O}((k-k_0)L+A)$ est ample, donc il peut être muni d'une métrique hermitienne $h_k = \mathrm{e}^{-\varphi_k}$ de classe C^∞ et de forme de courbure définie positive $\omega_k = \frac{\mathrm{i}}{2\pi}\Theta((k-k_0)L+A)$. Soit $\varphi_D = \sum \alpha_j \log|g_j|$ le poids de la métrique singulière sur $\mathcal{O}(D)$ décrite dans l'exemple 11.21, telle que $\frac{\mathrm{i}}{2\pi}\Theta(\mathcal{O}(D)) = [D]$, et de façon analogue, soit φ_E le poids tel que $\frac{\mathrm{i}}{2\pi}\Theta(\mathcal{O}(E)) = [E]$. On définit une métrique singulière sur $\mathcal{O}(kL) = \mathcal{O}((k-k_0)L+A+E)$ au moyen du poids $\varphi_k+\varphi_E$, et on obtient alors une métrique singulière sur $\mathcal{O}(mF) = \mathcal{O}(L+D)$ en considérant le poids $\frac{1}{k}(\varphi_k+\varphi_E)+\varphi_D$. Finalement, on obtient une métrique sur F de poids

$$\varphi_F = \frac{1}{km}(\varphi_k+\varphi_E) + \frac{1}{m}\varphi_D.$$

La forme de courbure correspondante est

$$\frac{\mathrm{i}}{2\pi}\Theta(F) = \frac{1}{km}(\omega_k+[E]) + \frac{1}{m}[D] \geqslant \frac{1}{km}\omega_k > 0.$$

De plus φ_F a des singularités algébriques, et en prenant k assez grand il vient

$$\mathcal{I}(\varphi_F) = \mathcal{I}\Big(\frac{1}{km}E + \frac{1}{m}D\Big) = \mathcal{I}\Big(\frac{1}{m}D\Big).$$

En effet, $\mathcal{I}(\varphi_F)$ se calcule en prenant la partie entière d'un $\mathbb{Q}$-diviseur à croisements normaux, obtenu au moyen d'une modification adéquate (comme il a été expliqué à la remarque 15.6). Le diviseur $\frac{1}{km}E + \frac{1}{m}D$ fournit donc la même partie entière que $\frac{1}{m}D$ lorsque k est grand. Le théorème de Nadel implique alors le résultat d'annulation désiré pour tout $q \geqslant 1$. □

§16. Sur la conjecture de Fujita

Etant donné un fibré en droites L ample, une question fondamentale est de déterminer un entier effectif m_0 tel que mL soit très ample pour $m \geqslant m_0$. L'exemple où X est une courbe hyperelliptique de genre g et où $L = \mathcal{O}(p)$ est associé à un des $2g+2$ points de Weierstrass montre que m_0 doit être au moins égal à $2g+1$ (on vérifie par ailleurs assez facilement que $m_0 = 2g+1$ répond toujours à la question pour une courbe). Il en résulte que m_0 doit nécessairement dépendre de la géométrie de X, et ne peut pas dépendre seulement de la dimension de X. Cependant, lorsque mL est remplacé par le fibré en droites “adjoint” K_X+mL, une réponse universelle simple semble pouvoir se dégager.

16.1. Conjecture de Fujita ([Fuj87]). *Si L est un fibré en droites ample sur une variété projective de dimension n, alors*

i) *$K_X+(n+1)L$ est engendré par ses sections globales ;*

ii) *$K_X+(n+2)L$ est très ample.*

Les bornes prédites par la conjecture sont optimales pour $(X,L) = (\mathbb{P}^n, \mathcal{O}(1))$, puisqu'on a alors $K_X = \mathcal{O}(-n-1)$. La conjecture est facile à vérifier dans le cas des courbes (exercice !), et I. Reider [Rei88] a résolu la conjecture par l'affirmative dans le cas $n = 2$. Ein-Lazarsfeld [EL93] et Fujita [Fuj93] sont parvenus à établir la partie i) en dimension 3, et un raffinement très poussé de leur technique a permis à Kawamata [Kaw95] d'atteindre aussi le cas de la dimension 4[1]. Les autres cas de la conjecture, à savoir i) pour $n \geqslant 5$ et ii) pour $n \geqslant 3$, restent pour l'instant non résolus. Le premier pas en direction de la conjecture pour la dimension n quelconque a été réalisé en 1991 (travail paru 2 ans plus tard dans [Dem93]), au moyen d'une méthode analytique reposant sur la résolution d'une équation de Monge-Ampère. D'autres résultats similaires ont été obtenus par Kollár [Kol92] par des méthodes entièrement algébriques ; nous renvoyons à [Laz93] pour un excellent article de synthèse consacré à ces développements, ainsi qu'à [Dem94] pour le versant analytique de la théorie.

Ce paragraphe est consacré à la démonstration de quelques résultats liés à la conjecture de Fujita en dimension arbitraire. Les idées principales mises en jeu ici sont inspirées d'un travail récent de Y.T. Siu [Siu96]. La méthode de Siu, qui est de nature algébrique et relativement élémentaire, consiste à combiner la formule de Riemann-Roch avec le théorème d'annulation de Kawamata-Viehweg (il sera cependant beaucoup plus commode d'utiliser ce théorème dans la formulation de Nadel faisant intervenir le faisceau d'idéaux multiplicateurs). Dans toute la suite, X désigne une variété projective algébrique de dimension n. La première observation utile est la conséquence classique suivante de la formule de Riemann-Roch :

16.2. Cas particulier de la formule de Riemann-Roch. *Soit $\mathcal{J} \subset \mathcal{O}_X$ un faisceau d'idéaux cohérent sur X tel que la variété des zéros $V(\mathcal{J})$ soit de dimension d (avec éventuellement des composantes de dimension plus basse). Soit $Y = \sum \lambda_j Y_j$ le cycle algébrique effectif de dimension d associé aux composantes de dimension d de $V(\mathcal{J})$ (les multiplicités λ_j prennent en compte les multiplicités de l'idéal $\mathcal{J}$ le long de chaque composante). Alors, pour tout fibré en droites E, la caractéristique d'Euler $\chi(X, \mathcal{O}(E + mL) \otimes \mathcal{O}_X/\mathcal{O}(\mathcal{J}))$ est un polynôme $P(m)$ de degré d et de coefficient directeur $L^d \cdot Y/d!$* □

Le deuxième fait utile est un lemme élémentaire concernant les polynômes numériques (polynômes à coefficients rationnels, définissant une application de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}$).

16.3. Lemme. *Soit $P(m)$ un polynôme numérique de degré $d > 0$ et de coefficient directeur $a_d/d!$, $a_d \in \mathbb{Z}$, $a_d > 0$. On suppose que $P(m) \geqslant 0$ pour tout $m \geqslant m_0$. Alors*

a) *Pour tout $N \geqslant 0$, il existe $m \in [m_0, m_0 + Nd]$ tel que $P(m) \geqslant N$.*

b) *Pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe $m \in [m_0, m_0 + kd]$ tel que $P(m) \geqslant a_d k^d/2^{d-1}$.*

c) *Pour tout $N \geqslant 2d^2$, il existe $m \in [m_0, m_0 + N]$ tel que $P(m) \geqslant N$.*

[1] La technique de Fujita [Fuj93] et Kawamata [Kaw95] vient d'être considérablement simplifiée et clarifiée par S. Helmke [Hel96].

Preuve. a) Chacune des N équations $P(m) = 0$, $P(m) = 1$, ..., $P(m) = N - 1$ a au plus d racines, donc il y a nécessiarement un entier $m \in [m_0, m_0 + dN]$ qui n'est pas une racine de ces équations.

b) Grâce à la formule de Newton pour les différences itérées $\Delta P(m) = P(m+1) - P(m)$, nous obtenons

$$\Delta^d P(m) = \sum_{1 \leqslant j \leqslant d} (-1)^j \binom{d}{j} P(m + d - j) = a_d, \qquad \forall m \in \mathbb{Z}.$$

Par suite, si $j \in \{0, 2, 4, \ldots, 2\lfloor d/2 \rfloor\} \subset [0, d]$ est l'entier pair réalisant le maximum de $P(m_0 + d - j)$ sur cet ensemble fini, nous obtenons

$$2^{d-1} P(m_0 + d - j) = \left(\binom{d}{0} + \binom{d}{2} + \cdots\right) P(m_0 + d - j) \geqslant a_d,$$

d'où l'existence d'un entier $m \in [m_0, m_0 + d]$ avec $P(m) \geqslant a_d/2^{d-1}$. Le résultat est donc démontré pour $k = 1$. Dans le cas général, nous appliquons ce résultat particulier au polynôme $Q(m) = P(km - (k-1)m_0)$, dont le coefficient directeur est $a_d k^d / d!$

c) Si $d = 1$, la partie a) donne déjà le résultat. Si $d = 2$, un coup d'oeil à la parabole montre que

$$\max_{m \in [m_0, m_0 + N]} P(m) \geqslant \begin{cases} a_2 N^2/8 & \text{si } N \text{ est pair,} \\ a_2(N^2 - 1)/8 & \text{si } N \text{ est impair}; \end{cases}$$

donc $\max_{m \in [m_0, m_0+N]} P(m) \geqslant N$ chaque fois que $N \geqslant 8$. Si $d \geqslant 3$, nous appliquons b) avec k égal au plus petit entier tel que $k^d/2^{d-1} \geqslant N$, i.e. $k = \lceil 2(N/2)^{1/d} \rceil$, où $\lceil x \rceil \in \mathbb{Z}$ désigne l'entier arrondi par excès. Alors

$$kd \leqslant (2(N/2)^{1/d} + 1)d \leqslant N$$

dès que $N \geqslant 2d^2$, comme on le voit après un bref calcul. $\square$

Nous appliquons maintenant le théorème d'annulation de Nadel d'une manière analogue à celle de Siu [Siu96], avec quelques simplifications dans la technique et quelques améliorations pour les bornes. Notre méthode donne simultanément une preuve simple d'un résultat fondamental classique dû à Fujita.

