Université Grenoble Alpes **L2 Sciences** **2018-2019**
Unité d'Enseignement MAT 301

Feuille de TD 1

Combinaisons linéaires

Exercice 1

1. Montrer que dans $\mathbb{R}^3$, on a $\mathrm{vect}((1,1,0),(1,0,1)) = \mathrm{vect}((1,1,0)) + \mathrm{vect}((1,0,1))$.

2. Si A, B sont des parties d'un espace vectoriel E, on définit $A+B = \{u+v \,/\, u \in A,\ v \in B\}$. Si F, G sont des sous-espaces vectoriels de E, montrer que $F+G$ est un sous-espace vectoriel de E.

3. Montrer que si A, B sont des parties de E, on a $\mathrm{vect}(A \cup B) = \mathrm{vect}(A) + \mathrm{vect}(B)$.

Exercice 2

1. Soient (e_1, e_2, e_3) des vecteurs d'un espace vectoriel E. Montrer que $\mathrm{vect}(e_1, e_2, e_3) = \mathrm{vect}(e_2, e_2)$ si et seulement si e_3 est combinaison linéaire de e_1 et e_2.

2. Soient $(e_1, ..., e_n)$ une famille libre de vecteurs d'un espace vectoriel E. Soit $x \in E$. Montrer que $(e_1, ..., e_n, x)$ est liée si et seulement si x est combinaison linéaire de $e_1, ..., e_n$.

Somme directe, supplémentaire.

Exercice 3

Les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ suivant sont-ils en somme directe ?

1. $E = \mathrm{vect}((1,1,0))$, $F = \mathrm{vect}((-1,0,1))$

2. $E = \mathrm{vect}((1,1,0),(0,1,0))$, $F = \mathrm{vect}((-1,0,1),(0,0,1))$

3. $E = \mathrm{vect}((1,1,0),(0,1,0))$, $F = \mathrm{vect}((-1,0,1))$

4. $E = \mathrm{vect}((1,1,0),(0,1,0))$, $F = \mathrm{vect}((-1,1,0)$

Exercice 4

Donner un supplémentaire dans $\mathbb{R}^3$ des sous-espaces vectoriels E de $\mathbb{R}^3$ suivants :

a. $E = \mathrm{vect}((1,1,0),(-1,0,1))$ **b.** $E = \mathrm{vect}((1,-1,0))$
c. $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y-z=0\}$.

Exercice 5

1. On considère les sous-espaces vectoriels $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+2y+z=0\}$ et $G = \mathrm{vect}((1,-1,1))$ de $\mathbb{R}^3$. Montrer que G est un sous-espace vectoriel de F et donner un supplémentaire de G dans F.

2. Même question avec $F = \mathrm{vect}((0,1,1),(-1,1,0))$ et $G = \mathrm{vect}((1,0,1))$.

Exercice 6

(cours)
Soit $u : E \to F$ une application linéaire d'un espace vectoriel E dans un espace vectoriel F. Soit G un supplémentaire de $\mathrm{Ker}\, u$ dans E.

1. Montrer que l'application linéaire u' induite par restriction de u à G au départ et à $\mathrm{Im}\, u$ à l'arrivée est un isomorphisme.

2. En déduire le théorème du rang.

Exercice 7

Soit F un sous-espace vectoriel strict d'un espace vectoriel E de dimension finie.

1. Montrer qu'il existe une droite vectorielle de E en somme directe avec F.

2. Montrer que F possède un supplémentaire dans E.

Exercice 8

Soient F, G des sous-espaces vectoriels stricts d'un espace vectoriel E. Montrer qu'il existe une droite vectorielle de E en somme directe à la fois avec F et avec G.

Exercice 9

Soient F, G, H des sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E.
Montrer que F, G, H sont en somme directe si et seulement si G, H sont en somme directe et F est en somme directe avec $G \oplus H$.

Exercice 10

Soient E un espace vectoriel et F_i, $1 \leq i \leq s$ des sous-espaces de E de dimensions finies n_i, $b_i = (e_{i,1}, \ldots, e_{i,n_i})$ une base de F_i, et $F = \sum F_i$.

1. Si les F_i sont en somme directe et $F = F_1 \oplus \ldots \oplus F_s$, montrer que la famille b obtenue en "concaténant" les familles b_i est une base de F et en déduire que $\dim F = \sum n_i = \sum \dim F_i$.

2. Si les F_i ne sont pas en somme directe, montrer que b est une famille génératrice liée de F, et en déduire que $\dim F < \sum \dim F_i$.

3. Énoncer une condition nécessaire et suffisante sur $\dim F$ pour que la somme $\sum F_i$ soit directe.

Exercice 11

Soit E un espace vectoriel.

1. Montrer que si E est de dimension finie et si des sous-espaces vectoriels F, G vérifient $F \cap G = \{0\}$, alors $\dim F + \dim G \leq \dim E$.

