Pour tous $y, \eta \in V$ et $x = g(y)$, $\xi = g(x) \in U = B(x_0, r)$, l'hypothèse de différentiablilité de f au point x implique

$$\eta - y = f(\xi) - f(x) = f'(x)(\xi - x) + \varepsilon(\xi - x)\|\xi - x\|$$

avec $\lim_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0$. Comme $\ell^{-1} \circ f'(x) = \mathrm{Id} + u'(x)$ où $|||u'(x)||| \le k < 1$ sur $B(x_0, r)$, l'application linéaire $\ell^{-1} \circ f'(x)$ est bien inversible. Par conséquent $f'(x)$ l'est aussi, et nous pouvons écrire

$$\xi - x = f'(x)^{-1}\Big(\eta - y - \varepsilon(\xi - x)\|\xi - x\|\Big),$$

soit

$$g(\eta) - g(y) = f'(x)^{-1}(\eta - y) - f'(x)^{-1}\big(\varepsilon(g(\eta) - g(y))\|g(\eta) - g(y)\|$$

avec $\lim_{\eta\to y} f'(x)^{-1}\big(\varepsilon(g(\eta) - g(y)\big) = 0$ et $\|g(\eta) - g(y)\| \le K'\|\eta - y\|$. On voit ainsi que $g = f^{-1}$ est bien différentiable au point y et que $g'(y) = f'(x)^{-1} = f'(g(y))^{-1}$. L'inversion d'une matrice étant une opération continue (et même indéfiniment différentiable), on en déduit que g' est continue sur V, c'est-à-dire que g est de classe C^1.

Si f est de classe C^k, $k \ge 2$, on vérifie par récurrence que g est aussi de classe C^k : f' est de classe C^{k-1}, g l'est aussi par hypothèse de récurrence, donc g' est de classe C^{k-1}, c'est-à-dire que g est de classe C^k. Le théorème est démontré. ∎

4.2.* Le théorème des fonctions implicites et ses variantes

Nous allons reformuler le théorème d'inversion locale pour en tirer différentes variantes et différentes conséquences géométriques. La variante la plus importante est le théorème des fonctions implicites.

Théorème des fonctions implicites – *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^m$ et $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$ une application de classe C^k, $k \ge 1$. On se donne un point $(x_0, y_0) \in \Omega \subset \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^m$, et on suppose que*

(i) $f(x_0, y_0) = 0$;

(ii) *la matrice des dérivées partielles* $f'_y(x_0, y_0) = \Big(\dfrac{\partial f_i}{\partial y_j}(x_0, y_0)\Big)_{1\le i,j\le m}$ *est inversible dans* $\mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$.

Alors il existe un voisinage $U \times V$ de (x_0, y_0) dans Ω sur lequel $f'_y(x, y)$ est inversible, et une application $g : U \to V$ de classe C^k telle que « l'équation implicite » $f(x, y) = 0$ pour $(x, y) \in U \times V$ soit équivalente à $y = g(x)$, $x \in U$. La dérivée de g est donnée par la formule

$$g'(x) = -f'_y(x, g(x))^{-1} \circ f'_x(x, g(x)).$$

Autrement dit, le théorème des fonctions implicites dit que l'ensemble des solutions de l'équation $f(x, y) = 0$ dans $U \times V$ peut être « explicité » comme le graphe $y = g(x)$ d'une fonction $g : U \to V$ de classe C^k, là où $f'_y(x, y)$ est inversible.

Remarque 1 – On voit immédiatement que le théorème des fonctions implicites contient le théorème d'inversion locale. Il suffit de poser $F(x,y) = x - f(y)$, $(x,y) \in \widetilde{\Omega} = \mathbb{R}^m \times \Omega \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$ pour obtenir l'existence de la fonction réciproque $y = g(x)$ de f au voisinage de tout point $y_0 \in \Omega$ où $f'(y_0)$ est inversible.

Démonstration. En sens inverse, nous allons montrer que le théorème d'inversion locale implique facilement le théorème des fonctions implicites (ce sont donc des théorèmes « équivalents »). Avec les hypothèses faites sur f, considérons

$$F : \Omega \to \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^m, \qquad (x,y) \mapsto F(x,y) = (x, f(x,y)).$$

Nous avons $F(x_0,y_0) = (x_0, 0)$ et la matrice de la différentielle de F est donnée par

$$F'(x,y) = \begin{pmatrix} \mathrm{Id} & 0 \\ f'_x(x,y) & f'_y(x,y) \end{pmatrix}.$$

Ceci permet de voir aussitôt que $F'(x,y) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^{p+m}, \mathbb{R}^{p+m})$ est inversible en tout point où $f'_y(x,y) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^p)$ l'est, avec

$$F'(x,y)^{-1} = \begin{pmatrix} \mathrm{Id} & 0 \\ -f'_y(x,y)^{-1} \circ f'_x(x,y) & f'_y(x,y)^{-1} \end{pmatrix}.$$

En particulier, $F'(x_0,y_0)$ est inversible par hypothèse.