16.4. Théorème (Fujita). *Si L est un fibré en droites ample sur une variété projective X de dimension n, alors $K_X + (n+1)L$ est nef.*

En utilisant la théorie de Mori et le "*base point free theorem*" ([Mor82], [Kaw84]), on peut montrer en fait que $K_X + (n+1)L$ est semi-ample, c'est-à-dire qu'il existe un entier positif m tel que $m(K_X + (n+1)L)$ soit engendré par ses sections (voir [Kaw85] et [Fuj87]). La preuve repose sur l'observation que $n+1$ est la longueur maximale des rayons extrêmaux de variétés projectives lisses de dimension n. Notre démonstration de (16.4) est différente et s'obtient en même temps que la démonstration du th. (16.5) ci-dessous.

16.5. Théorème. *Soit L un fibré en droites ample et soit G un fibré en droites nef sur une variété projective X de dimension n. On a alors les propriétés suivantes.*

a) *$2K_X + mL + G$ engendre les jets simultanés d'ordre $s_1, \ldots, s_p \in \mathbb{N}$ en des points arbitraires $x_1, \ldots, x_p \in X$, i.e., il existe une application surjective*

$$H^0(X, \mathcal{O}(2K_X + mL + G)) \longrightarrow\!\!\!\!\!\rightarrow \bigoplus_{1 \leqslant j \leqslant p} \mathcal{O}(2K_X + mL + G) \otimes \mathcal{O}_{X,x_j}/\mathfrak{m}_{X,x_j}^{s_j+1},$$

dès que $m \geqslant 2 + \sum_{1 \leqslant j \leqslant p} \binom{3n + 2s_j - 1}{n}$.

En particulier $2K_X + mL + G$ est très ample pour $m \geqslant 2 + \binom{3n+1}{n}$.

b) *$2K_X + (n+1)L + G$ engendre les jets simultanés d'ordre $s_1, \ldots, s_p$ en des points arbitraires $x_1, \ldots, x_p \in X$ dès que les nombres d'intersection $L^d \cdot Y$ de L sur tous les sous-ensembles algébriques Y de X de dimension d sont tels que*

$$L^d \cdot Y > \frac{2^{d-1}}{\lfloor n/d \rfloor^d} \sum_{1 \leqslant j \leqslant p} \binom{3n + 2s_j - 1}{n}.$$

Preuve. Les démonstrations de (16.4) et (16.5 a, b) sont tout à fait parallèles, c'est pourquoi nous les présenterons simultanément (dans le cas de (16.4), on convient simplement que $\{x_1, \ldots, x_p\} = \emptyset$). L'idée est de trouver un entier (ou un rationnel) m_0 et une métrique hermitienne singulière h_0 sur $K_X + m_0 L$ dont le courant de courbure est strictement positif, $\mathrm{i}\Theta_{h_0} \geqslant \varepsilon\omega$, telle que $V(\mathcal{I}(h_0))$ soit de dimension 0 et telle que le poids φ_0 de h_0 satisfasse $\nu(\varphi_0, x_j) \geqslant n + s_j$ pour tout j. Comme L et G sont nefs, 15.18 c) implique que $(m - m_0)L + G$ possède pour tout $m \geqslant m_0$ une métrique h' dont la courbure $\mathrm{i}\Theta_{h'}$ a une partie négative arbitrairement petite, disons $\mathrm{i}\Theta_{h'} \geqslant -\frac{\varepsilon}{2}\omega$. Alors $\mathrm{i}\Theta_{h_0} + \mathrm{i}\Theta_{h'} \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\omega$ est positive définie. Une application du Cor. 15.9 à $F = K_X + mL + G = (K_X + m_0 L) + ((m - m_0)L + G)$ muni de la métrique $h_0 \otimes h'$ garantit l'existence des sections de $K_X + F = 2K_X + mL + G$ réalisant les jets désirés pour $m \geqslant m_0$.

Fixons un plongement $\Phi_{|\mu L|} : X \to \mathbb{P}^N$, $\mu \gg 0$, donné par des sections $\lambda_0, \ldots, \lambda_N \in H^0(X, \mu L)$, et soit h_L la métrique associée sur L, de forme de courbure définie positive $\omega = \Theta(L)$. Pour obtenir la métrique désirée h_0 sur $K_X + m_0 L$, on fixe un entier $a \in \mathbb{N}^\star$ et on utilise une procédé de récurrence double pour construire des métriques singulières $(h_{k,\nu})_{\nu \geqslant 1}$ sur $aK_X + b_k L$, pour une suite décroissante (au sens large) d'entiers positifs $b_1 \geqslant b_2 \geqslant \cdots \geqslant b_k \geqslant \cdots$. Une telle suite est nécessairement stationnaire et m_0 sera précisément la limite stationnaire $m_0 = \lim b_k/a$. Les métriques $h_{k,\nu}$ sont choisies de sorte qu'elles satisfassent les propriétés suivantes :

α) $h_{k,\nu}$ est une métrique “algébrique” de la forme

$$\|\xi\|^2_{h_{k,\nu}} = \frac{|\tau_k(\xi)|^2}{\big(\sum_{1\leqslant i\leqslant\nu,\,0\leqslant j\leqslant N}\big|\tau_k^{(a+1)\mu}(\sigma_i^{a\mu}\cdot\lambda_j^{(a+1)b_k-am_i})\big|^2\big)^{1/(a+1)\mu}},$$

définie par des sections $\sigma_i \in H^0\big(X, \mathcal{O}((a+1)K_X+m_iL)\big)$, $m_i < \frac{a+1}{a}b_k$, $1\leqslant i\leqslant\nu$, où $\xi\mapsto\tau_k(\xi)$ est une trivialisation locale arbitraire de aK_X+b_kL ; notons que $\sigma_i^{a\mu}\cdot\lambda_j^{(a+1)b_k-am_i}$ est une section de

$$a\mu((a+1)K_X+m_iL)+((a+1)b_k-am_i)\mu L = (a+1)\mu(aK_X+b_kL).$$

β) $\mathrm{ord}_{x_j}(\sigma_i)\geqslant(a+1)(n+s_j)$ pour tout i,j ;

γ) $\mathcal{I}(h_{k,\nu+1})\supset\mathcal{I}(h_{k,\nu})$ et $\mathcal{I}(h_{k,\nu+1})\neq\mathcal{I}(h_{k,\nu})$ tant que la variété des zéros $V(\mathcal{I}(h_{k,\nu}))$ est de dimension positive.

Le poids $\varphi_{k,\nu}=\frac{1}{2(a+1)\mu}\log\sum\big|\tau_k^{(a+1)\mu}(\sigma_i^{a\mu}\cdot\lambda_j^{(a+1)b_k-am_i})\big|^2$ de $h_{k,\nu}$ est plurisousharmonique et la condition $m_i<\frac{a+1}{a}b_k$ implique $(a+1)b_k-am_i\geqslant1$, donc la différence $\varphi_{k,\nu}-\frac{1}{2(a+1)\mu}\log\sum|\tau(\lambda_j)|^2$ est aussi plurisousharmonique. Par suite $\frac{\mathrm{i}}{2\pi}\Theta_{h_{k,\nu}}(aK_X+b_kL)=\frac{\mathrm{i}}{\pi}d'd''\varphi_{k,\nu}\geqslant\frac{1}{(a+1)}\omega$. De plus, la condition β) implique clairement $\nu(\varphi_{k,\nu},x_j)\geqslant a(n+s_j)$. Finalement, la condition γ) combinée avec la propriété noethérienne forte des faisceaux cohérents garantit que la suite $(h_{k,\nu})_{\nu\geqslant1}$ va finalement produire un sous-schéma $V(\mathcal{I}(h_{k,\nu}))$ de dimension 0. On convient que la suite $(h_{k,\nu})_{\nu\geqslant1}$ s'arrête à ce point, et on note $h_k=h_{k,\nu}$ la métrique finale ainsi atteinte, telle que $\dim V(\mathcal{I}(h_k))=0$.

