La découverte de Fourier :
même le feu est régi par les nombres

par Jean-Pierre Demailly, Institut Fourier, Université de Grenoble I

1. Un bref aperçu de la vie de Fourier

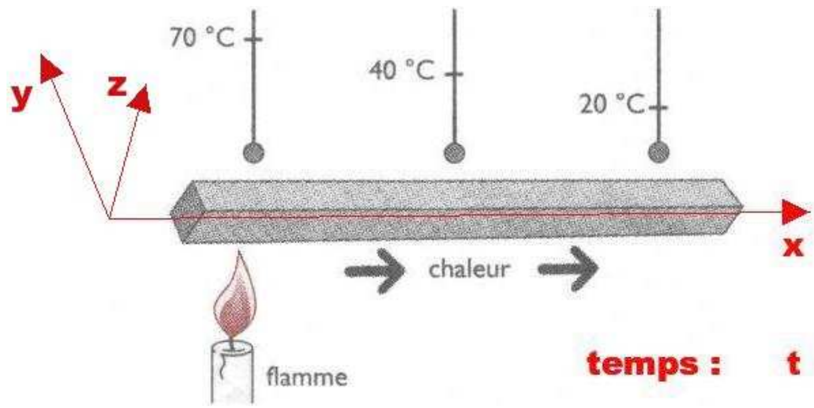
Singulière destinée que celle de Jean Baptiste Joseph Fourier : né en 1768 à Auxerre dans une famille modeste – son père est garçon-tailleur – il est orphelin de mère à 8 ans et orphelin de père à 10 ans. Envoyé au pensionnat par l'organiste de la ville, il fait ses études à l'École militaire d'Auxerre alors tenue par les Bénédictins. Il étudie le latin, la rhétorique, la théologie, mais aussi les sciences et les mathématiques, qui deviennent rapidement son principal centre d'intérêt – Fourier découvre ainsi à la bibliothèque d'Auxerre des ouvrages écrits par quelques mathématiciens de premier plan comme Clairaut. Fourier se révèle vite être un élève hors norme, et collectionne les premiers prix. Ses progrès sont si rapides que le directeur de l'école militaire d'Auxerre lui demande bientôt d'assurer la fonction de professeur de mathématiques, bien qu'il n'ait que 16 ans et demi !

Un peu plus tard, Fourier prend une part active à la Révolution ; en 1792, il devient ainsi président de la société populaire d'Auxerre. Mais en 1794, c'est la Terreur, et Fourier est emprisonné. Il échappe de peu à l'échafaud, grâce à la la chute de Robespierre qui intervient juste avant la date prévue pour son jugement définitif. L'ouverture sociale consécutive à la révolution permet au citoyen modeste qu'est Fourier d'entrer comme élève à l'École Normale de Paris nouvellement fondée en 1795. Ses travaux sur les équations algébriques le font très vite remarquer par le mathématicien Gaspard Monge. En 1796, celui-ci lui confie une charge de cours à l'École Normale, et le fait également nommer professeur à l'École Polytechnique : à moins de trente ans, Fourier est déjà ainsi un scientifique reconnu. En 1798, Bonaparte organise l'expédition d'Égypte, et Fourier y est associé comme l'un des principaux conseillers scientifiques. Il s'occupe de travaux de topographie, puis est nommé secrétaire de l'Institut d'Égypte au Caire, où il effectue de nombreuses missions de

