Corrigé de l'examen du 24 juin 2019

Le sujet était assez long, et un barème sur 28 points a été appliqué :
1 [*7 points*; (a) → 2 (b) → 2 (c) → 3],
2 [*6 points*; (a) → 2 (b) → 2 (c) → 2],
3 [*6 points*; (a) → 2 (b) → 2 (c) → 2],
4 [*9 points*; (a) → 2 (b) → 4 (c) → 3].

14 étudiants ont composé, les notes s'échelonnent entre 6 et 19,5 avec une moyenne de 11,25/20. Globalement, l'épreuve était de difficulté très raisonnable, et les étudiants s'en s'ont plutôt bien tirés. On peut cependant regretter que le cours soit souvent négligé, en particulier, les démonstrations non évidentes ne sont pas connues ; par exemple 1 c) n'a été traité par aucun étudiant. Or c'est précisément la compréhension en profondeur du cours et des démonstrations qui permet d'acquérir un savoir solide. On ne saurait trop le répéter – même si c'est à contre-courant des exigences souvent trop faibles des institutions scolaire et universitaire !

Exercice 1 (Questions de cours)

a) Définir précisément ce qu'est la comatrice d'une matrice carrée, et donner la formule permettant de calculer l'inverse d'une matrice carrée inversible à partir de la comatrice. Expliciter cette formule pour une matrice 3×3 notée $A = (a_{ij})_{1\le i,j\le 3}$.

Soit $A = (a_{ij})_{1\le i,j\le n}$ est une matrice $n \times n$ à coefficients dans un corps $\mathbb{K}$. On appelle cofacteur $\widetilde{a}_{ij}$ de la matrice A associé à la ligne i et la colonne j la quantité

$$\widetilde{a}_{ij} = (-1)^{i+j} \det(A'_{i,j}),$$

où $A'_{i,j}$ est la matrice $(n-1) \times (n-1)$ obtenue à partir de A en rayant la ligne i et la colonne j. Par définition, la comatrice de A est la matrice $n \times n$

$$\mathrm{comat}(A) := (\widetilde{a}_{ij})_{1\le i,j\le n} \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K}).$$

Un résultat fondamental du calcul matriciel stipule que A est inversible si et seulement si $\det(A) \neq 0$, et alors $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\,{}^t\mathrm{comat}(A)$. Par exemple, pour $n = 3$ on obtient

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{vmatrix} +\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \end{vmatrix},$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{vmatrix} a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23} & a_{32}a_{13} - a_{12}a_{33} & a_{12}a_{23} - a_{22}a_{13} \\ a_{31}a_{23} - a_{21}a_{33} & a_{11}a_{33} - a_{31}a_{13} & a_{21}a_{13} - a_{11}a_{23} \\ a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22} & a_{31}a_{12} - a_{11}a_{32} & a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \end{vmatrix}$$

avec $\det(A) = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_3} \varepsilon(\sigma)\, a_{\sigma(1)1}a_{\sigma(2)2}a_{\sigma(3)3}$, c'est-à-dire

$$\det(A) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{11}a_{32}a_{23}.$$

b) Définir ce qu'est une racine w de multiplicité m d'un polynôme $P(X)$ sur un corps $\mathbb{K}$. Lorsque $\mathbb{K}$ est l'un des corps $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, énoncer et *démontrer* le lien qui existe entre la multiplicité m et les dérivées successives de P au point w.

Soit A un anneau intègre et $P \in A[X]$ un polynôme de degré d admettant $w \in A$ comme racine. On dit que w est une racine de multiplicité $m \geq 1$ si on peut écrire

$$P(X) = (X - w)^m Q(X) \quad \text{avec} \quad \deg(Q) = d - m, \quad Q(w) \neq 0.$$

La multiplicité d'une racine peut se déterminer en utilisant les dérivées formelles successives du polynôme P. La dérivée j-ième de $(X-w)^m$ est $m(m-1)\cdots(m-j+1)(X-w)^{m-j}$ pour $j \leq m$ (et est identiquement nulle pour $j > m$). Au point $X = w$, la seule valeur éventuellement non nulle est celle de la dérivée m-ième qui vaut

$$\left(\frac{d}{dX}\right)^m (X - w)^m = m!\ .$$

La formule de Leibniz appliquée à $P(X) = (X - w)^m Q(X)$ donne

$$P^{(k)}(X) = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} m(m-1)\cdots(m-j+1)(X-w)^{m-j} Q^{(k-j)}(X).$$