Pour $k=1$, il est clair que les métriques désirées $(h_{1,\nu})_{\nu\geqslant1}$ existent si b_1 est choisi assez grand (disons tel que $(a+1)K_X+(b_1-1)L$ engendre les jets d'ordre $(a+1)(n+\max s_j)$ en tout point ; alors les sections $\sigma_1,\ldots,\sigma_\nu$ peuvent être choisie telles que $m_1=\cdots=m_\nu=b_1-1$). Supposons que les métriques $(h_{k,\nu})_{\nu\geqslant1}$ et h_k aient déjà été construites et procédons à la construction de $(h_{k+1,\nu})_{\nu\geqslant1}$. On utilise de nouveau une récurrence sur ν, en supposant que $h_{k+1,\nu}$ est déjà construite et que $\dim V(\mathcal{I}(h_{k+1,\nu}))>0$. Nous commencerons en fait la récurrence par $\nu=0$, et convenons dans ce cas que $\mathcal{I}(h_{k+1,0})=0$ (ceci correspondrait à une métrique infinie de poids identiquement égal à $-\infty$). Grâce au théorème d'annulation de Nadel appliqué à $F_m=aK_X+mL=(aK_X+b_kL)+(m-b_k)L$ pour la métrique $h_k\otimes(h_L)^{\otimes m-b_k}$, nous obtenons

$$H^q(X,\mathcal{O}((a+1)K_X+mL)\otimes\mathcal{I}(h_k))=0\qquad\text{pour } q\geqslant1,\ m\geqslant b_k.$$

Comme $V(\mathcal{I}(h_k))$ est de dimension 0, le faisceau $\mathcal{O}_X/\mathcal{I}(h_k)$ est un faisceau gratte-ciel, et la suite exacte $0\to\mathcal{I}(h_k)\to\mathcal{O}_X\to\mathcal{O}_X/\mathcal{I}(h_k)\to0$ tordue par le faisceau inversible $\mathcal{O}((a+1)K_X+mL)$ montre que

$$H^q(X,\mathcal{O}((a+1)K_X+mL))=0\qquad\text{pour } q\geqslant1,\ m\geqslant b_k.$$

De manière analogue, nous trouvons

$$H^q(X, \mathcal{O}((a+1)K_X + mL) \otimes \mathcal{I}(h_{k+1,\nu})) = 0 \qquad \text{pour } q \geqslant 1,\ m \geqslant b_{k+1}$$

(c'est aussi vrai pour $\nu = 0$, puisque $\mathcal{I}(h_{k+1,0}) = 0$), et lorsque

$$m \geqslant \max(b_k, b_{k+1}) = b_k,$$

la suite exacte $0 \to \mathcal{I}(h_{k+1,\nu}) \to \mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_X/\mathcal{I}(h_{k+1}, \nu) \to 0$ implique

$$H^q(X, \mathcal{O}((a+1)K_X + mL) \otimes \mathcal{O}_X/\mathcal{I}(h_{k+1,\nu})) = 0 \qquad \text{pour } q \geqslant 1,\ m \geqslant b_k.$$

En particulier, puisque le groupe H^1 ci-dessus s'annule, toute section u' de $(a+1)K_X + mL$ sur le sous-schéma $V(\mathcal{I}(h_{k+1,\nu}))$ possède une extension u à X. Fixons une base $u'_1, \ldots, u'_N$ des sections de ce faisceau sur $V(\mathcal{I}(h_{k+1,\nu}))$ et prenons des extensions arbitraires $u_1, \ldots, u_N$ à X. Considérons l'application linéaire attribuant à chaque section u sur X la collection des jets d'ordre $(a+1)(n+s_j)-1$ aux points x_j, soit

$$u = \sum_{1 \leqslant j \leqslant N} a_j u_j \longmapsto \bigoplus J_{x_j}^{(a+1)(n+s_j)-1}(u).$$

Puisque le rang du fibré des s-jets est $\binom{n+s}{n}$, l'espace cible est de dimension

$$\delta = \sum_{1 \leqslant j \leqslant p} \binom{n + (a+1)(n+s_j) - 1}{n}.$$

Pour obtenir une section $\sigma_{\nu+1} = u$ satisfaisant la condition β) et ayant une restriction non triviale $\sigma'_{\nu+1}$ à $V(\mathcal{I}(h_{k+1,\nu}))$, nous avons besoin d'au moins $N = \delta + 1$ sections indépendantes $u'_1, \ldots, u'_N$. Cette condition va être réalisée en appliquant le lemme (16.3) au polynôme numérique

$$\begin{aligned} P(m) &= \chi(X, \mathcal{O}((a+1)K_X + mL) \otimes \mathcal{O}_X/\mathcal{I}(h_{k+1,\nu})) \\ &= h^0(X, \mathcal{O}((a+1)K_X + mL) \otimes \mathcal{O}_X/\mathcal{I}(h_{k+1,\nu})) \geqslant 0, \qquad m \geqslant b_k. \end{aligned}$$

Le polynôme P est de degré $d = \dim V(\mathcal{I}(h_{k+1,\nu})) > 0$. Nous obtenons donc l'existence d'un entier $m \in [b_k, b_k + \eta]$ tel que $N = P(m) \geqslant \delta + 1$, pour un certain entier explicite $\eta \in \mathbb{N}$ (par exemple $\eta = n(\delta+1)$ convient toujours d'après (16.3 a), mais il sera également important d'utiliser les autres possibilités pour optimiser les choix). Nous trouvons alors une section $\sigma_{\nu+1} \in H^0(X, (a+1)K_X + mL)$ ayant une restriction non triviale $\sigma'_{\nu+1}$ à $V(\mathcal{I}(h_{k+1,\nu}))$, s'annulant à un ordre $\geqslant (a+1)(n+s_j)$ en chaque point x_j. On pose alors $m_{\nu+1} = m$, et la condition $m_{\nu+1} < \frac{a+1}{a} b_{k+1}$ est réalisée si $b_k + \eta < \frac{a+1}{a} b_{k+1}$. Ceci montre qu'on peut choisir par récurrence

$$b_{k+1} = \left\lfloor \frac{a}{a+1}(b_k + \eta) \right\rfloor + 1.$$

Par définition, $h_{k+1,\nu+1} \leqslant h_{k+1,\nu}$, donc $\mathcal{I}(h_{k+1,\nu+1}) \supset \mathcal{I}(h_{k+1,\nu})$. On a nécessairement $\mathcal{I}(h_{k+1,\nu+1}) \neq \mathcal{I}(h_{k+1,\nu})$, car $\mathcal{I}(h_{k+1,\nu+1})$ contient le faisceau d'idéaux associé au diviseur des zéros de $\sigma_{\nu+1}$, alors que $\sigma_{\nu+1}$ ne s'annule pas identiquement sur $V(\mathcal{I}(h_{k+1,\nu}))$. Maintenant, un calcul facile montre que la suite itérée $b_{k+1} = \lfloor \frac{a}{a+1}(b_k+\eta)\rfloor + 1$ stationne à la valeur limite $b_k = a(\eta+1)+1$, pour toute valeur initiale b_1 supérieure à cette limite. De cette manière, on obtient une métrique h_∞ à courbure définie positive sur $aK_X + (a(\eta+1)+1)L$, telle que $\dim V(\mathcal{I}(h_\infty)) = 0$ et $\nu(\varphi_\infty, x_j) \geqslant a(n+s_j)$ en chaque point x_j.

Preuve de (16.4). Dans ce cas, l'ensemble $\{x_j\}$ est pris égal à l'ensemble vide, donc $\delta = 0$. Grâce à (16.3 a), la condition $P(m) \geqslant 1$ est réalisée pour au moins un entier $m \in [b_k, b_k+n]$, donc on peut prendre $\eta = n$. Comme μL est très ample, μL possède une métrique ayant un pôle logarithmique isolé de nombre de Lelong 1 en tout point x_0 donné (par exemple, la métrique algébrique définie par les sections de μL s'annulant en x_0). Donc

$$F'_a = aK_X + (a(n+1)+1)L + n\mu L$$

possède une métrique h'_a tel que $V(\mathcal{I}(h'_a))$ soit de dimension zéro et contienne $\{x_0\}$. Grâce au Cor. (15.9), on conclut que

$$K_X + F'_a = (a+1)K_X + (a(n+1)+1+n\mu)L$$

est engendré par ses sections, en particulier $K_X + \frac{a(n+1)+1+n\mu}{a+1}L$ est nef. Lorsque a tend vers $+\infty$, on en déduit que $K_X + (n+1)L$ est nef. □

Preuve de (16.5 a). Il suffit ici de choisir $a = 1$. Alors

$$\delta = \sum_{1\leqslant j\leqslant p} \binom{3n+2s_j-1}{n}.$$

Si $\{x_j\} \neq \emptyset$, on a $\delta + 1 \geqslant \binom{3n-1}{n} + 1 \geqslant 2n^2$ pour $n \geqslant 2$. Le lemme (16.3 c) montre que $P(m) \geqslant \delta + 1$ pour au moins un $m \in [b_k, b_k+\eta]$ avec $\eta = \delta + 1$. On peut commencer la procédure de récurrence $k \mapsto k+1$ avec $b_1 = \eta + 1 = \delta + 2$, parce que la seule propriété nécessaire pour l'étape de récurrence est la propriété d'annulation

$$H^q(X, 2K_X + mL) = 0 \qquad \text{pour } q \geqslant 1,\ m \geqslant b_1,$$

qui est réalisée d'après le théorème d'annulation de Kodaira et la propriété d'amplitude de $K_X + b_1L$ (on utilise ici le résultat de Fujita (16.4), en observant que $b_1 > n+1$). La formule récursive $b_{k+1} = \lfloor \frac{1}{2}(b_k+\eta)\rfloor + 1$ donne alors $b_k = \eta+1 = \delta+2$ pour tout k, et (16.5 a) s'ensuit. □