2. Que peut-on dire si des sous-espaces vectoriels F_1, F_2, G_1, G_2 vérifient $E = F_1 \oplus F_2$, $F_1 \subset G_1$, $F_2 \subset G_2$ et $G_1 \cap G_2 = \{0\}$?

3. Que peut-on dire si des sous-espaces vectoriels $F_1, \ldots, F_k, G_1, \ldots, G_k$ vérifient $E = F_1 \oplus \ldots \oplus F_k = G_1 \oplus \ldots \oplus G_k$, $F_1 \subset G_1$,..., $F_k \subset G_k$?

Exercice 12

On note $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ l'espace des matrices carrées d'ordre 3 à coefficients dans $\mathbb{C}$.

1. Montrer que toute matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ se décompose en la somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique.

2. En déduire une décomposition de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ est somme directe de deux sous-espaces vectoriels.

Exercice 13

On note $\mathcal{A}([0,1], \mathbb{R})$ l'ensemble des applications de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$.

1. Donner des lois + et . qui font de $\mathcal{A}([0,1], \mathbb{R})$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

2. Montrer que $F = \{f \in \mathcal{A}([0,1], \mathbb{R}) \mid f(1) = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{A}([0,1], \mathbb{R})$.

3. Donner un supplémentaire de F dans $\mathcal{A}([0,1], \mathbb{R})$.

Université Grenoble Alpes **L2 Sciences** **2018-2019**

Unité d'Enseignement MAT 301

Feuille de TD 2

Applications linéaires.

Exercice 1

(complément de cours)
Soit $f : E \to F$ une application linéaire entre espaces vectoriels de dimension finie.

1. Montrer que f est injective si et seulement si il existe une base $\mathcal{B}$ de E dont l'image par f est une famille libre de F.

2. Montrer que f est injective si et seulement si l'image de toute base de E est une famille libre de F.

3. Montrer que f est surjective si et seulement si il existe une base $\mathcal{B}$ de E dont l'image par f est une famille génératrice de F.

4. Montrer que f est surjective si et seulement si l'image de toute base de E est une famille génératrice de F.

5. Montrer que f est bijective si et seulement si il existe une base $\mathcal{B}$ de E dont l'image par f est une base de F.

6. Montrer que f est bijective si et seulement si l'image de toute base de E est une base de F.

7. En déduire que si f est bijective, alors $\dim E = \dim F$.

Exercice 2

1. Donner un endomorphisme $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ pour lequel $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$ ne sont pas en somme directe.

2. Donner un endomorphisme $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ pour lequel $\mathbb{R}^2 = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f$.

Sous-espaces stables par un endomorphisme.

On rappelle qu'un sous-espace S d'un espace vectoriel E est dit *stable* par un endomorphisme $f : E \to E$ si $f(S) \subset S$.

Exercice 3

On considère l'application linéaire suivante :

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \qquad (x, y, z) \mapsto (3x + 2y - 2z, z, 4x + 3y - 2z)$$

1. Donner la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

2. Les sous-espaces vectoriels suivants sont-ils stables par f ?
a. $A = \operatorname{vect}((1, -1, 0))$ **b.** $B = \operatorname{vect}((1, -1, 1))$ **c.** $C = \operatorname{vect}((0, 1, 1))$
d. $D = \operatorname{vect}((0, 1, 1), (1, 0, 1))$ **e.** $E = \operatorname{vect}((1, 0, 1))$

3. Montrer que $\mathbb{R}^3 = B \oplus D$ et que $\mathcal{B} = ((1, -1, 1), (0, 1, 1), (1, 0, 1))$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

4. Montrer qu'aucun supplémentaire de C dans D n'est stable par f et déterminer la matrice de $f_{|D}$ dans la base $\mathcal{B}_{|D} = ((0, 1, 1), (1, 0, 1))$ de D.

5. Déterminer la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$.

Exercice 4

On considère l'application linéaire suivante :

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \qquad (x, y, z) \mapsto (x + y - z, -2x - y + 2z, y)$$

1. Donner la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

2. Montrer que les sous-espaces vectoriels suivants sont stables par f :
a. $A = \mathrm{vect}((1, 0, 1))$ **b.** $B = \mathrm{vect}((0, 1, 1), (1, 1, 3))$

3. Montrer que B se décompose comme somme directe de deux sous-espaces stables par f.

4. a. Montrer que $\mathbb{R}^3$ est somme directe de trois droites stables par f.
b. Déterminer la matrice de f dans une base de $\mathbb{R}^3$ adaptée à cette décomposition en somme directe (c'est-à-dire une base de $\mathbb{R}^3$ formée de la réunion de bases de chacune des droites).

Exercice 5

Soit $f : E \to E$ un endomorphisme. On note $f^0 = \mathrm{Id}$ et par récurrence pour tout entier p, on note $f^{p+1} = f^p \circ f$.

1. Montrer que $\mathrm{Ker}\, f \subset \mathrm{Ker}\, f^2 \subset ... \subset \mathrm{Ker}\, f^p \subset ...$ et que chacun de ces sous-espaces vectoriels de E est stable par f.