Pour $P^{(m)}(w)$, on trouve en particulier que le seul terme non nul du membre de droite correspond à $j = m = k$. On obtient par conséquent :

$$\begin{aligned} P(w) = P'(w) = \ldots = P^{(m-1)}(w) = 0, \\ P^{(m)}(w) = m!\, Q(w). \end{aligned}$$

Si on est sur un corps de caractéristique 0 tel que $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, on a donc $P^{(m)}(w) \neq 0$, la multiplicité de w est le plus petit entier $m \geq 1$ tel que $P^{(m)}(w) \neq 0$.

c) En utilisant l'identité de Bézout, démontrer le lemme des noyaux pour les polynômes d'endomorphismes, qui affirme que pour tout couple de polynômes $Q_1, Q_2 \in \mathbb{K}[X]$ premiers entre eux et tout endomorphisme $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(E)$ d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie, on a $\mathrm{Ker}((Q_1Q_2)(f)) = \mathrm{Ker}\, Q_1(f) \oplus \mathrm{Ker}\, Q_2(f)$.

Par hypothèse $\mathrm{pgcd}(Q_1, Q_2) = 1$; d'après l'identité de Bézout, il existe des polynômes R_1, R_2 tels que $R_1Q_1 + R_2Q_2 = 1$, et donc $R_1(f) \circ Q_1(f) + R_2(f) \circ Q_2(f) = \mathrm{Id}_E$. Prenons d'abord un vecteur $v \in \mathrm{Ker}(Q_1(f)) \cap \mathrm{Ker}(Q_2(f))$. On a

$$v = \mathrm{Id}_E(v) = R_1(f) \circ Q_1(f)(v) + R_2(f) \circ Q_2(f)(v) = 0,$$

par conséquent $\mathrm{Ker}(Q_1(f)) \cap \mathrm{Ker}(Q_2(f)) = \{0\}$. D'autre part, comme

$$(Q_1Q_2)(f) = Q_1(f) \circ Q_2(f) = Q_2(f) \circ Q_1(f),$$

il est clair que

$$\mathrm{Ker}(Q_1(f)) \subset \mathrm{Ker}(Q_1Q_2(f)) \quad \text{et} \quad \mathrm{Ker}(Q_2(f)) \subset \mathrm{Ker}(Q_1Q_2(f)),$$

donc

$$\mathrm{Ker}(Q_1(f)) \oplus \mathrm{Ker}(Q_2(f)) \subset \mathrm{Ker}(Q_1Q_2(f)).$$

Maintenant, si $v \in \mathrm{Ker}(Q_1Q_2(f)$, on peut écrire comme ci-dessus

$$v = \mathrm{Id}_E(v) = R_1(f) \circ Q_1(f)(v) + R_2(f) \circ Q_2(f)(v)$$

et on a par commutativité

$$Q_2(f) \circ R_1(f) \circ Q_1(f)(v) = R_1(f) \circ Q_2(f) \circ Q_1(f)(v) = R_1(f) \circ (Q_1Q_2)(f)(v) = 0,$$

donc $w_2 = R_1(f) \circ Q_1(f)(v) \in \mathrm{Ker}(Q_2(f))$, et on vérifie de la même manière que $w_1 = R_2(f) \circ Q_2(f)(v) \in \mathrm{Ker}(Q_1(f))$. Ceci implique

$$v = w_1 + w_2 \in \mathrm{Ker}(Q_1(f)) \oplus \mathrm{Ker}(Q_2(f)),$$

donc $\mathrm{Ker}((Q_1Q_2)(f)) \subset \mathrm{Ker}(Q_1(f)) \oplus \mathrm{Ker}(Q_2(f))$ et l'égalité s'ensuit.

Exercice 2 (Groupes de permutations) Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_{11}$ la permution définie par le tableau de correspondance

$$\begin{array}{c} i \\ \sigma(i) \end{array} : \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 7 & 9 & 1 & 3 & 10 & 6 & 4 & 8 & 11 & 5 & 2 \end{bmatrix}.$$

a) Déterminer la décomposition de σ en cycles disjoints.
En calculant les itérés successifs $\sigma^k(j)$, on trouve

$$\begin{aligned} &1 \mapsto 7 \mapsto 4 \mapsto 3 \mapsto 1, \\ &2 \mapsto 9 \mapsto 11 \mapsto 2, \\ &5 \mapsto 10 \mapsto 5, \end{aligned}$$

les éléments non encore listés (à savoir 6, 8) étant invariants. On en déduit que σ est le produit commutatif de cycles