Preuve de (16.5 b). Tout à fait similaire à (16.5 a), sauf que nous choisissons $\eta = n$, $a = 1$ et $b_k = n+1$ pour tout k. Grâce au lemme (16.3 b), nous avons $P(m) \geqslant a_d k^d/2^{d-1}$ pour au moins un entier $m \in [m_0, m_0+kd]$, où

$a_d > 0$ est le coefficient de plus haut degré de P. Grâce au lemme (16.2), on a $a_d \geqslant \inf_{\dim Y=d} L^d \cdot Y$. Prenons $k = \lfloor n/d \rfloor$. La condition $P(m) \geqslant \delta + 1$ peut alors être réalisée pour un entier $m \in [m_0, m_0 + kd] \subset [m_0, m_0 + n]$, pourvu que

$$\inf_{\dim Y=d} L^d \cdot Y \ \lfloor n/d \rfloor^d / 2^{d-1} > \delta,$$

ce qui est équivalent à la condition donnée en (16.5 b). □

L'inconvénient de la technique décrite plus haut est qu'on doit nécessairement faire intervenir des multiples de L pour éviter les zéros du polynôme de Hilbert, en particulier il n'est pas possible d'obtenir directement un critère de grande amplitude pour $2K_X + L$ dans l'énoncé de (16.5 b). Un tel critère peut néanmoins être obtenu à l'aide du lemme élémentaire suivant.

16.6. Lemme. *Supposons qu'il existe un entier $\mu \in \mathbb{N}^\star$ tel que μF engendre simultanément tous les jets d'ordre $\mu(n + s_j) + 1$ en tout point x_j d'un sous-ensemble $\{x_1, \ldots, x_p\} \subset X$. Alors $K_X + F$ engendre simultanément tous les jets d'ordre s_j aux points x_j.*

Preuve. Choisissons la métrique algébrique sur F définie par une base $\sigma_1, \ldots, \sigma_N$ de l'espace des sections de μF qui s'annuler à l'ordre $\mu(n + s_j) + 1$ en tout point x_j. Puisque nous sommes encore libres de choisir le terme homogène de degré $\mu(n+s_j)+1$ dans le développement de Taylor de ces sections aux points x_j, nous voyons que $x_1, \ldots, x_p$ sont des zéros isolés de $\bigcap \sigma_j^{-1}(0)$. Si φ est le poids de la métrique de F près de x_j, nous avons donc $\varphi(z) \sim (n + s_j + \frac{1}{\mu}) \log |z - x_j|$ dans des coordonnées convenables. Remplaçons φ au voisinage de x_j par

$$\varphi'(z) = \max\big(\varphi(z)\,,\, |z|^2 - C + (n + s_j) \log |z - x_j|\big)$$

et laissons φ inchangée partout ailleurs (c'est possible en prenant $C > 0$ suffisamment grand). Alors $\varphi'(z) = |z|^2 - C + (n + s_j) \log |z - x_j|$ au voisinage de x_j, en particulier φ' est strictement plurisousharmonique près de x_j. De cette manière, nous obtenons une métrique h' sur F à courbure semi-positive partout sur X, et à courbure définie positive sur un voisinage de $\{x_1, \ldots, x_p\}$. La conclusion résulte alors d'une application directe des estimations L^2 (14.2). □

16.7. Théorème. *Soient X une variété projective de dimension n et L un fibré en droites ample sur X. Alors $2K_X + L$ engendre simultanément les jets d'ordre $s_1, \ldots, s_p$ en des points arbitraires $x_1, \ldots, x_p \in X$ dès que les nombres d'intersection $L^d \cdot Y$ de L sur tous les sous-ensembles algébriques $Y \subset X$ de dimension d sont tels que*

$$L^d \cdot Y > \frac{2^{d-1}}{\lfloor n/d \rfloor^d} \sum_{1 \leqslant j \leqslant p} \binom{(n+1)(4n + 2s_j + 1) - 2}{n}, \qquad 1 \leqslant d \leqslant n.$$

Preuve. Le lemme (16.6) appliqué avec $F = K_X + L$ et $\mu = n + 1$ montre que la propriété désirée pour les jets de $2K_X + L$ a lieu si $(n+1)(K_X + L)$ engendre les jets d'ordre $(n+1)(n+s_j)+1$ aux points x_j. Le lemme (16.6) appliqué de nouveau avec $F = pK_X + (n+1)L$ et $\mu = 1$ montre par récurrence descendante sur p qu'il suffit que F engendre tous les jets d'ordre $(n+1)(n+s_j)+1+(n+1-p)(n+1)$ aux points x_j. En particulier, pour $2K_X + (n+1)L$ il suffit d'obtenir tous les jets d'ordre $(n+1)(2n+s_j-1)+1$. Le th. (16.5 b) donne alors la condition désirée. $\square$

Mentionnons pour terminer quelques conséquences immédiates du th. 16.5, obtenues en prenant $L = \pm K_X$.

16.8. Corollaire. *Soit X une variété projective de type général, avec K_X ample et $\dim X = n$. Alors mK_X est très ample pour $m \geqslant m_0 = \binom{3n+1}{n} + 4$.*

16.9. Corollaire. *Soit X une variété de Fano (c'est-à-dire une variété projective telle que $-K_X$ soit ample), de dimension n. Alors $-mK_X$ est très ample pour $m \geqslant m_0 = \binom{3n+1}{n}$.*

§17. Une version effective du grand théorème de Matsusaka

Nous abordons ici le problème de trouver un entier explicite m_0 tel que mL soit très ample pour $m \geqslant m_0$. L'existence d'une telle borne m_0 ne dépendant que de la dimension et des coefficients du polynôme de Hilbert de L a été démontrée dans un premier temps par Matsusaka [Mat72], puis Kollár et Matsusaka [KoM83] ont montré qu'on pouvait trouvait trouver une borne $m_0 = m_0(n, L^n, K_X \cdot L^{n-1})$ dépendant seulement de $n = \dim X$ et des deux premiers coefficients. Récemment, Siu [Siu93] a obtenu une version effective du même résultat fournissant une borne explicite m_0 "raisonnable" (bien que cette borne soit malheureusement encore loin d'être optimale). Nous nous proposons ici d'expliquer la méthode de Siu, à partir des simplifications et améliorations suggérées dans [Dem96]. Le point de départ est le lemme suivant.

17.1. Lemme. *Soient F et G des fibrés en droites nefs sur X. Si $F^n > n\,F^{n-1} \cdot G$, tout multiple positif $k(F-G)$ admet une section non triviale pour $k \geqslant k_0$ assez grand.*

Preuve. Le lemme peut se démontrer comme cas particulier des inégalités de Morse holomorphes (voir [Dem85], [Tra95], [Siu93], [Ang95]). Nous en donnons ici une preuve simple, suivant une suggestion de F. Catanese. On peut supposer que F et G sont très amples (sinon, il suffit de remplacer F et G par $F' = pF + A$ et $G' = pG + A$ avec A très ample et suffisamment positif pour entraîner la grande amplitude de toute somme avec un fibré nef, puis de choisir $p > 0$ assez grand pour que F' et G' satisfassent la même hypothèse numérique que F et G). Alors $\mathcal{O}(k(F-G)) \simeq \mathcal{O}(kF - G_1 - \cdots - G_k)$ pour des éléments arbitraires $G_1, \ldots, G_k$ du système linéaire $|G|$. Si on choisit de tels éléments G_j en position générale, le lemme résulte de la formule de Riemann-Roch appliquée au morphisme de restriction $H^0(X, \mathcal{O}(kF)) \to \bigoplus H^0(G_j, \mathcal{O}(kF_{\restriction G_j}))$. $\square$

17.2. Corollaire. *Soient F et G des fibrés en droites nefs sur X. Si F est gros et si $m > n\,F^{n-1} \cdot G / F^n$, alors $\mathcal{O}(mF - G)$ peut être muni d'une métrique hermitienne*

h (peut être singulière), ayant une forme courbure définie positive, i.e. telle que $\Theta_h(mF - G) \geqslant \varepsilon\omega$, $\varepsilon > 0$, pour une métrique kählérienne ω.

Preuve. En fait, si A est ample et $\varepsilon \in \mathbb{Q}_+$ est assez petit, le lemme (17.1) implique qu'un certain multiple $k(mF - G - \varepsilon A)$ admet une section. Soit E le diviseur de cette section et soit $\omega = \Theta(A) \in c_1(A)$ une métrique kählérienne représentant la forme de courbure de A. Alors $mF - G \equiv \varepsilon A + \frac{1}{k}E$ peut être muni d'une métrique singulière h de forme de courbure $\Theta_h(mF - G) = \varepsilon\Theta(A) + \frac{1}{k}[E] \geqslant \varepsilon\omega$. □

Nous considérons maintenant le problème d'obtenir une section non triviale de mL. L'idée de [Siu93] est d'obtenir plus généralement un critère pour l'amplitude de $mL - B$ quand B est nef. De cette manière, on pourra soustraire de mL tout multiple non désiré de K_X qui se trouverait sinon ajouté à L par application du théorème d'annulation de Nadel (pour cela, on remplace simplement B par B plus un multiple de $K_X + (n+1)L$).