2. Montrer que $\mathrm{Ker}(\mathrm{Id} + f)$, $\mathrm{Ker}(2\,\mathrm{Id} - f + f^2)$ sont stables par f.

3. Montrer que pour tout entier p on a $\mathrm{Im}\, f^{p+1} \subset \mathrm{Im}\, f^p$ et que ces sous-espaces sont stables par f.

Exercice 6

Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ vérifiant $f^2 - 3f + 2\,\mathrm{Id} = 0$. Montrer que $R^n = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}) \oplus \mathrm{Ker}(f - 2\,\mathrm{Id})$ et que ces deux noyaux sont stables par f.

Université Grenoble Alpes **2018-2019**

Unité d'Enseignement MAT 301

Feuille de TD 3

Projections linéaires.

Exercice 1

On considère l'application linéaire suivante :

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \qquad (x,y,z) \mapsto (y+z, x-z, -x+y+2z)$$

1. Donner la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

2. a. Par un calcul matriciel, montrer que f est une projection de $\mathbb{R}^3$ sur un sous-espace vectoriel F parallèlement à un sous-espace vectoriel G.
b. Déterminer des bases $\mathcal{B}_F$ et $\mathcal{B}_G$ de F et G.

3. Déterminer la matrice de f dans la base $\mathcal{B} = \mathcal{B}_F \cup \mathcal{B}_G$ de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 2

On considère l'application linéaire f de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}} f = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que $\mathcal{B} = ((1,-1,0),(1,0,1),(-1,1,1))$ forme un base de $\mathbb{R}^3$.

2. Déterminer la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$.

3. En déduire que f est une projection, dont on déterminera le noyau et l'image (par des bases).

Exercice 3

Soit E un espace vectoriel.

1. Montrer qu'un endomorphisme p de E est un projecteur si et seulement si $\mathrm{Id} - p$ est un projecteur.

On suppose désormais que p est un projecteur de E.

2. Montrer que $\mathrm{Ker}(\mathrm{Id} - p) = \mathrm{Im}\, p$ et $\mathrm{Im}(\mathrm{Id} - p) = \mathrm{Ker}\, p$.

3. Montrer qu'un endomorphisme u de E commute avec p si et seulement si $u(\mathrm{Ker}\, p) \subset \mathrm{Ker}\, p$ et $u(\mathrm{Im}\, p) \subset \mathrm{Im}\, p$.

Exercice 4

Notation : si f est une application d'un ensemble E dans un ensemble F, si A est une partie de E et B une partie de F telles que $f(A) \subset B$, on notera f' la restriction de f à A au départ et à B à l'arrivée (f' est ainsi une application de A dans B).

Soit $f : E \to E$ un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie n. Soit $E = F \oplus G$ une décomposition de E en somme directe de deux sous-espaces vectoriels. On note $k = \dim F$ et $l = \dim G$. Soient $\mathcal{B}_F$ et $\mathcal{B}_G$ des bases de F et G. On note $\mathcal{B} = \mathcal{B}_F \cup \mathcal{B}_G$ et :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\, f = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

la matrice par bloc de f dans la base $\mathcal{B}$, la sous-matrice A étant carrée de taille k par k.

1. Montrer que A est la matrice de l'endomorphisme $p_{F,G} \circ f'$ dans la base $\mathcal{B}_F$, où $p_{F,G}$ désigne la projection sur F parallèlement à G.

2. À l'aide de projections linéaires, déterminer des applications linéaires dont B, C, D sont des matrices dans des bases bien choisies.

Université Grenoble Alpes **L2 Sciences** **2018-2019**

Unité d'Enseignement MAT 301

Feuille de TD 4

Permutations.

Exercice 1

Décomposer les permutations suivantes de S_7 en produit de cycles disjoints (c'est-à-dire de supports disjoints) et donner leurs signatures :

1. $\sigma = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 4 & 3 & 1 & 6 & 7 & 5 \end{bmatrix}$.

2. $\sigma = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 7 & 1 & 6 & 5 & 4 & 2 \end{bmatrix}$.

Exercice 2

On considère la permutation σ de S_5 suivante :

$$\sigma = (2\ 3)(1\ 2)(2\ 5)(1\ 3)(2\ 4)(1\ 4)(3\ 5).$$

Déterminer la décompostion en produit de cycles disjoints et la signature de σ.

Exercice 3

Soit $n \geq 2$.

1. Montrer que S_n muni de la composée des applications est un groupe.

2. Montrer qu'il y a autant de permutations paires que de permutations impaires dans S_n.

Déterminants.

Exercice 4

Soit $A = (C_1\ C_2\ C_3)$ une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{K})$.

1. Exprimer en fonction de $\det A$ les déterminants des matrices suivantes :
a. $(C_1\ \ 2C_2 - C_3\ \ C_3)$. **b.** $(C_2\ \ -C_3\ \ C_1)$. **c.** $(C_1 - C_2\ \ C_2 - C_3\ \ C_1)$.
d. $(C_2 - C_1\ \ C_3 - C_2\ \ C_3)$. **e.** $(C_1 - C_2\ \ C_2 - C_3\ \ C_3 - C_1)$.