$$\sigma = (1\ 7\ 4\ 3) \circ (2\ 9\ 11) \circ (5\ 10).$$

b) Déterminer l'ordre de σ, c-à-d. le plus petit entier $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $\sigma^k = \mathrm{Id}$, et la signature de σ.
Comme un produit de cycles disjoints est commutatif, on déduit de ce qui précède que pour tout entier k on a

$$\sigma^k = (1\ 7\ 4\ 3)^k \circ (2\ 9\ 11)^k \circ (5\ 10)^k,$$

avec en particulier

$$\begin{cases} (1\ 7\ 4\ 3)^2 = (1\ 4) \circ (3\ 7), \quad (1\ 7\ 4\ 3)^3 = (1\ 3\ 4\ 7), \quad (1\ 7\ 4\ 3)^4 = \mathrm{Id}, \\ (2\ 9\ 11)^2 = (2\ 11\ 9), \quad (2\ 9\ 11)^3 = \mathrm{Id}, \\ (5\ 10)^2 = \mathrm{Id}\,. \end{cases}$$

L'ordre de σ est le ppcm des ordres respectifs $4, 3, 2$ des cycles qui le composent, c'est-à-dire 12. La signature de σ est le produit des signatures de ces cycles. Or la signature d'un cycle de longueur p est $(-1)^{p-1}$, donc

$$\varepsilon(\sigma) = (-1) \times 1 \times (-1) = 1.$$

c) Déterminer σ^{2019} par sa décomposition en cycles et son tableau de correspondance.
On a $2019 = 12 \times 168 + 3$, donc $\sigma^{2019} = (\sigma^{12})^{168} \circ \sigma^3 = \sigma^3$. D'après b) il vient

$$\sigma^{2019} = \sigma^3 = (1\ 7\ 4\ 3)^3 \circ (2\ 9\ 11)^3 \circ (5\ 10)^3 = (1\ 3\ 4\ 7) \circ (5\ 10),$$

d'où le tableau de correspondance

$$\begin{array}{c} i \\ \sigma^{2019}(i) \end{array} : \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 3 & 2 & 4 & 7 & 10 & 6 & 1 & 8 & 9 & 5 & 11 \end{bmatrix}.$$

Exercice 3 (Factorisation des polynômes) Soit $A(X) = X^4 + X^3 + X + m$, $B(X) = X^2 - X + 1$ deux polynômes dans $\mathbb{R}[X]$, $m \in \mathbb{R}$ étant un paramètre.

a) Déterminer les racines complexes de $B(X)$ et la factorisation de ce polynôme en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ et $\mathbb{C}[X]$.
Le discriminant de $B(X)$ est $\Delta = 1 - 4 = -3$, don B admet les racines complexes deux à deux conjuguées

$$\alpha = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}, \qquad \overline{\alpha} = \frac{1 - i\sqrt{3}}{2},$$

et dans $\mathbb{C}[X]$, on la décomposition en facteurs irréductibles

$$B(X) = (X - \alpha)(X - \overline{\alpha})$$

avec $\alpha + \overline{\alpha} = 1$ et $\alpha\overline{\alpha} = 1$. Comme les racines sont non réelles, le trinôme $B(X)$ est irréductible dans $\mathbb{R}[X]$.

b) Effectuer la division euclidienne de A par B. En déduire le pgcd de A et B en fonction des valeurs de m. Que peut-on dire des racines de A et B lorsque A et B sont premiers entre eux ?
La division euclidienne de A par B donne

$$A(X) = (X^2 - X + 1)(X^2 + 2X + 1) + m - 1 = B(X)(X^2 + 2X + 1) + m - 1,$$

de sorte qu'on a un quotient $Q(X) = X^2 + 2X + 1 = (X + 1)^2$ et un reste $R(X) = m - 1$ qui est constant. Si $m \neq 1$, l'algorithme d'Euclide s'arrête à $R(X)$ qui est inversible (et $R(X)$ divise alors $B(X)$ dans $\mathbb{R}[X]$). Dans le cas $m = 1$, en revanche, on voit que $A(X)$ est divisible par $B(X)$. On en déduit aussitôt

$$\begin{aligned} \mathrm{pgcd}(A, B) &= 1 \quad \text{si} \quad m \neq 1, \\ \mathrm{pgcd}(A, B) &= B \quad \text{si} \quad m = 1. \end{aligned}$$

Lorsque A et B sont premiers entre eux (cas $m \neq 1$), on voit aussitôt que A et B ne peuvent avoir de racine commune dans $\mathbb{C}$: on trouve en fait $A(\alpha) = A(\overline{\alpha}) = m - 1 \neq 0$ d'après l'égalité exprimée par la division euclidienne.