17.3. Proposition. *Soit L un fibré en droite ample sur une variété X projective de dimension n, et soit B un fibré en droites nef sur X. Alors $K_X + mL - B$ admet une section non nulle pour un entier m tel que*

$$m \leqslant n\,\frac{L^{n-1}\cdot B}{L^n} + n + 1.$$

Preuve. Soit m_0 le plus petit entier $> n\,\frac{L^{n-1}\cdot B}{L^n}$. Alors $m_0L - B$ peut être équipé d'une métrique hermitienne singulière h de courbure définie positive. Grâce au théorème d'annulation de Nadel, on obtient

$$H^q(X, \mathcal{O}(K_X + mL - B) \otimes \mathcal{I}(h)) = 0 \qquad \text{for } q \geqslant 1,$$

donc $P(m) = h^0(X, \mathcal{O}(K_X + mL - B) \otimes \mathcal{I}(h))$ est un polynôme pour $m \geqslant m_0$. Puisque P est un polynôme de degré n qui n'est pas identiquement nul, il existe un entier $m \in [m_0, m_0 + n]$ qui n'en est pas racine. Donc il existe une section non triviale de

$$H^0(X, \mathcal{O}(K_X + mL - B)) \supset H^0(X, \mathcal{O}(K_X + mL - B) \otimes \mathcal{I}(h))$$

pour un certain $m \in [m_0, m_0 + n]$, comme annoncé. □

17.4. Corollaire. *Si L est ample et B est nef, $mL - B$ possède une section non nulle pour au moins un entier*

$$m \leqslant n\Big(\frac{L^{n-1}\cdot B + L^{n-1}\cdot K_X}{L^n} + n + 1\Big).$$

Preuve. D'après le résultat de Fujita (16.4), $K_X + (n+1)L$ est nef. Nous pouvons donc remplacer B par $B + K_X + (n+1)L$ dans le résultat de la prop. (17.3). Le corollaire (17.4) s'ensuit. □

17.5. Remarque. Nous ne savons pas si la borne obtenue dans le corollaire ci-dessus est optimale, mais elle n'est certainement pas très loin de l'être. En effet, même pour $B = 0$, le facteur multiplicatif n ne peut être remplacée par un nombre plus petit que $n/2$: pour le voir, prenons par exemple pour X un produit $C_1 \times \cdots \times C_n$ de courbes C_j de genre g_j assez grand, et $L = \mathcal{O}(a_1[p_1]) \otimes \cdots \otimes \mathcal{O}(a_n[p_n])$, $B = 0$. Notre condition suffisante pour que $|mL| \neq \emptyset$ devient dans ce cas $m \leqslant \sum(2g_j - 2)/a_j + n(n+1)$, tandis que pour un choix générique des p_j le fibré mL n'admet de sections que si $ma_j \geqslant g_j$ pour tout j. L'imprécision de notre inégalité joue donc au plus sur un facteur multiplicatif 2 quand $a_1 = \cdots = a_n = 1$ et $g_1 \gg g_2 \gg \cdots \gg g_n \to +\infty$. D'autre part, la constante additive $n+1$ est déjà la meilleure possible lorsque $B = 0$ et $X = \mathbb{P}^n$. □

Jusqu'à ce point, la méthode n'était pas réellement sensible à la présence de singularités (le lemme (17.1) est encore vrai dans le cas singulier comme on le voit aisément en utilisant une désingularisation de X). De même, comme on l'a observé à la remarque (15.16), le théorème d'annulation de Nadel reste encore essentiellement valable. La prop. (17.3) peut alors être généralisée comme suit :

17.6. Proposition. *Soit L un fibré en droites ample sur une variété X projective de dimension n, et soit B un fibré en droites nef sur X. Pour tout sous-variété algébrique (réduite) Y de X de dimension p, il existe un entier*

$$m \leqslant p\frac{L^{p-1} \cdot B \cdot Y}{L^p \cdot Y} + p + 1$$

tel que le faisceau $\omega_Y \otimes \mathcal{O}_Y(mL - B)$ ait une section non nulle. □

Grâce à un procédé de récurrence adéquat reposant sur les résultats ci-dessus, nous pouvons maintenant améliorer la borne effective obtenue par Siu [Siu93] pour le grand théorème de Matsusaka. Notre énoncé dépendra du choix d'une constante λ_n telle que $m(K_X + (n+2)L) + G$ est très ample pour $m \geqslant \lambda_n$ et tout fibré en droites nef G. La méthode de preuve du théorème (16.5) donne assez aisément que $\lambda_n \leqslant \binom{3n+1}{n} - 2n$ (un argument plus élaboré mettant en jeu les résultats récents de Angehrn-Siu [AS94] permet en fait de voir que $\lambda_n \leqslant n^3 - n^2 - n - 1$ pour $n \geqslant 2$). Bien entendu, on s'attend à ce que $\lambda_n = 1$ pour tout n, si on veut bien croire à la conjecture de Fujita.

17.7. Version effective du grand théorème de Matsusaka. *Soient L et B des fibrés en droites nefs sur une variété X projective de dimension n. Supposons que L soit ample et soit $H = \lambda_n(K_X + (n+2)L)$. Alors $mL - B$ est très ample pour*

$$m \geqslant (2n)^{(3^{n-1}-1)/2} \frac{(L^{n-1} \cdot (B+H))^{(3^{n-1}+1)/2} (L^{n-1} \cdot H)^{3^{n-2}(n/2-3/4)-1/4}}{(L^n)^{3^{n-2}(n/2-1/4)+1/4}}.$$

En particulier mL est très ample pour

$$m \geqslant C_n \; (L^n)^{3^{n-2}} \left(n + 2 + \frac{L^{n-1} \cdot K_X}{L^n}\right)^{3^{n-2}(n/2+3/4)+1/4}$$

avec $C_n = (2n)^{(3^{n-1}-1)/2}(\lambda_n)^{3^{n-2}(n/2+3/4)+1/4}$.

Preuve. Nous utilisons le th. (3.1) et la prop. (17.6) pour construire par récurrence une suite de sous-variétés algébriques (non nécessairement irréductibles) $X = Y_n \supset Y_{n-1} \supset \cdots \supset Y_2 \supset Y_1$ telle que $Y_p = \bigcup_j Y_{p,j}$ est de dimension p, Y_{p-1} étant obtenu pour chaque $p \geqslant 2$ comme la réunion des ensembles de zéros des sections

$$\sigma_{p,j} \in H^0(Y_{p,j}, \mathcal{O}_{Y_{p,j}}(m_{p,j}L - B))$$

pour des entiers convenables $m_{p,j} \geqslant 1$. Nous procédons par récurrence sur les valeurs décroissantes de la dimension p, et cherchons à obtenir à chaque pas une borne supérieure m_p pour les entiers $m_{p,j}$.

Grâce au Cor. (17.4), on peut trouver un entier m_n tel que que $m_nL - B$ admettte une section σ_n non triviale pour

$$m_n \leqslant n\,\frac{L^{n-1}\cdot(B + K_X + (n+1)L)}{L^n} \leqslant n\,\frac{L^{n-1}\cdot(B+H)}{L^n}.$$

Maintenant supposons que les sections σ_n, …, $\sigma_{p+1,j}$ aient déjà été construites. On obtient alors par récurrence un p-cycle $\widetilde{Y}_p = \sum \mu_{p,j}Y_{p,j}$ défini par $\widetilde{Y}_p =$ somme des diviseurs des zéros des sections $\sigma_{p+1,j}$ sur les composantes $\widetilde{Y}_{p+1,j}$, où la multiplicité $\mu_{p,j}$ de $Y_{p,j} \subset Y_{p+1,k}$ est obtenue en multipliant la multiplicité correspondante $\mu_{p+1,k}$ par l'ordre d'annulation de $\sigma_{p+1,k}$ le long de $Y_{p,j}$. On obtient l'égalité de classes de cohomologie

$$\widetilde{Y}_p \equiv \sum (m_{p+1,k}L - B)\cdot(\mu_{p+1,k}Y_{p+1,k}) \leqslant m_{p+1}L\cdot\widetilde{Y}_{p+1}.$$

Par récurrence, nous obtenons alors l'inégalité numérique

$$\widetilde{Y}_p \leqslant m_{p+1}\cdots m_n L^{n-p}.$$

Maintenant, pour chaque composante $Y_{p,j}$, la prop. (17.6) montre qu'il existe une section de $\omega_{Y_{p,j}} \otimes \mathcal{O}_{Y_{p,j}}(m_{p,j}L - B)$ pour un certain entier

$$m_{p,j} \leqslant p\frac{L^{p-1}\cdot B\cdot Y_{p,j}}{L^p\cdot Y_{p,j}} + p + 1 \leqslant p m_{p+1}\cdots m_n\, L^{n-1}\cdot B + p + 1.$$

Nous avons utilisé ici la minoration évidente $L^{p-1}\cdot Y_{p,j} \geqslant 1$ (cette minoration est d'ailleurs sans doute un des points faibles de la méthode…). Le degré de $Y_{p,j}$ par rapport à H admet la majoration

$$\delta_{p,j} := H^p\cdot Y_{p,j} \leqslant m_{p+1}\cdots m_n H^p\cdot L^{n-p}.$$

L'inégalité de concavité de Hovanski-Teissier donne

$$(L^{n-p}\cdot H^p)^{\frac{1}{p}}(L^n)^{1-\frac{1}{p}} \leqslant L^{n-1}\cdot H$$

([Hov79], [Tei79, 82], voir aussi [Dem93]), ce qui permet d'exprimer nos bornes en termes des seuls nombres d'intersection L^n et $L^{n-1} \cdot H$. On obtient alors

$$\delta_{p,j} \leqslant m_{p+1} \cdots m_n \frac{(L^{n-1} \cdot H)^p}{(L^n)^{p-1}}.$$

Nous avons besoin du lemme suivant, qui sera démontré ultérieurement.