Exercice 5

1. Montrer sans le calculer que le déterminant $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 6 & 3 & 6 \\ 4 & 0 & 4 \end{vmatrix}$ est un entier multiple de 24.

2. Sachant que 13 divise 546, 273 et 169, montrer que 13 divise $\begin{vmatrix} 5 & 4 & 6 \\ 2 & 7 & 3 \\ 1 & 6 & 9 \end{vmatrix}$.

Exercice 6

Calculer les déterminants des matrices suivantes :

a. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -4 \\ 4 & -1 & 4 \end{pmatrix}$ **b.** $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

c. $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 3 \\ 4 & -3 & 1 & 4 \\ -2 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ **d.** $D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ **e.** $E = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Exercice 7

Soient $a, b, c, d, a_1, a_2, ..., a_n \in \mathbb{C}$. Calculer les déterminants suivants et donner une condition nécessaire et suffisante à leur annulation :

a. $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & a_1 & a_2 \\ a_1 & a_1 & a_1 \end{vmatrix}$ **b.** $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_1 & a_1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_2 \\ a_1 & \dots & a_1 & a_1 \end{vmatrix}$ **c.** $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a & a \\ 1 & a & 0 & b \\ 1 & a & b & 0 \end{vmatrix}$

d. $\begin{vmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{vmatrix}$ **e.** $\begin{vmatrix} 1 & a & b & ab \\ 1 & c & b & bc \\ 1 & a & d & ad \\ 1 & c & d & cd \end{vmatrix}$ **f.** $\begin{vmatrix} -a & b & c & d \\ b & -a & d & c \\ c & d & -a & b \\ d & c & b & -a \end{vmatrix}$.

Exercice 8

Calculer les déterminants suivants :

a. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ **b.** $\begin{vmatrix} a+b & a & \dots & a \\ a & a+b & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a \\ a & \dots & a & a+b \end{vmatrix}$ avec $a, b \in \mathbb{C}$.

Exercice 9

(déterminant de Van der Monde)

1. Soient $a, b, c \in \mathbb{C}$. Calculer les déterminants suivants et donner une condition nécessaire et suffisante à leur annulation :

a. $\begin{vmatrix} 1 & a \\ 1 & b \end{vmatrix}$ **b.** $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$

2. Soient $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$. Montrer que :

$$\begin{vmatrix} 1 & a_1 & \dots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & \dots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & a_n & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \le i < j \le n} (a_j - a_i).$$

Indication : remplacer la colonne C_i par $C_i - a_n C_{i-1}$ pour $i = n, \dots, 2$.

Feuille de TD 5

Exercice 1

Combien y a-t-il de mineurs 3×3 dans une matrice de taille 4×3 ? 4×4 ? 7×5 ?

Exercice 2

Soient $a, b \in \mathbb{K}$. Déterminer le rang de la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & a & b & 1 \\ 1 & b & a & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 3

Déterminer en fonction du paramètre $m \in \mathbb{C}$ le rang de la matrice suivante :

$$M = \begin{pmatrix} m+1 & 1 & m+1 \\ 1 & m+1 & m+1 \\ m & 2m & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 4

Soient $x \in \mathbb{K}$ et $n \geq 2$ un entier. On considère la matrice suivante de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$:

$$A(n) = \begin{pmatrix} 1 & x & x^2 & \dots & x^{n-1} \\ x & 1 & x & \dots & x^{n-2} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ x^{n-2} & x^{n-3} & \ddots & 1 & x \\ x^{n-1} & x^{n-2} & \dots & x & 1 \end{pmatrix}.$$

On note $\Delta(n) = \det A(n)$ et $\Delta_{i,j}(n)$ le mineur $(n-1) \times (n-1)$ obtenu en rayant la ligne i et la colonne j $(1 \leq i, j \leq n)$.

1. Calculer les mineurs $\Delta_{1,1}(n)$ et $\Delta_{2,1}(n)$ en fonction de $\Delta(n-1)$.

2. Montrer que pour $i \geq 3$, le mineur $\Delta_{i,1}(n)$ est nul.

3. Calculer $\Delta(n)$.

4. Déterminer le rang de $A(n)$ en fonction de x.

Exercice 5

Soit $n \geq 3$ un entier. On considère la matrice $M_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ suivante :

$$M_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ -1 & x & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & x & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & x & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & x \end{vmatrix}.$$

On note $\Delta_n = \det M_n$.

1. Calculer Δ_3.

2. Donner une relation de récurrence entre Δ_n et Δ_{n-1}. En déduire Δ_n.

3. Déterminer le rang de M_n.

Exercice 6

On considère une matrice $(n+p) \times (n+p)$ à coefficients dans un corps $\mathbb{K}$, de la forme

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

avec A de taille $n \times n$, B de taille $n \times p$, C de taille $p \times n$, D de taille $p \times p$.

