UNIVERSITÉ JOSEPH FOURIER **Année 2014-2015**

Unité d'Enseignement MAT 231

Examen du mardi 23 juin 2015

Deuxième session

durée : 2h

Documents et calculatrices interdits

Sauf mention explicite du contraire, toutes les réponses doivent être soigneusement justifiées. La qualité de la rédaction sera un élément d'appréciation de la copie.

Dans tout ce sujet, $\mathbb{K}$ désigne un corps.

Questions de cours

1. Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ et F, G, H des sous-espaces vectoriels de E. Définir ce que signifie $E = F \oplus G \oplus H$.

2. Soit P un polynôme à coefficients réels. Soit λ une racine complexe de P. Montrer que le conjugué $\overline{\lambda}$ de λ est racine de P.

3. Quels sont les polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$?

4. À l'aide du lemme de Bezout, montrer les deux résultats suivants :

a. Pour tous $P, Q, R \in \mathbb{K}[X]$, si P et Q sont premiers entre eux et P divise QR, alors P divise R.

b. Pour tous $P, Q, R \in \mathbb{K}[X]$, si P et Q sont premiers entre eux et divisent R, alors PQ divise R.

5. Soit $f : E \to E$ un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie E. Soit λ une valeur propre de f. Définir la multiplicité algébrique m_λ et la multiplicité géométrique g_λ de λ. Montrer que $g_\lambda \leq m_\lambda$.

Exercice 1

Soient $A, B \in M_n(\mathbb{C})$. On note $P_A(X)$ et $P_B(X)$ leurs polynômes caractéristiques, éléments de $\mathbb{C}[X]$.

1. À l'aide de l'écriture de $P_A(X)$ et $P_B(X)$ en produit de monômes dans $\mathbb{C}[X]$, montrer que A et B n'ont pas de valeurs propres communes si et seulement si $P_A(B)$ est inversible.

2. Montrer l'équivalence entre les propriétés suivantes :

a. $P_A(B)$ est inversible.

b. $P_B(A)$ est inversible.

c. $P_A(X)$ et $P_B(X)$ sont premiers entre eux.

Exercice 2

Soient $n, p \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $p \geq 1$.

1. Déterminer le reste de la division euclidienne de X^n par $X^2 - X$ dans $\mathbb{K}[X]$.

2. Montrer que si une matrice diagonalisable $A \in M_p(\mathbb{K})$ a toutes ses valeurs propres égales à 0 ou 1, alors $A^n = A$.

3. L'implication précédente reste-t-elle vraie si A n'est pas supposée diagonalisable ?

4. Quelle est la nature géométrique des endomorphismes diagonalisables de $\mathbb{K}^p$ dans $\mathbb{K}^p$ n'ayant que 0 ou 1 comme valeurs propres ?

Exercice 3

Soit $\sigma \in S_6$ définie par $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 1 & 6 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Écrire σ comme produit de cycles disjoints.

2. Déterminer la signature de σ.

On note $(e_1, ..., e_6)$ la base canonique de $\mathbb{K}^6$. On considère l'endomorphisme f_σ de $\mathbb{K}^6$ défini par $f(e_i) = e_{\sigma(i)}$ pour tout $i = 1, ..., 6$.

3. Calculer $\det f_\sigma$.

4. Donner deux sous-espaces stricts de $\mathbb{K}^6$ stables par f_σ.

Exercice 4

On note $E = \mathbb{K}_2[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré au plus 2 à coefficients dans $\mathbb{K}$.

A. On considère l'application suivante :

$$f : \begin{array}{ll} E & \to E \\ P(X) & \mapsto P'(X) + P(0)X \end{array}$$

1. Montrer que f est un endomorphisme de E.

2. Déterminer $\operatorname{Im} f$.

3. Déterminer $\operatorname{Ker} f$.

4. Montrer que f est diagonalisable et trouver une base de vecteurs propres de f.

B. On considère l'application suivante :

$$g : \begin{array}{ll} E & \to E \\ P(X) & \mapsto P'(X^2) \end{array}$$

5. Montrer que g est un endomorphisme de E.

6. Déterminer $\operatorname{Ker} g$.

7. Déterminer le polynôme caractéristique P_g de g.

8. Montrer que g n'est pas diagonalisable.

9. Quel est le polynôme minimal de g ?