17.8. Lemme. *Soit H un fibré en droites très ample sur une variété algébrique projective X, et soit $Y \subset X$ une sous-variété algébrique irréductible de dimension p. Si $\delta = H^p \cdot Y$ est le degré de Y par rapport à H, le faisceau $\mathcal{H}om\big(\omega_Y, \mathcal{O}_Y((\delta - p - 2)H)\big)$ possède une section non triviale.*

Grâce au lemme (17.8), il existe une section non triviale de

$$\mathcal{H}om\big(\omega_{Y_{p,j}}, \mathcal{O}_{Y_{p,j}}((\delta_{p,j} - p - 2)H)\big).$$

En combinant cette section avec la section de $\omega_{Y_{p,j}} \otimes \mathcal{O}_{Y_{p,j}}(m_{p,j}L - B)$ déjà construite, nous obtenons une section de $\mathcal{O}_{Y_{p,j}}(m_{p,j}L - B + (\delta_{p,j} - p - 2)H)$ sur $Y_{p,j}$. On ne veut pas que H apparaisse à ce niveau, c'est pourquoi on va remplacer B par $B + (\delta_{p,j} - p - 2)H$. On obtient alors une section $\sigma_{p,j}$ de $\mathcal{O}_{Y_{p,j}}(m_{p,j}L - B)$ pour un certain entier $m_{p,j}$ tel que

$$\begin{aligned} m_{p,j} &\leqslant pm_{p+1} \cdots m_n\, L^{n-1} \cdot (B + (\delta_{p,j} - p - 2)H) + p + 1 \\ &\leqslant p\, m_{p+1} \cdots m_n\, \delta_{p,j}\, L^{n-1} \cdot (B + H) \\ &\leqslant p\,(m_{p+1} \cdots m_n)^2 \frac{(L^{n-1} \cdot H)^p}{(L^n)^{p-1}}\, L^{n-1} \cdot (B + H). \end{aligned}$$

Par conséquent, en posant $M = n\, L^{n-1} \cdot (B + H)$, on obtient la relation de récurrence descendante

$$m_p \leqslant M\, \frac{(L^{n-1} \cdot H)^p}{(L^n)^{p-1}}\, (m_{p+1} \cdots m_n)^2 \qquad \text{pour } 2 \leqslant p \leqslant n-1,$$

partant de la valeur initiale $m_n \leqslant M/L^n$. Soient $(\overline{m}_p)$ la suite des nombre obtenus par cette formule de récurrence en remplaçant les inégalités par des égalités. Il vient $m_p \leqslant \overline{m}_p$ avec $\overline{m}_{n-1} = M^3(L^{n-1} \cdot H)^{n-1}/(L^n)^n$ et

$$\overline{m}_p = \frac{L^n}{L^{n-1} \cdot H}\, \overline{m}_{p+1}^2 \overline{m}_{p+1}$$

pour $2 \leqslant p \leqslant n-2$. On trouve alors par récurrence

$$m_p \leqslant \overline{m}_p = M^{3^{n-p}} \frac{(L^{n-1} \cdot H)^{3^{n-p-1}(n-3/2)+1/2}}{(L^n)^{3^{n-p-1}(n-1/2)+1/2}}.$$

Montrons maintenant que $m_0 L - B$ est nef pour

$$m_0 = \max\big(m_2\,,\, m_3,\, \ldots\,, m_n\,,\, m_2\cdots m_n\, L^{n-1}\cdot B\big).$$

En effet, soit $C \subset X$ une courbe irréductible arbitraire. Ou bien $C = Y_{1,j}$ pour un certain j, ou bien il existe un entier $p = 2, \ldots, n$ tel que C soit contenu dans $Y_p \smallsetminus Y_{p-1}$. Si $C \subset Y_{p,j} \smallsetminus Y_{p-1}$, alors $\sigma_{p,j}$ ne s'annule pas identiquement sur C. Donc $(m_{p,j}L - B)_{\restriction C}$ est de degré positif ou nul et

$$(m_0 L - B)\cdot C \geqslant (m_{p,j}L - B)\cdot C \geqslant 0.$$

D'autre part, si $C = Y_{1,j}$, alors

$$(m_0 L - B)\cdot C \geqslant m_0 - B\cdot \widetilde{Y}_1 \geqslant m_0 - m_2\cdots m_n\, L^{n-1}\cdot B \geqslant 0.$$

D'après la définition de λ_n (et la preuve qu'une telle constante existe, cf. Th. 16.5), $H + G$ est très ample pour tout fibré en droites nef G, en particulier $H + m_0 L - B$ est très ample. On remplace de nouveau B par $B + H$. Cette substitution a pour effet de remplacer M par la nouvelle constante $M = n\big(L^{n-1}\cdot(B + 2H)\big)$ et m_0 par

$$m_0 = \max\big(m_n\,,\, m_{n-1},\, \ldots\,, m_2\,,\, m_2\cdots m_n\, L^{n-1}\cdot(B+H)\big).$$

Le dernier terme étant le plus grand, l'estimation de $\overline{m}_p$ implique

$$\begin{aligned} m_0 &\leqslant M^{(3^{n-1}-1)/2}\,\frac{(L^{n-1}\cdot H)^{(3^{n-2}-1)(n-3/2)/2+(n-2)/2}(L^{n-1}\cdot(B+H))}{(L^n)^{(3^{n-2}-1)(n-1/2)/2+(n-2)/2+1}}\\ &\leqslant (2n)^{(3^{n-1}-1)/2}\,\frac{(L^{n-1}\cdot(B+H))^{(3^{n-1}+1)/2}(L^{n-1}\cdot H)^{3^{n-2}(n/2-3/4)-1/4}}{(L^n)^{3^{n-2}(n/2-1/4)+1/4}} \end{aligned}$$

□

Preuve du lemme (17.8). Soit $X \subset \mathbb{P}^N$ le plongement donné par H, de sorte que $H = \mathcal{O}_X(1)$. Il existe une projection linéaire $\mathbb{P}^n \dashrightarrow \mathbb{P}^{p+1}$ dont la restriction $\pi : Y \to \mathbb{P}^{p+1}$ à Y est un morphisme fini et birationnel de Y sur une hypersurface algébrique Y' de degré δ dans $\mathbb{P}^{p+1}$. Soit $s \in H^0(\mathbb{P}^{p+1}, \mathcal{O}(\delta))$ le polynôme de degré δ définissant Y'. Nous affirmons que pour tout petit ouvert de Stein $W \subset \mathbb{P}^{p+1}$ et toute p-forme holomorphe L^2 u sur $Y' \cap W$, il existe une $(p+1)$-forme holomorphe L^2 $\widetilde{u}$ sur W, à valeurs dans $\mathcal{O}(\delta)$, telle que $\widetilde{u}_{\restriction Y'\cap W} = u \wedge ds$. En fait, c'est précisément lae conclusion du théorème d'extension L^2 d'Ohsawa-Takegoshi [OT87], [Ohs88] (voir aussi [Man93] pour une version plus générale de ce résultat) ; on peut également invoquer des arguments standards d'algèbre locale (voir Hartshorne [Har77], th. III-7.11). Comme $K_{\mathbb{P}^{p+1}} = \mathcal{O}(-p-2)$, la forme $\widetilde{u}$ peut être considérée comme une section de $\mathcal{O}(\delta-p-2)$ sur W, par suite le morphisme de faisceaux $u \mapsto u \wedge ds$ s'étend en une section globale de $\mathcal{H}om\big(\omega_{Y'}, \mathcal{O}_{Y'}(\delta - p - 2)\big)$. L'image inverse par $\pi^\star$ fournit une section de $\mathcal{H}om\big(\pi^\star\omega_{Y'}, \mathcal{O}_Y((\delta - p - 2)H)\big)$.