1. On dit que M est "triangulaire supérieure par blocs" si $C = 0$, autrement dit, si les coefficients m_{ij} de M vérifient $m_{ij} = 0$ pour $n+1 \leq i \leq n+p$ et $1 \leq j \leq n$. Si σ est une permutation de $\{1, \ldots, n+p\}$ telle que $\sigma(i) \leq n$ pour $i \leq n$, montrer que σ se décompose en une permutation σ' de $\{1, \ldots, n\}$ et une permutation σ'' de $\{n+1, \ldots, n+p\}$. En déduire que

$$\det(M) = \det(A)\det(D),$$

et démontrer le résultat analogue lors que M est triangulaire inférieure par blocs ($B = 0$).

2. En général, si A est inversible, montrer que

$$\det(M) = \det(A)\det(D - CA^{-1}B).$$

(Multiplier M à gauche par une matrice triangulaire inférieure adéquate de blocs diagonaux égaux aux matrices unités, de façon que le produit soit une matrice triangulaire supérieure par blocs).

3. Montrer par récurrence sur s que le déterminant d'une matrice triangulaire (par exemple supérieure) par blocs

$$M = \begin{pmatrix} A_1 & B_{12} & B_{13} & \ldots & B_{1s} \\ 0 & A_2 & B_{23} & \ldots & B_{2s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & A_{s-1} & B_{s-1s} \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & A_s \end{pmatrix},$$

où A_i est carrée $n_i \times n_i$ et B_{ij} rectangulaire $n_i \times n_j$, est donné par

$$\det(M) = \det(A_1) \ldots \det(A_s).$$

Université Grenoble Alpes **L2 Sciences** **2018-2019**

Unité d'Enseignement MAT 301

Feuille de TD 6

Éléments inversibles et irréductibles dans les anneaux.

Tous les anneaux sont supposés commutatifs et unitaires.

Exercice 1

(Nota: Le but de cet exercice est de montrer l'existence d'un anneau "bizarre" où la décomposition en facteurs irréductibles n'est pas unique, afin de voir que cette propriété n'est pas une évidence en soi.)

On désigne par $A = \mathbb{Z}[i\sqrt{5}]$ l'ensemble des nombres complexes de la forme $z = a + bi\sqrt{5}$ avec $a, b \in \mathbb{Z}$.

1. Montrer que $(A, +, \times)$ est un anneau intègre et que si on définit $N(z) = |z|^2$ alors N définit une application $A \to \mathbb{N}$ telle que $N(zz') = N(z)N(z')$.

2. Déterminer les éléments inversibles z de A (en montrant d'abord qu'un tel élément z vérifie nécessairement $N(z) = 1$).

3. Déterminer explicitement tous les éléments $z \in A$ tels que $N(z) = p$ avec $p = 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18$ (à savoir les diviseurs entiers de 36 autres que 1 et 36).

4. Montrer que l'élément 6 admet dans A les deux décompositions en éléments irréductibles

$$6 = 2 \times 3 = (1 + i\sqrt{5}) \times (1 - i\sqrt{5}),$$

que ces décompositions ne sont pas équivalentes (aux inversibles près), et qu'il n'y a pas d'autres décompositions de 6 dans A (à l'ordre près des facteurs, et à éléments inversibles près).

5. On considère l'ensemble I des éléments $z = a+bi\sqrt{5}$ tels que a et b sont de même parité (tous les deux pairs, ou tous les deux impairs). Montrer que I est un idéal de A et que $I = (2, 1+i\sqrt{5})$. Montrer que I n'est pas un idéal principal (g) (on pourra considérer les valeurs possibles de $N(g)$ et en déduire que $N(g)$ devrait diviser à la fois 4 et 6, ce qui conduit à une contradiction).

Exercice 2

Soit $(A, +, \times)$ un anneau intègre et I un idéal de A. On suppose que I est principal et s'écrit $I = (g)$ ou $I = (g')$ (c'est-à-dire que g et g' sont des générateurs de I). Montrer qu'alors $g' = ug$ avec u inversible, et inversement, que si c'est le cas, alors $(g) = (g')$.

Polynômes.

Exercice 1

1. Faire la division euclidienne de $X^4 + 2X^3 + 2X + 1$ par $X^2 - 1$, puis par $X^2 + 1$, dans $\mathbb{R}[X]$.

2. Déterminer le reste de la division euclidienne de $X^{2016} + 1$ par $X^2 - 1$ puis par $X^2 + 1$ dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 2

Montrer que les applications suivantes sont linéaires :

1. $f : \mathbb{K}[X] \to \mathbb{K}[X]$, $P \mapsto P'$ où P' désigne le polynôme dérivé de P.

2. $f_{x_0} : \mathbb{K}[X] \to \mathbb{K}$, $P \mapsto P(x_0)$ où $P(x_0)$ désigne l'évaluation du polynôme P en un élément donné $x_0 \in \mathbb{K}$.

