Unité d'Enseignement MAT 301

Feuille de TD 5

Exercice 1

Combien y a-t-il de mineurs 3×3 dans une matrice de taille 4×3 ? 4×4 ? 7×5 ?

Exercice 2

Soient $a, b \in \mathbb{K}$. Déterminer le rang de la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & a & b & 1 \\ 1 & b & a & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 3

Déterminer en fonction du paramètre $m \in \mathbb{C}$ le rang de la matrice suivante :

$$M = \begin{pmatrix} m+1 & 1 & m+1 \\ 1 & m+1 & m+1 \\ m & 2m & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 4

Soient $x \in \mathbb{K}$ et $n \geq 2$ un entier. On considère la matrice suivante de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$:

$$A(n) = \begin{pmatrix} 1 & x & x^2 & \dots & x^{n-1} \\ x & 1 & x & \dots & x^{n-2} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ x^{n-2} & x^{n-3} & \ddots & 1 & x \\ x^{n-1} & x^{n-2} & \dots & x & 1 \end{pmatrix}.$$

On note $\Delta(n) = \det A(n)$ et $\Delta_{i,j}(n)$ le mineur $(n-1) \times (n-1)$ obtenu en rayant la ligne i et la colonne j $(1 \leq i, j \leq n)$.

1. Calculer les mineurs $\Delta_{1,1}(n)$ et $\Delta_{2,1}(n)$ en fonction de $\Delta(n-1)$.

2. Montrer que pour $i \geq 3$, le mineur $\Delta_{i,1}(n)$ est nul.

3. Calculer $\Delta(n)$.

4. Déterminer le rang de $A(n)$ en fonction de x.

Exercice 5

Soit $n \geq 3$ un entier. On considère la matrice $M_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ suivante :

$$M_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ -1 & x & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & x & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & x & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & x \end{vmatrix}.$$

On note $\Delta_n = \det M_n$.

1. Calculer Δ_3.

2. Donner une relation de récurrence entre Δ_n et Δ_{n-1}. En déduire Δ_n.

3. Déterminer le rang de M_n.

Exercice 6

On considère une matrice $(n+p) \times (n+p)$ à coefficients dans un corps $\mathbb{K}$, de la forme

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

avec A de taille $n \times n$, B de taille $n \times p$, C de taille $p \times n$, D de taille $p \times p$.

1. On dit que M est "triangulaire supérieure par blocs" si $C = 0$, autrement dit, si les coefficients m_{ij} de M vérifient $m_{ij} = 0$ pour $n+1 \leq i \leq n+p$ et $1 \leq j \leq n$. Si σ est une permutation de $\{1, \ldots, n+p\}$ telle que $\sigma(i) \leq n$ pour $i \leq n$, montrer que σ se décompose en une permutation σ' de $\{1, \ldots, n\}$ et une permutation σ'' de $\{n+1, \ldots, n+p\}$. En déduire que

$$\det(M) = \det(A) \det(D),$$

et démontrer le résultat analogue lors que M est triangulaire inférieure par blocs ($B = 0$).

2. En général, si A est inversible, montrer que

$$\det(M) = \det(A) \det(D - CA^{-1}B).$$

(Multiplier M à gauche par une matrice triangulaire inférieure adéquate de blocs diagonaux égaux aux matrices unités, de façon que le produit soit une matrice triangulaire supérieure par blocs).

3. Montrer par récurrence sur s que le déterminant d'une matrice triangulaire (par exemple supérieure) par blocs

$$M = \begin{pmatrix} A_1 & B_{12} & B_{13} & \ldots & B_{1s} \\ 0 & A_2 & B_{23} & \ldots & B_{2s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & A_{s-1} & B_{s-1s} \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & A_s \end{pmatrix},$$

où A_i est carrée $n_i \times n_i$ et B_{ij} rectangulaire $n_i \times n_j$, est donné par

$$\det(M) = \det(A_1) \ldots \det(A_s).$$