Le théorème d'inversion locale montre que F est un difféomorphisme de classe C^k d'un voisinage $\widetilde{T} = U_1 \times V_1$ de (x_0,y_0) sur un voisinage $\widetilde{W}$ de $(x_0,0)$ dans $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^m$ (Quitte à rétrécir $\widetilde{T}$ on peut supposer que $\widetilde{T}$ est un produit de boules ouvertes). L'application $H = F^{-1} : \widetilde{W} \to U_1 \times V_1$, $(u,v) \mapsto (x,y) = H(u,v)$ est la solution de l'équation $F(x,y) = (x, f(x,y)) = (u,v)$ pour $(x,y) \in \widetilde{U}_1 \times V_1$, donc $x = u$ et on voit que H est de la forme $H(u,v) = (u, h(u,v))$ pour une certaine fonction $h : \widetilde{W} \to V_1$. Pour $(x,y) \in U_1 \times V_1$ et $(x,v) \in \widetilde{W}$, nous avons l'équivalence

$$f(x,y) = v \Leftrightarrow y = h(x,v).$$

La fonction $g(x) = h(x,0)$ donne donc précisément $y = g(x)$ comme solution del'équation $f(x,y) = 0$ lorsque $(x,y) \in U_1 \times V_1$ et $(x,0) \in \widetilde{W}$. Définissons U comme l'ensemble des $x \in U_1$ tels que $(x,0) \in \widetilde{W}$ et $V = V_1$. Nous obtenons ainsi U, V qui sont des voisinages ouverts de x_0 et y_0 respectivement, et une application $g : U \to V$ de classe C^k qui répond à la question. De plus $g'(x) = h'_x(x,0)$ est la dérivée partielle en x de la composante h dans $H'(x,0) = F'(H(x,0))^{-1} = F'(x, g(x))^{-1}$, c'est-à-dire

$$g'(x) = -f'_y(x, g(x))^{-1} \circ f'_x(x, g(x)). \qquad \blacksquare$$

Remarque 2 – D'un point de vue numérique, le calcul de $y = g(x)$ au voisinage de x_0 pourra se faire en utilisant la méthode de Newton-Raphson appliquée à la fonction $y \mapsto f(x,y)$, c'est-à-dire en calculant les itérés successifs $y_{p+1} = y_p - f'_y(x, y_p)^{-1}(f(x, y_p))$ à partir de la valeur approchée y_0.

Nous abordons maintenant des énoncés plus géométriques.

Définition – *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^m$ et $f : \Omega \to \mathbb{R}^p$ une application de classe C^k, $k \geq 1$. On dit que*

(1) *f est une immersion en un point $x_0 \in \Omega$ si $f'(x_0) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^p)$ est injective (ce qui implique $m \leq p$) ;*

(2) *f est une submersion en un point $x_0 \in \Omega$ si $f'(x_0) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^p)$ est surjective (ce qui implique $m \geq p$) ;*

(3) *f est de rang constant si le rang de $f'(x)$ pour $x \in \Omega$ est un entier r constant (ce qui implique $r \leq \min(m, p)$).*

La structure locale de telles applications est décrite respectivement par les trois théorèmes suivants.

Théorème des immersions – *Si f est une immersion en un point $x_0 \in \Omega$, il existe un voisinage U de x_0 dans $\mathbb{R}^m$, un voisinage V de $y_0 = f(x_0)$ dans $\mathbb{R}^p$ et un C^k-difféomorphisme $\psi : V \to U \times T$ de V sur un voisinage $U \times T$ de $(x_0, 0)$ dans $\mathbb{R}^p = \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{p-m}$ tel que $\psi \circ f(x) = (x, 0)$ sur U.*
Autrement dit, au difféomorphisme ψ près dans l'espace d'arrivée, $\widetilde{f} = \psi \circ f$ s'identifie à l'injection triviale $x \mapsto (x, 0)$ au voisinage de x_0.

