Inventiones Mathematicae **48** (1978) 293–302

Un exemple de fibré holomorphe non de Stein à fibre $\mathbb{C}^2$ ayant pour base le disque ou le plan

par Jean-Pierre Demailly

Ecole Normale Supérieure, 45, rue d'Ulm, F-75230 Paris Cedex 05, France et L.A. au C.N.R.S. n⁰ 213, Université de Paris VI, Département de Mathématiques

Introduction

Dans le présent travail, nous construisons un fibré holomorphe non de Stein au dessus d'un ouvert connexe non vide quelconque de $\mathbb{C}$, ayant pour fibre $\mathbb{C}^2$, et dont les automorphismes de transition sont de type exponentiel.

La première réponse négative au problème posé en 1953 par J.-P. Serre [4] de savoir si un espace fibré à base et à fibre de Stein est lui-même de Stein, a été donnée récemment par H. Skoda dans [5] et [6], où le lecteur trouvera une bibliographie complète sur le sujet. Dans le contre-exemple de H. Skoda, la base est un ouvert multiplement connexe, et les automorphismes de transition sont localement constants et à croissance exponentielle.

En réponse à une question soulevée par H. Skoda, nous avons donné dans [1] un contre-exemple où la base est une couronne, où les automorphismes de transition sont polynomiaux, et nous avons montré qu'alors le groupe de Dolbeault $H^{0,1}$ de l'espace total du fibré est muni de la topologie grossière.

L'outil principal pour la construction de tels fibrés est une inégalité due à P. Lelong [3], qui permet de contrôler précisément la croissance des fonctions plurisousharmoniques sur les fibres. On prouve ici, par un calcul d'enveloppe pseudo-convexe utilisant le principe du disque, que les fonctions plurisousharmoniques continues sont constantes sur certaines fibres particulières, achevant ainsi la construction du fibré. On montre de plus (cf. la remarque 3) que les fonctions holomorphes du fibré sont triviales, c'est-à-dire constantes sur toutes les fibres.

1. L'inégalité de P. Lelong

Nous nous contenterons d'énoncer le résultat, et renvoyons le lecteur à [1], § 1, [3] p. 193 th. 6.5.2 et p. 194, th. 6.5.4, ou [6], § 9, pour un exposé complet.

Soit Ω une variété analytique complexe complexe de dimension p, V une fonction psh sur $\Omega \times \mathbb{C}^n$, ω un ouvert relativement compact de Ω. On mesure la croissance de V sur les fibres en posant

$$M(V, \omega, r) = \sup_{x \in \omega,\, |z| \leqslant r} V(x, z),$$

où $r \geqslant 0$ et $|z| = \sup_{1 \leqslant j \leqslant n} |z_j|$.

D'après P. Lelong [4], $M(V, \omega, r)$ est fonction convexe croissante de $\log r$, strictement croissante pour r assez grand si V est non constante sur au moins une fibre au dessus de Ω.

Lemme. – *Si Ω est un ouvert de $\mathbb{C}^p$, $\omega_1 \subset \omega_2 \subset \omega_3$ trois polydisques concentriques de rayons $\rho_1 < \rho_2 < \rho_3$, relativement compacts dans Ω, et V une fonction plurisousharmonique sur $\Omega \times \mathbb{C}^n$, alors*

$$M(V, \omega_2, r) \leqslant M(V, \omega_1, r^\sigma) + \mu\big[M(V, \omega_3, 1) - M(V, \omega_1, r^\sigma)\big], \tag{1}$$

avec

$$\sigma = \frac{\log \rho_3/\rho_1}{\log \rho_3/\rho_2}, \qquad \mu = 1 - \frac{1}{\sigma} = \frac{\log \rho_2/\rho_1}{\log \rho_3/\rho_1}. \tag{2}$$

Corollaire (inégalité de P. Lelong). – *Soient Ω une variété analytique connexe de dimension p, V une function plurisousharmonique sur $\Omega \times \mathbb{C}^n$ non constante sur au moins une fibre, et ω_1, ω_2 deux ouverts relativement compacts de Ω. Il existe une constante $\sigma > 1$ ne dépendant que de ω_1, ω_2, Ω, et une constante $R > 0$ dépendant en outre de V telles que*

$$M(V, \omega_2, r) \leqslant M(V, \omega_1, r^\sigma) \qquad \textit{pour } r \geqslant R. \tag{3}$$

2. Construction du fibré X

La base du fibré sera un ouvert connexe non vide Ω de $\mathbb{C}$. Nous nous intéresserons surtout au cas où Ω est un disque ou le plan, car si Ω n'est pas simplement connexe, on peut donner une construction plus simple avec des automorphismes polynomiaux localement constants (cf. [1] § 2, 3). Soient a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, six points distincts de Ω, et posons

$$\Omega_0 = \Omega \smallsetminus \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6\}, \qquad \Omega_k = \Omega_0 \cup \{a_k\}, \quad 1 \leqslant k \leqslant 6.$$

On définit un fibré X à fibre $\mathbb{C}^2$ au dessus de Ω par les cartes locales trivialisantes