c) On suppose m choisi en sorte que A, B ne soient pas premiers entre eux. Déterminer alors la factorisation de $A(X)$ en polynômes irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ et dans $\mathbb{C}[X]$.
On se place donc ici dans le cas $m = 1$. On trouve alors

$$A(X) = (X^2 - X + 1)(X + 1)^2,$$

qui est d'après a) la décomposition en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$, tandis que dans $\mathbb{C}[X]$, on a (comme stipulé par le théorème de d'Alembert) une décomposition en facteurs irréductibles de degré 1

$$A(X) = (X - \alpha)(X - \overline{\alpha})(X + 1)^2.$$

Exercice 4 (Réduction des endomorphismes) Ici $\mathbb{K}$ désigne l'un des corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On se place dans un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension 3 muni d'une base $\mathcal{B} = (a, b, c)$, et on considère l'endomorphisme $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(E)$ de matrice

$$M = \begin{pmatrix} 2 & -t & 1 \\ t & 1 & 0 \\ -t-1 & t & -t \end{pmatrix}$$

où $t \in \mathbb{R}$ est un paramètre. On notera x, y, z les coordonnées des vecteurs dans la base $\mathcal{B}$.

a) Déterminer le polynôme caractéristique $\chi_M(X) = \det(XI - M)$ de M, et montrer que ce polynôme se factorise sous la forme $(X + t - 1)(X^2 - 2X + t^2 + 1)$. En déduire quelles sont les valeurs propres de f lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, puis lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.
Un calcul de déterminant donne

$$\begin{aligned} \chi_M(X) = \det(XI - M) &= \begin{vmatrix} X-2 & t & -1 \\ -t & X-1 & 0 \\ t+1 & -t & X+t \end{vmatrix} \\ &= (X-2)(X-1)(X+t) - t^2 + (t+1)(X-1) + t^2(X+t) \\ &= X^3 + (t-3)X^2 + (t^2 - 2t + 3)X + t^3 - t^2 + t - 1 \\ &= (X + t - 1)(X^2 - 2X + t^2 + 1). \end{aligned}$$

Le premier facteur donne une racine réelle $\lambda_1 = 1 - t$. Le trinôme $X^2 - 2X + t^2 + 1$ a pour discriminant

$$\Delta = 4 - 4(t^2 + 1) = -4t^2,$$

ce qui donne deux racines complexes conjuguées

$$\lambda_2 = 1 + it, \quad \lambda_3 = 1 - it$$

si $t \neq 0$, tandis qu'on a une racine réelle triple $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$ si $t = 0$.

b) Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, déterminer les sous-espaces propres de f en distinguant le(s) cas où il y a des valeurs propres multiples. À quelle condition f est-il diagonalisable ?

Si $t \neq 0$, on a trois racines complexes distinctes (une réelle et deux complexes conjuguées), donc on sait a priori que f doit être diagonalisable sur $\mathbb{C}$. En revanche, si $t = 0$, il convient de calculer l'espace propre associé à l'unique valeur propre $\lambda = 1$. Si Z est la matrice de composantes x, y, z, il s'agit de résoudre le système linéaire $(\lambda_j I - M)Z = 0$.

• Pour $\lambda_1 = 1 - t$, on trouve

$$\begin{cases} (-t-1)x + ty - z = 0 \\ -tx - ty = 0 \\ (t+1)x - ty + z = 0. \end{cases}$$

La première équation est redondante avec la troisième et peut être supprimée. Si $t = 0$ (de sorte que $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$), il reste une seule équation $x + z = 0$, l'espace propre associé est le plan vectoriel $\mathrm{Vect}(a - c, b)$, sa dimension est $2 < 3 =$ multiplicité de λ_1, et f n'est donc pas diagonalisable. Si on prend comme nouvelle base $(\alpha, \beta, \gamma) = (a, a - c, b)$, alors $f(\beta) = \beta$ et $f(\gamma) = \gamma$ puisque β, γ sont des vecteurs propres de valeur propre 1. On a par ailleurs $f(\alpha) = f(a) = 2a - c = \alpha + \beta$, et dans cette nouvelle base la matrice de f devient

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Si $t \neq 0$, on peut diviser la deuxième équation par t, ce qui donne $x + y = 0$, soit $y = -x$. Par substitution dans la troisième équation il vient $(2t + 1)x + z = 0$. On obtient

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -x \\ -(2t+1)x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2t-1 \end{pmatrix},$$

et l'espace propre de valeur propre $\lambda_1 = 1 - t$ est par conséquent la droite vectorielle de vecteur directeur

$$u \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2t-1 \end{pmatrix} \quad \text{dans la base } (a, b, c).$$