3. $f_Q : \mathbb{K}[X] \to \mathbb{K}[X]$, $P \mapsto R$ où R désigne le reste de la division euclidienne de P par un élément donné $Q \in \mathbb{K}(X]$.

Exercice 3

Soit $P(X) = X^4 + X^3 + 2X^2 + X + 1 \in \mathbb{R}[X] \subset \mathbb{C}[X]$.

1. Montrer que i est racine du polynôme $P(X)$ dans $\mathbb{C}$. En déduire une autre racine complexe de P.

2. Donner la décomposition de $P(X)$ en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 4

Pour quelles valeurs de $a, b \in \mathbb{R}$ le polynôme $P(X) = X^5 - 2X^3 + X^2 + aX + b$ est-il divisible par le polynôme $Q(X) = X^2 - 1$ dans $\mathbb{R}[X]$? Dans un tel cas, déterminer le quotient de P par Q.

Exercice 5

Soient $a, b \in \mathbb{C}$ et $P(X) = X^4 + aX^3 + (b-1)X^2 - aX - b$.

1. Montrer que 1 et -1 sont racines du polynôme P. En déduire que $X^2 - 1$ divise $P(X)$.

2. Calculer $P'(1)$ et $P'(-1)$ (où P' désigne le polynôme dérivé de P).

3. Pour quelles valeurs de a et b le polynôme $X^4 + aX^3 + (b-1)X^2 - aX - b$ est-il le carré d'un polynôme de $\mathbb{C}[X]$?

Exercice 6

Écrire la décomposition dans $\mathbb{R}[X]$ et dans $\mathbb{C}[X]$ des polynômes suivants en produit de polynômes irréductibles :

a. $2X^2 - X - 1$ **b.** $X^3 + 1$ **c.** $X^6 - 1$ **d.** $X^3 - 5X^2 + 3X + 9$
e. $(X^2 - X + 2)^2 - 1$ **f.** $X^8 + X^4 + 1$.

Université Grenoble Alpes **L2 Sciences** **2018-2019**

Unité d'Enseignement MAT 301

Feuille de TD 7

Arithmétique dans $\mathbb{Z}$ et dans $\mathbb{K}[X]$

Exercice 1

(Notion d'idéal produit) Soit $(A, +, \times)$ un anneau commutatif unitaire et I, J des idéaux de A. On note IJ l'ensemble des éléments de la forme $\sum_{k=1}^{N} x_k y_k$ avec $x_k \in I$ et $y_k \in J$.

1. Montrer que IJ est un idéal et que $IJ \subset I \cap J$.

2. Lorque A est un anneau principal et $I = (p)$, $J = (q)$, expliciter ce que sont les idéaux IJ et $I \cap J$.

3. Donner un exemple dans $A = \mathbb{Z}$ (resp. dans $A = \mathbb{K}[X]$) où on a $I \neq J$ et $IJ \neq I \cap J$.

Exercice 2

Soit $(A, +, \times)$ un anneau principal. Utiliser la propriété de factorisation en produit d'éléments irréductibles pour démontrer les résultats suivants.

1. Si x^m divise y^m (avec $x, y \in A \setminus \{0\}$ et $m \in \mathbb{N}^*$), alors x divise y.

2. Si $x, y \in A \setminus \{0\}$ sont premiers entre eux et s'il existe $z \in A \setminus \{0\}$ tel que $xy = z^m$, alors on peut écrire $x = u' z'^m$ et $y = u'' z''^m$ avec $z = z' z''$ et $u' u'' = 1$.

3. Si $a \in \mathbb{N}^*$, prouver que $\sqrt[m]{a}$ est un rationnel si et seulement si $a = b^m$ avec $b \in \mathbb{N}^*$, de sorte qu'on a alors $\sqrt[m]{a} = b \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 3

(Triplets pythagoriciens) On se propose de déterminer tous les triangles rectangles dont les longueurs des côtés sont des multiples entiers de l'unité, c'est-à-dire tous les triplets (a, b, c) d'entiers strictement positifs tels que $a^2 + b^2 = c^2$.

1. Soit $d = \mathrm{pgcd}(a, b)$. Montrer que $d | c$, et se ramener ainsi au cas d'un triplet (α, β, γ) avec $\alpha^2 + \beta^2 = \gamma^2$ avec $\mathrm{pgcd}(\alpha, \beta) = 1$. Montrer que l'on a alors aussi $\mathrm{pgcd}(\alpha, \gamma) = 1$ et $\mathrm{pgcd}(\beta, \gamma) = 1$.

2. Montrer que α et β ne peuvent pas être tous deux impairs en étudiant la divibilité de γ^2 par 2 et 4, et en déduire que γ est impair.

3. Quitte à permuter éventuellement α et β, on suppose α impair et β pair et on écrit $\beta^2 = (\gamma + \alpha)(\gamma - \alpha)$. Montrer que $(\gamma + \alpha)/2$ et $(\gamma - \alpha)/2$ sont premiers entre eux.