Puisque π est fini et génériquement 1 : 1, il est facile de voir que $\pi^\star\omega_{Y'} = \omega_Y$. Le lemme s'ensuit. □

17.9. Remarque. Dans le cas des surfaces ($n = 2$), on peut prendre $\lambda_n = 1$ d'après le résultat de I. Reider [Rei88], et les arguments développés ci-dessus donnent mL très ample pour

$$m \geqslant 4\,\frac{(L\cdot(K_X+4L))^2}{L^2}.$$

Si on reprend en détail la démonstration avec plus de soin, on peut voir que le facteur multiplicatif 4 peut être remplacé par 2. En fait, Fernández del Busto a montré récemment que mL est très ample pour

$$m > \frac{1}{2}\left[\frac{(L\cdot(K_X+4L)+1)^2}{L^2}+3\right],$$

et un exemple de G. Xiao montre que cette borne est essentiellement optimale (voir [FdB94]).

Le grand théorème de Matsusaka entraîne un certain nombre d'autres résultats importants de finitude. Un des prototypes de ces résultats est l'énoncé suivant.

17.10. Corollaire. *Il existe seulement un nombre fini de familles de déformations de variétés projectives polarisées (X, L) de dimension n, où L est un fibré en droites ample dont les nombres d'intersection L^n et $K_X\cdot L^{n-1}$ sont fixés.*

Preuve. En effet, comme L^n et $K_X\cdot L^{n-1}$ sont fixés, il existe un entier m_0 effectivement calculable tel que m_0L soit très ample. On obtient alors un plongement $\Phi = \Phi_{|m_0L|} : X \to \mathbb{P}^N$ tel que $\Phi^\star\mathcal{O}(1) = \pm m_0L$. L'image $Y = \Phi(X)$ est de degré

$$\deg(Y) = \int_Y c_1\big(\mathcal{O}(1)\big)^n = \int_X c_1\big(\pm m_0L\big)^n = m_0^n\,L^n.$$

Ceci entraîne que Y est un point d'une des composantes du schéma de Chow des sous-variétés algébriques Y de dimension et de degré donnés dans $\mathbb{P}^N$ pour lesquelles $\mathcal{O}(1)_{\restriction Y}$ est divisible par m_0, plus précisément un point de l'ouvert correspondant aux sous-variétés non singulières. Comme l'ouvert en question est un ouvert de Zariski, il ne peut avoir qu'un nombre fini de composantes irréductibles, d'où le corollaire. □

On peut démontrer aussi à partir du théorème de Matsusaka (ou même directement à partir du Cor. (16.9)) qu'il n'existe qu'un nombre fini de familles de déformation de variétés de Fano de dimension n donnée. On utilise pour cela un résultat fondamental obtenu indépendamment par Kollár-Miyaoka-Mori [KoMM92] et Campana [Cam92], montrant que le discriminant K_X^n est borné par une constante C_n ne dépendant que de n. Les bornes effectives obtenues pour les fibrés très amples fournissent alors (au prix de quelques efforts !) une borne effective pour le nombre de familles de variétés de Fano.

Références

[AN54] Y. Akizuki and S. Nakano, *Note on Kodaira-Spencer's proof of Lefschetz theorems,* Proc. Jap. Acad. **30** (1954) 266–272.

[AnG62] A. Andreotti et H. Grauert, *Théorèmes de finitude pour la cohomologie des espaces complexes,* Bull. Soc. Math. France **90** (1962) 193–259.

[AS94] U. Angehrn and Y.T. Siu, *Effective freeness and point separation for adjoint bundles,* Preprint December 1994.

[Ang95] F. Angelini, *An algebraic version of Demailly's asymptotic Morse inequalities,* Preprint UCLA, Duke University e-print alg-geom/9503005.

[AV65] A. Andreotti and E. Vesentini, *Carleman estimates for the Laplace-Beltrami equation in complex manifolds,* Publ. Math. I.H.E.S. **25** (1965) 81–130.

[BPV84] W. Barth, Ch. Peters, A. van de Ven, *Compact complex surfaces,* Ergebnisse der Math., Band 4, Springer-Verlag (1984).

[BaKo89] I. Bauer and S. Kosarew, *On the Hodge spectral sequence for some classes of non-complete algebraic manifolds,* Math. Ann. **284** (1989) 577-593.

[BaKo91] I. Bauer and S. Kosarew, *Some aspects of Hodge theory on noncomplete algebraic manifolds,* Prospects in Complex Geometry (Katata and Kyoto, 1989), Lecture Notes in Math., Vol. 1468, Springer, Berlin (1991) 281–316.

[BePe95] J. Bertin, Ch. Peters, *Variations de structures de Hodge, variétés de Calabi-Yau et symétrie Miroir,* Ce volume.

[Boc48] S. Bochner, *Curvature and Betti numbers (I) and (II),* Ann. of Math. **49** (1948) 379–390 ; **50** (1949) 77–93.

[Bom70] E. Bombieri, *Algebraic values of meromorphic maps,* Invent. Math. **10** (1970) 267–287 and Addendum, Invent. Math. **11** (1970) 163–166.

[Cam92] F. Campana, *Connexité rationnelle des variétés de Fano,* Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. **25** (1992) 539–545.

[Del68] P. Deligne, *Théorème de Lefschetz et critères de dégénérescence de suites spectrales,* Publ. Math. I.H.E.S. **35** (1968) 107–126.

[Del72] P. Deligne, *Théorie de Hodge II,* Publ. Math. I.H.E.S. **40** (1972) 5–57.

[DeI87] P. Deligne and L. Illusie, *Relèvements modulo p^2 et décomposition du complexe de De Rham,* Invent. Math. **89** (1987) 247–270.

[Dem82] J.-P. Demailly, *Estimations L^2 pour l'opérateur $\overline{\partial}$ d'un fibré vectoriel holomorphe semi-positif au dessus d'une variété kählerienne complète,* Ann. Sci. Ec. Norm. Sup. **15** (1982) 457–511.

[Dem89] J.-P. Demailly, *Transcendental proof of a generalized Kawamata-Viehweg vanishing theorem,* C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **309** (1989) 123–126 and : Proceedings of the Conference "Geometrical and algebraical aspects in several complex variables" held at Cetraro, Univ. della Calabria, June 1989.

[Dem90a] J.-P. Demailly, *Cohomology of q-convex spaces in top degrees,* Math. Zeitschrift **203** (1990) 283–295.

[Dem90b] J.-P. Demailly, *Singular hermitian metrics on positive line bundles,* Proc. Conf. Complex algebraic varieties (Bayreuth, April 2–6, 1990), edited by K. Hulek, T. Peternell, M. Schneider, F. Schreyer, Lecture Notes in Math., Vol. 1507, Springer-Verlag, Berlin, 1992.

[Dem93] J.-P. Demailly, *A numerical criterion for very ample line bundles,* J. Differential Geom. **37** (1993) 323–374.

[Dem94] J.-P. Demailly, *L^2 vanishing theorems and adjunction theory,* Lectures Notes of a CIME course on "Transcendental methods of algebraic geometry", ed. F. Catanese and C. Ciliberto, Cetraro, Italy, July 1994, 93 p, e-print alg-geom/9410022 on the Duke server.

[Dem96] J.-P. Demailly, *Effective bounds for very ample line bundles,* Inventiones Math. bf 124 (1996) 243–261.

[DR55] G. De Rham, *Variétés Différentiables,* Hermann, Paris (1955).

[DV72] A. Douady and J.-L. Verdier, *Séminaire de Géométrie analytique de l'Ecole Normale Supérieure, 1971-72,* Astérisque **16**, Soc. Math. France (1974).

[EL93] L. Ein and R. Lazarsfeld, *Global generation of pluricanonical and adjoint linear series on smooth projective threefolds,* Jour. of Am. Math. Soc. **6** (1993) 875–903.

[EV86] H. Esnault and E. Viehweg, *Logarithmic De Rham complexes and vanishing theorems,* Invent. Math. **86** (1986) 161–194.

[EV92] H. Esnault and E. Viehweg, *Lectures on vanishing theorems,* DMV Seminar, Band **20**, Birkhäuser Verlag, 1992.

[Fed69] H. Federer, *Geometric measure theory,* Springer Verlag, Vol. 153, Berlin, Heidelberg, New-York (1969).

[FdB94] G. Fernández del Busto, *A Matsusaka-type theorem for surfaces,* Preprint Princeton University, July 1994, Duke e-print `alg-geom/9410018`.

[Fle81] H. Flenner, *Ein Kriterium für die Offenheit der Versalität,* Math. Zeitschrift **178** (1981) 449–473.

[FoK71] O. Forster and K. Knorr, *Ein Beweis des Grauertschen Bildgarbensatzes nach Ideen von B. Malgrange,* Inventiones Math. **16** (1972) 113–160.

[Frö55] A. Frölicher, *Relations between the cohomology groups of Dolbeault and topological invariants,* Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **41** (1955) 641–644.

[Fuj87] T. Fujita, *On polarized manifolds whose adjoint bundles are not semipositive,* Algebraic Geometry, Sendai, 1985, Adv. Stud. in Pure Math., Vol. 10, North Holland, T. Oda (ed.), 1987, 167–178.

[Fuj88] T. Fujita, *Problem list,* Conference held at the Taniguchi Foundation, Katata, Japan, August 1988.

[Fuj93] T. Fujita, *Remarks on Ein-Lazarsfeld criterion of spannedness of adjoint bundles of polarized threefolds,* Preprint Tokyo Inst. of Technology, Ohokayama, Japan (1993).