nature scientifique, administrative ou diplomatique. Après la débâcle française en Égypte, Fourier revient en France en 1801, et Napoléon le nomme peu après préfet de l'Isère. C'est à Grenoble, où il restera de 1802 à 1815, que Fourier entame ses travaux fondamentaux sur la propagation de la chaleur. Son activité est débordante – il crée l'université et le lycée de Grenoble, dirige les travaux de drainage de la vallée, fait construire la route de Grenoble à Briançon par le col du Lautaret. Parallèlement à ses travaux sur la propagation de la chaleur qui aboutissent à la publication d'un mémoire de l'Académie des Sciences en 1807, il rédige son importante "préface historique pour la description de l'Égypte", parue en 1809. Fourier fait la connaissance des frères Champollion, d'abord de l'aîné Jacques-Joseph puis de son frère cadet Jean-François ; les encouragements de Fourier et ses travaux précurseurs sur la civilisation égyptienne joueront ainsi un rôle décisif dans le déchiffrage des hiéroglyphes par Jean-François Champollion en 1822. Après la chute de Napoléon en 1815, Fourier connaît quelques difficultés (il avait été nommé baron d'Empire en 1809 !), mais c'est finalement la consécration avec sa nomination à l'Académie des Sciences en 1817. En 1822, il publie son monumental traité sur la "Théorie analytique de la chaleur" qui contient aussi en germe la théorie des séries et des transformées de Fourier, et il devient secrétaire perpétuel de l'Académie des sciences. Ses talents d'écrivain lui valent d'être nommé simultanément à l'Académie Française en 1826, quelques années avant son décès en 1830. Dans un travail moins connu publié en 1824 dans les Annales de chimie et de physique, Fourier va même jusqu'à prédire et expliquer l'effet de serre des planètes gazeuses. Fourier peut à bon droit être considéré comme le fondateur de la physique mathématique !

2. L'équation de la chaleur

Nous allons ici expliquer à la lumière des connaissances modernes le cheminement qui conduit à l'équation de la propagation de la chaleur. Considérons un objet matériel soumis à un échauffement initial, par exemple un barreau métallique, comme figuré ci-dessous :

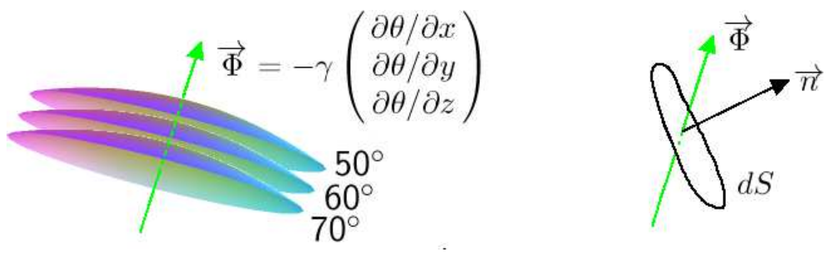


Le problème est de déterminer la température $\theta = \theta(x, y, z, t)$ de cet objet au point de coordonnées (x, y, z) et au temps t. Nous savons aujourd'hui que la température mesure l'énergie cinétique moyenne de vibration des atomes ou molécules constituant l'objet (mais la théorie atomique de Dalton est à peine née et Fourier n'y fait pas référence). Du fait que les particules s'entrechoquent, l'énergie cinétique se propage, d'autant plus vite que la différence de température entre des points voisins est plus grande. Notons $\overrightarrow{\Phi} = \overrightarrow{\Phi}(x, y, z, t)$ la *densité de flux de chaleur* traversant l'objet : c'est par définition la grandeur vectorielle dont la norme vaut $dQ/(dS\,dt)$, si dQ est la quantité de chaleur traversant une surface

infinitésimale dS pendant le temps dt, pour une surface dS perpendiculaire à la direction de propagation portée par $\overrightarrow{\Phi}$. Ces considérations conduisent à la loi physique

$$(1) \qquad \overrightarrow{\Phi} = -\gamma \,\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\theta = -\gamma \begin{pmatrix} \partial\theta/\partial x \\ \partial\theta/\partial y \\ \partial\theta/\partial z \end{pmatrix}$$

où γ est la conductivité thermique du matériau ; la densité de flux Φ s'exprime en $Js^{-1}m^{-2} = Wm^{-2}$, et l'unité de conductivité thermique est donc le $WK^{-1}m^{-1}$ (où $J =$ Joule, $W = Js^{-1} =$ Watt, $K =$ Kelvin). Si on note $\overrightarrow{dS} = dS\,\overrightarrow{n}$ où $\overrightarrow{n}$ est le vecteur normal à l'élément de surface, alors la quantité de chaleur dQ le traversant est en général $\overrightarrow{\Phi} \cdot \overrightarrow{dS}\,dt$, et ce quelles que soient les orientations. On notera le signe moins devant γ, qui traduit le fait que la chaleur se déplace des points chauds vers les points froids.