• Pour $\lambda_2 = 1 + it$, il vient

$$\begin{cases} (-1+it)x + ty - z = 0 \\ -tx + ity = 0 \\ (t+1)x - ty + (t+1+it)z = 0. \end{cases}$$

On peut supposer $t \neq 0$ puisque le cas $t = 0$ a déjà été traité (il y a 3 valeurs propres confondues, égales à 1). La deuxième équation donne alors $y = -ix$, et en substituant dans les équations 1 et 3 on trouve

$$\begin{cases} -x - z = 0 \\ (t+1+it)x + (t+1+it)z = 0, \end{cases}$$

ce qui équivaut à $z = -x$. On obtient

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -ix \\ -x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ -1 \end{pmatrix},$$

et on voit qu'on a une droite vectorielle propre engendrée par le vecteur complexe

$$\zeta \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{dans la base } (a, b, c).$$

• Pour $\lambda_3 = \overline{\lambda}_2 = 1 - it$, les calculs se déduisent des précédents par conjugaison (puisque la matrice M est réelle). Ceci donne une droite propre de vecteur directeur

$$\overline{\zeta}\begin{pmatrix}1\\ i\\ -1\end{pmatrix} \quad \text{dans la base } (a,b,c).$$

L'endomorphisme f est alors diagonalisable sur $\mathbb{C}$, et sa matrice dans la base complexe $(u, \zeta, \overline{\zeta})$ est la matrice diagonale associée aux valeurs propres 2 à 2 distinctes :

$$\widetilde{M} = \begin{pmatrix}1-t & 0 & 0\\ 0 & 1+it & 0\\ 0 & 0 & 1-it\end{pmatrix}.$$

En résumé, l'endomorphisme f est diagonalisable sur $\mathbb{C}$ si et seulement si $t \neq 0$ (en revanche f n'est jamais diagonalisable sur $\mathbb{R}$, il faudrait pour cela que les valeurs propres soient réelles, i.e. $t = 0$, mais il résulte de ce qui précède que f n'est pas diagonalisable dans ce cas).

c) On suppose $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $t \neq 0$. On désigne par $D = \mathbb{R}u$ la droite propre réelle, et par $P = \mathrm{Vect}(v, w)$ le plan engendré par des vecteurs dont les matrices colonnes V, W dans la base $\mathcal{B}$ sont la partie réelle V et la partie imaginaire W d'un vecteur colonne $Z = V + iW$ complexe, propre de valeur propre non réelle pour la matrice M considérée sur $\mathbb{C}$. Déterminer (u, v, w), puis $f(v)$, $f(w)$ en fonction de v, w, et montrer que $E = D \oplus P$ est une décomposition de E en somme directe de sous-espaces stables par f. Quelle est la matrice de f dans la base $\mathcal{B}' = (u, v, w)$?

D'après b), la matrice colonne complexe

$$Z = \begin{pmatrix}1\\ -i\\ -1\end{pmatrix} = V + iW, \quad V = \begin{pmatrix}1\\ 0\\ -1\end{pmatrix}, \quad W = \begin{pmatrix}0\\ -1\\ 0\end{pmatrix}$$

satisfait $MZ = \lambda_2 Z = (1+it)Z$. Cette égalité peut se récrire

$$M(V + iW) = (1 + it)(V + iW) = (V - tW) + i(tV + W),$$

et en prenant les parties réelle et imaginaire, il vient

$$(*) \qquad MV = V - tW, \quad MW = tV + W.$$

Si $v \in E$ désigne le vecteur de matrice V, et $w \in E$ le vecteur de matrice colonne W dans la base (a, b, c), on obtient une nouvelle base (u, v, w) de E donnée par la matrice de passage

$$G = \begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ -1 & 0 & -1\\ -2t-1 & -1 & 0\end{pmatrix}.$$

(G est inversible car $\det(G) = 2t \neq 0$). Nous avons $f(u) = (1-t)u$, et les égalités matricielles (*) qui précèdent équivalent à

$$f(v) = v - tw, \quad f(w) = tv + w.$$

La droite $D = \mathbb{R}u$ et le plan $P = \mathrm{Vect}(v, w)$ sont donc bien stables par f, et on a $E = D \oplus P$. La matrice de f dans la base $\mathcal{B}' = (u, v, w)$ est donnée par

$$M' = \begin{pmatrix}1-t & 0 & 0\\ 0 & 1 & t\\ 0 & -t & 1\end{pmatrix}.$$