[Gra60] H. Grauert, *Ein Theorem der analytischen Garbentheorie und die Modulräume komplexer Strukturen,* Publ. Math. I.H.E.S. **5** (1960) 233–292.

[Gri69] P.A. Griffiths, *Hermitian differential geometry, Chern classes and positive vector bundles,* Global Analysis, papers in honor of K. Kodaira, Princeton Univ. Press, Princeton, 1969, 181–251.

[GH78] P.A. Griffiths, J. Harris, *Principles of algebraic geometry,* Wiley, New York (1978).

[Har70] R. Hartshorne, *Ample subvarieties of algebraic varieties,* Lecture Notes in Math., Vol. 156, Springer-Verlag, Berlin (1970).

[Har77] R. Hartshorne, *Algebraic geometry,* Graduate Texts in Math., Springer-Verlag, Berlin (1977).

[Hel96] S. Helmke, *On Fujita's conjecture,* Preprint Univ. Basel, Switzerland, 13p, February 19, 1996.

[Hod41] W.V.D. Hodge, *The theory and applications of harmonic integrals,* Cambridge University Press (1941).

[Hör65] L. Hörmander, *L^2 estimates and existence theorems for the $\overline{\partial}$ operator,* Acta Math. **113** (1965) 89–152.

[Hör66] L. Hörmander, *An introduction to Complex Analysis in several variables,* 1966, 3rd edition, North-Holland Math. Libr., vol.7, Amsterdam, London (1990).

[Ill] Illusie, L. : *Frobenius et dégénerescence de Hodge,* Ce volume.

[Kaw82] Y. Kawamata, *A generalization of Kodaira-Ramanujam's vanishing theorem,* Math. Ann. **261** (1982) 43–46.

[Kaw84] Y. Kawamata, *The cone of curves of algebraic varieties,* Ann. of Math. **119** (1984) 603–633.

[Kaw85] Y. Kawamata, *Pluricanonical systems of minimal algebraic varieties,* Invent. Math. **79** (1985) 567–588.

[Kaw95] Y. Kawamata, *On Fujita's freeness conjecture for 3-folds and 4-folds,* Preprint Tokyo University, Duke University e-print alg-geom/9510004.

[KMM87] Y. Kawamata, K. Matsuda and K. Matsuki, *Introduction to the minimal problem,* Algebraic Geometry, Sendai, 1985, Adv. Stud. in Pure Math., Vol. 10, T. Oda (ed.), North Holland, Amsterdam, 1987, 283–360.

[KiV71] R. Kiehl and J.-L. Verdier, *Ein einfacher Beweis des Kohärenzsatzes von Grauert,* Math. Ann. **195** (1971) 24–50.

[Kod53] K. Kodaira, *On a differential geometric method in the theory of analytic stacks,* Proc. Nat. Acad. Sci. USA **39** (1953) 1268–1273.

[Kod54] K. Kodaira, *On Kähler varieties of restricted type,* Ann. of Math. **60** (1954) 28–48.

[Kod75] K. Kodaira, *Collected works, Vol. I, II, III,* Iwanami Shoten Publishers and Princeton University Press (1975).

[KoS57] K. Kodaira and D.C. Spencer, *On the variation of almost complex structure,* Alg. Geom. and Topology, Princeton Univ. Press, 139–150 (1957); Kodaira's Collected Works, Vol. 2, Iwanami Shoten Publishers, 760–771.

[Kol85] J. Kollár, *Vanishing theorems for cohomology groups,* Algebraic Geometry, Bowdoin 1985, Proc. Symp. Pure Math., Vol. 46 (1987) 233–243.

[Kol92] J. Kollár, *Effective basepoint freeness,* Math. Ann. **296** (1993) 595–605.

[KoM83] J. Kollár and T. Matsusaka, *Riemann-Roch type inequalities,* Amer. J. of Math. **105** (1983) 229–252.

[KoMM92] J. Kollár, Y. Miyaoka and S. Mori, *Rational connectedness and boundedness of Fano manifolds,* J. Differential Geom. **36** (1992) 765–779.

[Kos91] S. Kosarew, *The hard Lefschetz theorem for concave and convex algebraic manifolds,* Proceedings of the Internat. Workshop on Complex Analysis (Wuppertal, 1990), Aspects of Math., E17, Vieweg, Braunschweig (1991) 175–187.

[Laz93] R. Lazarsfeld, with the assistance of G. Fernández del Busto, *Lectures on linear series,* Park City, IAS Mathematics Series, Vol. 3, 1993.

[Lel57] P. Lelong, *Intégration sur un ensemble analytique complexe,* Bull. Soc. Math. France **85** (1957) 239–262.

[Lel69] P. Lelong, *Plurisubharmonic functions and positive differential forms,* Gordon and Breach, New-York, and Dunod, Paris (1969).

[LP75] J. Le Potier, *Annulation de la cohomologie à valeurs dans un fibré vectoriel holomorphe de rang quelconque,* Math. Ann. **218** (1975) 35–53.

[Man93] L. Manivel, *Un théorème de prolongement L^2 de sections holomorphes d'un fibré vectoriel,* Math. Zeitschrift. **212** (1993) 107–122.

[Mat72] T. Matsusaka, *Polarized varieties with a given Hilbert polynomial,* Amer. J. of Math. **94** (1972) 1027–1077.

[Mor82] S. Mori, *Threefolds whose canonical bundles are not numerically effective,* Ann. of Math. **116** (1982) 133–176.

[Nad89] A.M. Nadel, *Multiplier ideal sheaves and Kähler-Einstein metrics of positive scalar curvature,* Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **86** (1989) 7299–7300 and Annals of Math., **132** (1990) 549–596.

[Nak55] S. Nakano, *On complex analytic vector bundles,* J. Math. Soc. Japan **7** (1955) 1–12.

[Ohs81] T. Ohsawa, *A reduction theorem for cohomology groups of very strongly q-convex Kähler manifolds,* Invent. Math. **63** (1981) 335–354 and **66** (1982) 391–393.

[Ohs87] T. Ohsawa, *Hodge spectral sequence and symmetry on compact Kähler spaces,* Publ. RIMS, Kyoto Univ. **23** (1987), 613–625.

[Ohs88] T. Ohsawa, *On the extension of L^2 holomorphic functions,* II. Publ. RIMS, Kyoto Univ. **24** (1988) 265–275.

[OT87] T. Ohsawa and K. Takegoshi, *On the extension of L^2 holomorphic functions,* Math. Zeitschrift **195** (1987) 197–204.

[OT88] T. Ohsawa and K. Takegoshi, *Hodge spectral sequence on pseudoconvex domains,* Math. Zeitschrift **197** (1988) 1–12.

[Rei88] I. Reider, *Vector bundles of rank 2 and linear systems on algebraic surfaces,* Ann. of Math. **127** (1988) 309–316.

[Sch74] M. Schneider, *Ein einfacher Beweis des Verschwindungssatzes für positive holomorphe Vektorraumbündel,* Manuscripta Math. **11** (1974) 95–101.

[Ser55] J.-P. Serre, *Un théorème de dualité,* Comment. Math. **29** (1955) 9–26.

[Ser56] J.-P. Serre, *Géométrie algébrique et géométrie analytique,* Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **6** (1956) 1–42.

[ShSo85] B. Shiffman, A.J. Sommese, *Vanishing theorems on complex manifolds,* Progress in Math. no **56**, Birkhäuser (1985).

[Siu93] Y.T. Siu, *An effective Matsusaka big theorem,* Ann. Inst. Fourier **43** (1993) 1387–1405.

[Siu96] Y.T. Siu, *Effective Very Ampleness,* Inventiones Math. **124** (1996) 563–571.

[Sko72a] H. Skoda, *Sous-ensembles analytiques d'ordre fini ou infini dans $\mathbb{C}^n$,* Bull. Soc. Math. France **100** (1972) 353–408.

[Sko75] H. Skoda, *Estimations L^2 pour l'opérateur $\overline{\partial}$ et applications arithmétiques,* Séminaire P. Lelong (Analyse), année 1975/76, Lecture Notes in Math., Vol. 538, Springer-Verlag, Berlin (1977) 314–323.

[Som78] A.J. Sommese, *Submanifolds of abelian varieties,* Math. Ann. **233** (1978) 229–256.

[Tra95] S. Trapani, *Numerical criteria for the positivity of the difference of ample divisors,* Math. Zeitschrift **219** (1995) 387–401.

[Vie82] E. Viehweg, *Vanishing theorems,* J. Reine Angew. Math. **335** (1982) 1–8.

[Wei57] A. Weil, *Variétés kählériennes,* Hermann, Paris (1957).

[Wel80] R.O. Wells, *Differential analysis on complex manifolds,* Graduate Texts in Math. **65**, 2nd edition, Springer-Verlag, Berlin (1980).

(version du 20 mars 1995, complétée le 24 avril 1996)

Jean-Pierre Demailly
Université de Grenoble I,
Institut Fourier, UMR 5582 du CNRS, BP 74,
F-38402 Saint-Martin d'Hères, France
Adresse électronique : demailly@fourier.ujf-grenoble.fr