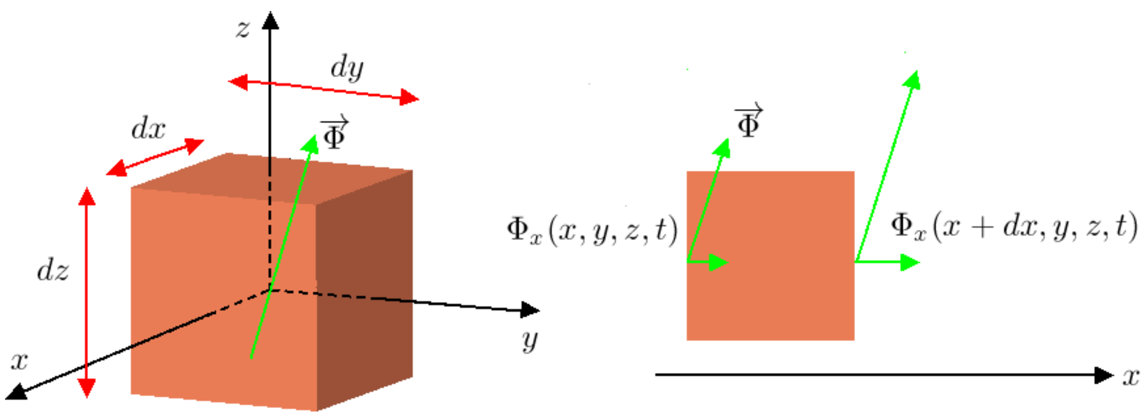
Considérons maintenant un petit parallélépipède $[x, x+dx] \times [y, y+dx] \times [z, z+dz]$ d'arêtes parallèles aux axes, de volume $dV = dx\,dy\,dz$. La quantité de chaleur qui entre dans ce parallélépipède pendant le temps dt est la somme algébrique des quantités de chaleur qui entrent ou sortent par chacune des 6 faces, soit par exemple

$$\begin{aligned} dQ_x &= \overrightarrow{\Phi}(x, y, z, t) \cdot (dy\,dz\,\overrightarrow{i})\,dt - \overrightarrow{\Phi}(x + dx, y, z, t) \cdot (dy\,dz\,\overrightarrow{i})\,dt \\ &= \big(\Phi_x(x, y, z, t) - \Phi_x(x + dx, y, z, t)\big)dy\,dz\,dt \end{aligned}$$

pour les faces d'abscisses x et $x + dx$, et en notant Φ_x la composante de $\overrightarrow{\Phi}$ suivant Ox. Si dx est très petit, on trouve

$$\Phi_x(x, y, z, t) - \Phi_x(x + dx, y, z, t) \sim -\frac{\partial \Phi_x}{\partial x}(x, y, z, t)\,dx,$$

du fait que l'on peut approximer le taux d'accroissement par la dérivée.



On obtient ainsi

$$dQ_x = -\frac{\partial \Phi_x}{\partial x}(x,y,z,t)\, dx\, dy\, dz\, dt.$$

En prenant la somme suivant les 3 paires de faces, on obtient que le bilan des "entrées-sorties" de chaleur est

$$dQ = dQ_x + dQ_y + dQ_z = -\left(\frac{\partial \Phi_x}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \Phi_z}{\partial z}\right) dx\, dy\, dz\, dt.$$

En combinant ce résultat avec l'expression (1) du flux, on obtient

$$dQ = \gamma \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2}\right) dx\, dy\, dz\, dt. \tag{2}$$

Une autre loi physique fondamentale est la loi donnant la variation de température $d\theta$ produite par l'apport d'une quantité de chaleur dQ à un élément de matière de masse m. C'est une relation de proportionnalité, que l'on peut écrire

$$dQ = mc\, d\theta \tag{3}$$

où c est une constante appelée capacité calorifique, s'exprimant en $JK^{-1}kg^{-1}$ (Joules par degré et par kg). Ici la masse du petit parallélépipède vaut $m = \rho\, dx\, dy\, dz$ où ρ est la masse volumique (en $kg\, m^{-3}$). En comparant (2) et (3), on obtient l'égalité

$$dQ = (\rho\, dx\, dy\, dz)\, c\, d\theta = \gamma \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2}\right) dx\, dy\, dz\, dt.$$

Après division par $\rho c\, dx\, dy\, dz\, dt$, on trouve l'équation fondamentale

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\gamma}{\rho c}\left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2}\right). \tag{4}$$