Démonstration du théorème des immersions. Choisissons des vecteurs linéairement indépendants $(a_1, \ldots a_{p-m})$ de $\mathbb{R}^p$ de sorte qu'on ait une décomposition en somme directe

$$\mathbb{R}^p = \operatorname{Im} f'(x_0) \oplus \bigoplus_{1 \leq i \leq p-m} \mathbb{R}a_i.$$

C'est possible puisque $\dim \operatorname{Im} f'(x_0) = m$ d'après l'injectivité de $f'(x_0)$. Nous définissons

$$\Psi : \Omega \times \mathbb{R}^{p-m} \to \mathbb{R}^p, \qquad \Psi(x, t) = f(x) + \sum_{1 \leq i \leq p-m} t_i a_i.$$

Comme $\partial \Psi(x, t)/\partial t_i = a_i$, il est clair que $\operatorname{Im} \Psi'(x_0, 0)$ contient à la fois $\operatorname{Im} f'(x_0)$ et les a_i, donc $\Psi'(x_0, 0)$ est surjective. Mais comme Ψ est une application de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^p$, ceci entraîne que $\Psi'(x_0, 0)$ est inversible. Par conséquent Ψ définit un C^k-difféomorphisme d'un voisinage $U \times T$ de $(x_0, 0)$ sur un voisinage V de $y_0 = f(x_0)$. Nous avons $\Psi(x, 0) = f(x)$ par définition de Ψ, donc $\psi = \Psi^{-1}$ répond à la question. ■

Théorème des submersions – *Si f est une submersion en un point $x_0 \in \Omega$, il existe un voisinage U de x_0 dans $\mathbb{R}^m$, un voisinage V de $y_0 = f(x_0)$ dans $\mathbb{R}^p$ et un C^k-difféomorphisme $\varphi : U \to V \times S$ de U sur un voisinage $V \times S$ de $(y_0, 0)$ dans $\mathbb{R}^m = \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{m-p}$ tel que $f \circ \varphi^{-1}(y, s) = y$ sur $V \times S$.*
Autrement dit, au difféomorphisme φ près dans l'espace de départ, $\widetilde{f} = f \circ \varphi^{-1}$ s'identifie à la projection triviale $(y, s) \mapsto y$ au voisinage de $(y_0, 0)$.

Démonstration du théorème des submersions. Soit $(a_1, \ldots, a_m)$ une base de $\mathbb{R}^m$ choisie de telle sorte que $(a_{p+1}, \ldots, a_m)$ soit une base de $\operatorname{Ker} f'(x_0)$. Nous définissons

$$\varphi : \Omega \to \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{m-p}, \qquad \varphi(x) = (f(x), s_{p+1}, \ldots, s_m)$$

où $(s_1, \ldots, s_m)$ désignent les coordonnées de x dans la base (a_i), c'est-à-dire $x = \sum s_i a_i$. Le noyau $\operatorname{Ker} \varphi'(x_0)$ est l'intersection du noyau $\operatorname{Ker} f'(x_0)$ avec le sous-espace $s_{p+1} = \ldots = s_m = 0$ engendré par $(a_1, \ldots, a_p)$, et comme ces espaces sont supplémentaires on a $\operatorname{Ker} \varphi'(x_0) = \{0\}$. Ceci montre que $\varphi'(x_0)$ est injective, et donc bijective. Par conséquent φ est un C^k-difféomorphisme d'un voisinage U de x_0 sur un voisinage $V \times S$ de $(y_0, 0) = (f(x_0), 0)$ (quitte à rétrécir ces voisinages, on peut toujours supposer que le voisinage d'arrivée est un produit). On voit alors que $f = \pi \circ \varphi$ où π est la projection sur les p-premières coordonnées, de sorte que $f \circ \varphi^{-1} = \pi : (y, s_{p+1}, \ldots, s_m) \mapsto y$. Le théorème est démontré. ■

Théorème du rang – *Si f est de rang constant r sur Ω et si $x_0 \in \Omega$, il existe un voisinage U de x_0 dans $\mathbb{R}^m$, un voisinage V de $y_0 = f(x_0)$ dans $\mathbb{R}^p$, un C^k-difféomorphisme $\varphi : U \to Q \times S$ de U sur un voisinage $Q \times S$ de 0 dans $\mathbb{R}^m = \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^{m-r}$, et un C^k-difféomorphisme $\psi : V \to Q \times T$ de V sur un voisinage $Q \times T$ de 0 dans $\mathbb{R}^p = \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{p-r}$, tels que*

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1}(x) = (x_1, \ldots, x_r, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^p \quad \textit{sur } Q \times S.$$

Autrement dit, aux difféomorphismes φ, ψ près à la fois au départ et à l'arrivée, $\widetilde{f} = \psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ s'identifie à l'application linéaire canonique de rang r

$$(*) \qquad (x_1, \ldots, x_r, x_{r+1}, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^m \mapsto (x_1, \ldots, x_r, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^p$$

au voisinage de 0, et on a le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{f} & V \\ \simeq \downarrow \varphi & & \simeq \downarrow \psi \\ Q \times S & \xrightarrow[\widetilde{f}]{} & Q \times T \end{array}$$

où $\widetilde{f}$ est l'application linéaire $(*)$.

Démonstration du théorème du rang. On construit des difféomorphismes φ_i entre ouverts de $\mathbb{R}^m$ et ψ_i entre ouverts de $\mathbb{R}^p$ de façon à « simplifier » progressive-