4. En déduire qu'il existe $r, s \in \mathbb{N}^*$ tels que $(\gamma + \alpha)/2 = r^2$ et $(\gamma - \alpha)/2 = s^2$.

5. Montrer qu'à permutation près de (a, b), les triplets Pythagoriciens sont les entiers de la forme

$$a = d(r^2 - s^2), \qquad b = 2drs, \qquad c = d(r^2 + s^2)$$

avec $d, r, s \in \mathbb{N}^*$, r, s premiers entre eux, et $r > s$.

6. Montrer que dans l'anneau $\mathbb{C}[X]$, les triplets pythagoriciens, c'est-à-dire les polynômes non nuls tels que $A^2 + B^2 = C^2$ sont encore exactement de la forme précédente (avec $D, R, S \in \mathbb{C}[X] \setminus \{0\}$).

Exercice 4

1. Utiliser l'algorithme d'Euclide pour déterminer le pgcd $D(X)$ (choisi unitaire) des polynômes $A(X)$, $B(X) \in \mathbb{Q}[X]$ tels que

$$A(X) = X^4 + X^3 - X^2 - 2X - 2, \qquad B(X) = X^5 + X^4 + X^3 - 3X^2 - 3X - 3.$$

2. Calculer $A(X)/D(X)$ et $B(X)/D(X)$ dans $\mathbb{Q}(X)$ et expliciter le ppcm de $A(X)$ et $B(X)$.

3. Déterminer des polynômes $U(X)$, $V(X) \in \mathbb{Q}[X]$ tels que $D(X) = U(X)A(X)+V(X)B(X)$.

4. Déterminer les racines de $A(X)$ et $B(X)$ dans chacun des trois corps $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ et leurs dcompositions en polynômes irréductibles dans $\mathbb{Q}[X]$, resp. $\mathbb{R}(X)$, resp. $\mathbb{C}[X]$.

Congruences et théorème chinois

Exercice 5

Déterminer tous les éléments $x \in \mathbb{Z}$ tels que

$$x \equiv 3 \bmod 7, \qquad x \equiv -2 \bmod 11.$$

Exercice 6

Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{Q}[X]$ tels que

$$P \equiv 1 \bmod X^2 + 1, \qquad P \equiv X \bmod X^2 + X + 1.$$

Université Grenoble Alpes **L2 Sciences** **2018-2019**

Unité d'Enseignement MAT 301

Feuille de TD 8

Espaces propres, valeurs propres.

Exercice 1

On note $E = \mathbb{K}_2[X]$ le sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$ formé des polynômes de degré au plus 2. On considère l'application suivante :

$$F : \mathbb{K}[X] \to \mathbb{K}[X], \qquad P(X) \mapsto P'(X) + P(0)X$$

où P' désigne le polynôme dérivée de P.

1. Montrer que E est stable par F. On notera f l'endomorphisme de E induit par restriction de F à E.

2. Déterminer $\operatorname{Im} f$.

3. Déterminer $\operatorname{Ker} f$.

4. Déterminer la matrice de f dans la base canonique de E.

5. Déterminer le polynôme caractéristique et les valeurs propres de f.

6. Montrer que f est diagonalisable et trouver une base de vecteurs propres de f.

Exercice 2

Dans l'espace vectoriel $E = \mathbb{K}[X]$ de dimension infinie, on note $F = \mathbb{K}_3[X]$ le sous-espace vectoriel formé des polynômes de degre au plus 3 et G l'ensemble des polynômes divisibles par X^4.

1. Montrer que G est un sous-espace vectoriel de E et que $E = F \oplus G$.

On considère l'application suivante :

$$f : E \to E, \qquad P(X) \mapsto P(X^2).$$

2. Montrer que f est linéaire et que les seuls vecteurs propres de f sont les polynômes de degré 0.

3. Quels sont les sous-espaces vectoriels de E de dimension finie stables par f ?

Réduction des endomorphismes.

Exercice 3

1. On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est :

$$\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}_{can}} f = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

a. Déterminer les valeurs propres de f et leur multiplicité algébrique.

b. Donner une base de chaque espace propre de f et la multiplicité géométrique des valeurs propres.

c. L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

d. Si oui, donner une base de vecteurs propres, la matrice de f dans cette base, la matrice de changement de base de la base canonique vers cette base et son inverse.

2. Même question que la question précédente pour :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_{can}} f = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 12 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

3. Même question que les questions précédentes pour l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^4$ de matrice :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_{can}} f = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \\ -5 & 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}.$$

Exercice 4

On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$ est :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}} f = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer les valeurs propres de f.

2. L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

3. Montrer qu'on peut trouver deux vecteurs propres f_1, f_2 de f tels que $\mathcal{B}' = (f_1, f_2, e_1)$ forme une base de $\mathbb{R}^3$.