Cette équation ne vaut que si le solide considéré ne reçoit pas de chaleur de l'extérieur – disons, par contact ou par rayonnement – et s'il ne produit pas lui-même de chaleur – ce qui est le cas s'il est le siège d'une réaction chimique ou nucléaire interne. Dans ce cas plus général, on note $P = P(x,y,z,t)$ la *production (ou l'apport) volumique* de chaleur par unité de volume et de temps à la position (x,y,z) et au temps t, en $W\, m^{-3}$; il va alors s'ajouter à dQ une quantité de chaleur supplémentaire $dQ' = P(x,y,z,t)\, dx\, dy\, dz\, dt$, ce qui donne l'équation générale

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\gamma}{\rho c}\left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2}\right) + \frac{P}{\rho c},$$

appelée *équation de propagation de la chaleur*. Aux notations près, c'est exactement l'équation proposée par Fourier en 1807 ! Il est commode d'introduire la constante $D = \gamma/\rho c$ spécifique du matériau, qu'on appelle le coefficient de *diffusivité thermique* (en $m^2 s^{-1}$). Avec cette notation, l'équation de la chaleur prend la forme usuelle

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = D\left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2}\right) + \frac{P}{\rho c}, \tag{6}$$

3. Lien avec les séries trigonométriques

L'équation de la chaleur ne peut en général être résolue explicitement. Considérons le cas d'un barreau métallique de longueur L, qui a été chauffé initialement de manière non uniforme, et dont on étudie l'évolution de la température. On l'assimile à un segment $[0, L]$ dans la direction $0x$, en négligeant son épaisseur et les variations de température en y et z, de sorte que la température est juste une fonction $\theta(x, t)$ de l'abscisse et du temps. En l'absence de production interne de chaleur, l'équation (6) prend la forme très simplifiée

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = D\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}. \tag{7}$$

À cette équation, il faut ajouter le fait que le flux de chaleur $\Phi(x, t) = -\gamma\frac{\partial \theta}{\partial x}(x, t)$ est nul aux extrêmités du barreau, donc lorsque $x = 0$ ou $x = L$, ce qui donne les conditions supplémentaires (dites *conditions aux limites*)

$$\frac{\partial \theta}{\partial x}(0, t) = 0, \qquad \frac{\partial \theta}{\partial x}(L, t) = 0. \tag{8}$$

Ces équations sont déjà bien assez difficiles à résoudre ! La méthode de Fourier consiste à rechercher des solutions sous forme de fonctions à variables séparées $\theta(x, t) = f(x)\, g(t)$. L'équation (7) devient dans ce cas $f(x)g'(t) = Df''(x)g(t)$, soit encore $g'(t)/g(t) = D\, f''(x)/f(x)$ si les fonctions ne s'annulent pas. On voit que ces quotients doivent être constants, disons $f''(x)/f(x) = a$ et $g'(t)/g(t) = aD$. La deuxième relation donne aussitôt $g(t) = C\, e^{aDt}$, ce qui est physiquement inacceptable si $a > 0$ (la température augmenterait de manière exponentielle avec le temps). La constante a est donc négative ou nulle, et on peut poser $a = -\omega^2$. Ceci fournit alors les équations différentielles bien connues

$$f''(x) = -\omega^2 f(x), \qquad g'(t) = -(\omega^2 D)g(t),$$

d'où les solutions

$$\begin{gathered} f(x) = \alpha\cos\omega x + \beta\sin\omega x, \qquad g(t) = e^{-\omega^2 Dt} \quad \text{à constante près,} \\ \theta(x, t) = f(x)\, g(t) = (\alpha\cos\omega x + \beta\sin\omega x)e^{-\omega^2 Dt}. \end{gathered}$$

La première condition (8) impose $\frac{\partial \theta}{\partial x}(0, t) = \beta\omega\, e^{-\omega^2 Dt} = 0$, donc $\beta = 0$, et la seconde donne alors $\frac{\partial \theta}{\partial x}(L, t) = -\alpha\omega\, \sin\omega L\, e^{-\omega^2 Dt} = 0$, donc $\sin\omega L = 0$ (on remarquera que si $\omega = 0$, la solution est $f(x) = \alpha + \beta x$ qui ne permet de réaliser (8) que si $\beta = 0$, auquel cas $\theta(x, t) = \alpha = \text{Cte}$, et sinon on peut supposer $\omega > 0$). Cette dernière condition montre que l'on doit avoir $\omega L = n\pi$ et donc $\omega = n\pi/L$, $n \in \mathbb{N}$. Ceci fournit la solution

$$\theta(x, t) = \alpha\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\, e^{-(n^2\pi^2/L^2)Dt},$$

encore valable pour $n = 0$. Comme l'équation (7) est linéaire, on peut ajouter ces solutions entre elles, ce qui donne également comme solutions toutes les sommes

$$\theta(x, t) = \sum_{0\le n\le N} \alpha_n\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\, e^{-(n^2\pi^2/L^2)Dt},$$

et par passage à la limite quand $N \to +\infty$ toutes les *séries trigonométriques convergentes*

$$\theta(x, t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\, e^{-(n^2\pi^2/L^2)Dt}.$$

Il faut supposer ici que les coefficients (α_n) soient choisis en sorte que l'on puisse dériver terme à terme la série deux fois par rapport à x et une fois par rapport à t, ce qui est le cas par exemple si $\sum_{n=0}^{+\infty} n^2|\alpha_n| < +\infty$. À ce point, la grande audace de Fourier a été de prétendre que l'on obtenait ainsi toutes les solutions ! Si l'on étudie l'évolution de la température à partir du temps $t = 0$, il faudrait déjà que

$$\theta(x,0) = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

puisse représenter au temps initial n'importe quelle fonction température suffisamment régulière sur l'intervalle $[0, L]$, disons par exemple n'importe quelle fonction dérivable à dérivée continue, de dérivée nulle en $x = 0$ et en $x = L$. Face aux objections de ses contemporains, Fourier tente de se justifier, et il y parvient en partie, mais une preuve vraiment indiscutable de cette propriété ne viendra que plus de 20 ans plus tard, avec le mathématicien allemand Gustav Lejeune-Dirichlet en 1829. En fait il suffit de prolonger $\theta(x, 0)$ sur $[-L, 0]$ comme fonction paire, et d'observer qu'on peut maintenant la prolonger à $\mathbb{R}$ tout entier comme fonction paire de période $T = 2L$, continue et à dérivée continue ; or on montre qu'une telle fonction périodique paire est bien une série uniformément convergente de fonctions cosinus $\cos n\omega x$ avec $\omega = 2\pi/T = \pi/L$. La théorie des séries de Fourier était née !

4. Épilogue

L'Analyse de Fourier est devenu aujourd'hui un très vaste champ d'études. Les séries de Fourier réelles $\sum a_n \cos n\omega x + b_n \sin nx$ ou complexes $\sum c_n e^{inx}$ permettent de représenter tous les phénomènes périodiques et sont donc fondamentales en théorie des ondes et en théorie du signal. Mais il se trouve qu'il existe aussi un algorithme numérique rapide de calcul des séries de Fourier, connu sous le nom de FFT ou "Fast Fourier Transform". Celui-ci a des applications aussi bien en arithmétique que dans de nombreux domaines technologiques. L'algorithme de compression des images photographiques au format JPEG utilise quant à lui une "transformée de Fourier" discrète en cosinus, portant sur un échantillonnage par carrés de 8×8 pixels. C'est ainsi que Fourier est peut-être devenu le mathématicien le plus cité au monde, aucune branche de la science ne pouvant échapper aux séries et transformées de Fourier. Mais, bien que cela soit nettement moins connu, Fourier a aussi été un précurseur en statistiques ; encore plus fort, il a été le premier à imaginer et décrire l'effet de serre dû à la rétention de chaleur dans l'atmosphère des planètes gazeuses, dans un mémoire prémonitoire datant de 1824 !

Bibliographie

Joseph Fourier, *Théorie analytique de la chaleur*, Didot père et fils, 1822, XXII-639 p, http://visualiseur.bnf.fr/CadresFenetre?O=NUMM-29061&M=telecharger

Oeuvres de Fourier, *publiées par les soins de M. Gaston Darboux, sous les auspices du ministère de l'Instruction publique...* - Paris : Gauthier-Villars, 1888-1890.

Jean Dhombres, Jean-Bernard Robert, *Fourier, Créateur de la physique mathématique*, Belin, 1998

Jean-Pierre Kahane, Pierre-Gilles Lemarié-Rieusset, *Séries de Fourier et ondelettes*, Cassini, 1998