4. Déterminer la matrice de f dans la base $\mathcal{B}'$.

Université Grenoble Alpes | **L2 Sciences** | **2018-2019**

Unité d'Enseignement MAT 301

Feuille de TD 9

Réduction des endomorphismes (suite).

Exercice 1

Soit $d \geq 2$ un entier. On note $E = \mathbb{K}_d[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients dans un corps $\mathbb{K}$ de degré au plus d. Soit $Q \in \mathbb{K}[X] \setminus \{0\}$. On considère l'application $\Phi_Q : E \to E$ qui à un polynôme de E associe le reste de sa division euclidienne par Q.

1. Montrer que Φ_Q est bien définie et linéaire.

2. On considère dans cette question le cas $d = 2$ et $Q(X) = X^2 - 1$.
 a. Montrer que Φ_Q est diagonalisable.
 b. Quelle est la nature géométrique de Φ_Q ? Quel est son polynôme minimal ?

3. Mêmes questions pour d et Q quelconques.

4. Mêmes questions pour l'application $\Phi_a : E \to E$ qui à un polynôme $P \in E$ associe le polynôme constant $P(a)$, pour $a \in \mathbb{K}$ fixé.

Exercice 2

Soit A une matrice triangulaire dont les éléments diagonaux sont deux à deux distincts.
Montrer que A est diagonalisable.

Exercice 3

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On suppose que A ne possède qu'une seule valeur propre.
Montrer que A est diagonalisable si et seulement si A est diagonale.

2. Soit $f : E \to E$ un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. On suppose que f n'a qu'une valeur propre λ. Montrer que f est diagonalisable si et seulement si f est l'homothétie de rapport λ.

3. Soit f un endomorphisme nilpotent d'un espace vectoriel E de dimension finie.
Montrer que f est diagonalisable si et seulement si $f = 0$.
Indication : utiliser la question précédente.

Exercice 4

Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie n sur un corps $\mathbb{K}$, tel que le polynôme minimal de f soit $(X - \lambda)^n$ avec $\lambda \in \mathbb{K}$.

1. Montrer que $g = f - \lambda \operatorname{Id}_E$ possde un vecteur cyclique v, c'est-à-dire un vecteur v de E tel que $\mathcal{B} = (v, g(v), \dots, g^{n-1}(v))$ soit une base de E.

2. Déterminer les matrices de g et f dans la base $\mathcal{B}$.

3. Montrer que $\mathcal{B}' = (v, f(v), \dots, f^{n-1}(v))$ est aussi une base de E et déterminer la matrice de f dans $\mathcal{B}'$.

Exercice 5

1. Soit $f : E \to E$ un endomorphisme dont le polynôme caractéristique est $(X + 1)^2(X - 2)^3$.
Quel peut être le polynôme minimal de f ?

2. Déterminer les polynômes caractéristiques et minimaux des matrices suivantes :

a. $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ **b.** $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ **c.** $C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

d. $D = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ **e.** $E = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ **f.** $F = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Exercice 6

Déterminer les polynômes minimaux des matrices suivantes (voir la feuille de TD précédente) :

a. $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ **b.** $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 12 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$ **c.** $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \\ -5 & 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$

d. $D = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ **e.** $E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ -3 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 7

Montrer sans le théorème de Cayley-Hamilton que l'ensemble des polynômes annulateurs d'une matrice de $M_n(\mathbb{K})$ est un idéal de $\mathbb{K}[X]$ non réduit à 0.

Exercice 8

On considère la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

(voir exercice précédent).
Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer A^n de deux façon différentes :

1. En diagonalisant A sous la forme $A = P^{-1}DP$ avec D diagonale.

2. En faisant la division euclidienne de X^n par le polynôme minimal de A.

Exercice 9

1. Déterminer le p.g.c.d. unitaire de $X^3 - 1$ et $X^2 - 2X + 1$ dans $\mathbb{R}[X]$.

2. Montrer que le seul endomorphisme d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel annulé par $X^3 - 1$ et par $X^2 - 2X + 1$ est l'endomorphisme identité.

Exercice 10

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que 0 est racine simple de P. On notera $P(X) = XQ(X)$.

1. Montrer que X et $Q(X)$ sont premiers entre eux et déterminer $U(X), V(X) \in \mathbb{K}[X]$ tels que $U(X)X + V(X)Q(X) = 1$. En déduire que X est p.g.c.d. de X^2 et $P(X)$ et déterminer des polynômes $S(X), T(X) \in \mathbb{K}[X]$ tels que $S(X)X^2 + T(X)P(X) = X$.

2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que P soit un polynôme annulateur de A. Montrer que $\operatorname{Ker} A = \operatorname{Ker} A^2$.

Exercice 11

Redémontrer directement par récurrence sur n que tout endomorphisme f d'un espace vectoriel de dimension n sur $\mathbb{C}$ est triangulable, et en déduire le théorème de Cayley-Hamilton (également par récurrence, en considérant un vecteur propre et le bloc $(n-1) \times (n-1)$ contenant le reste de la diagonale principale).