Contrôle continu n^{o} 2

le 7 décembre 2018, durée : 1 heure 30
appareils électroniques interdits
une feuille A4 manuscrite de résumé de cours autorisée

Exercice 1 (Questions de cours)

a) On se place sur l'un des corps $\mathbb{K} = \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$. Expliquer (et si possible démontrer) le lien qui existe entre la multiplicité d'une racine $w \in \mathbb{K}$ d'un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$, et les dérivées successives $P^{(j)}(w)$.

On dit que w est une racine de multiplicité m de P si on peut obtenir une factorisation $P(X) = Q(X)(X-w)^m$ avec $Q \in \mathbb{K}[X]$, $Q(w) \neq 0$. Dans ce cas, la formule de Leibniz donne

$$P^{(j)}(X) = \sum_{i=0}^{j} \binom{j}{i} Q^{(j-i)}(X) \Big(\frac{d}{dX}\Big)^i (X-w)^m$$

et $(\frac{d}{dX})^i (X-w)^m_{|X=w}$ vaut 0 si $i \neq m$ et $m!$ si $i = m$. Ceci implique

$$P^{(j)}(w) = 0 \quad \text{si } j < m \text{ et } \quad P^{(m)}(w) = m!\, Q(w).$$

Par conséquent, la multiplicité de la racine w est égale à m si et seulement si $P^{(j)}(w) = 0$ pour $j = 0, 1, \ldots, m-1$ et $P^{(m)}(w) \neq 0$.

b) Soit $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(E)$ un endomorphisme dont le polynôme caractéristique χ_f possède une racine $\lambda \in \mathbb{C}$ non réelle. Montrer que f possède un plan stable. Donner un exemple de tel endomorphisme pour $\dim_{\mathbb{R}} E = 3$, et montrer en dimension 3 que la matrice A de f est nécessairement diagonalisable dans $\mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{C})$.

Soit $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ la matrice de f dans une base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ de E. On suppose que $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ est une racine complexe non réelle de $\chi_f(X) = \chi_A(X)$. Il existe alors un vecteur colonne complexe $Z = U + iV \neq 0$ avec $U, V \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{R})$, tel que $AZ = \lambda Z$. Si l'on écrit $\lambda = \alpha + i\beta$ avec α, β réels, il vient

$$AU + iAV = (\alpha + i\beta)(U + iV) \Longleftrightarrow AU = \alpha U - \beta V, \quad AV = \beta U + \alpha V.$$

Les vecteurs colonnes U et V ne peuvent être $\mathbb{R}$-colinéaires, sinon on aurait disons $U \neq 0$ et $V = \gamma U$ avec $\gamma \in \mathbb{R}$, donc $Z = U + i\gamma U = \mu U$ serait $\mathbb{C}$-colinéaire à U, où $\mu = 1 + i\gamma \in \mathbb{C}^*$. Par conséquent $U = \mu^{-1} Z$ serait aussi vecteur propre de A pour la valeur propre λ, mais ceci est contradictoire avec la relation $AU = \lambda U$ où A, U sont réels et λ non réel (le raisonnement est le même si $V \neq 0$ et $U = \gamma V$). Considérons alors le plan vectoriel $P = \mathrm{vect}(u, v) \subset E$ engendré par les vecteurs u, v de coordonnées U, V. On a les relations

$$f(u) = \alpha u - \beta v \in P, \quad f(v) = \beta u + \alpha v \in P \Longrightarrow f(P) \subset P.$$

On voit donc que P est un plan stable de f. Lorsque $\dim_{\mathbb{R}} E = 3$, le polynôme caractéristique est de degré 3. Il admet les deux racines complexes conjuguées λ, $\overline{\lambda}$, et aussi une racine réelle $\rho \in \mathbb{R}$ (comme tout polynôme réel de degré impair), donc

$$\chi_f(X) = (X-\lambda)(X-\overline{\lambda})(X-\rho)$$

Les trois racines $\lambda, \overline{\lambda}, \rho \in \mathbb{C}$ sont distinctes, et on en conclut d'après le cours que A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{C})$.

Exercice 2

On considère les polynômes $A(X) = X^2 - 1$ et $B(X) = X^3 - X^2 + 2X - 2$ dans $\mathbb{Q}[X]$.

a) Expliciter un polynôme unitaire D tel que $D = \mathrm{pgcd}(A, B)$, puis des polynômes $U, V \in \mathbb{Q}[X]$ tels que $AU + BV = D$.
Grâce à l'algorithme d'Euclide, on trouve

$$X^3 - X^2 + 2X - 2 = (X-1)(X^2-1) + 3X - 3$$
$$X^2 - 1 = (X+1)(X-1) = \frac{1}{3}(X+1)(3X-3) + 0,$$

ce qui montre que $\mathrm{pgcd}(A, B) = D = X - 1$ (au facteur inversible 3 près). On voit que l'on a

$$A = (X-1)\widetilde{A}, \quad B = (X-1)\widetilde{B} \quad \text{avec} \quad \widetilde{A} = X^2 + 2, \quad \widetilde{B} = X + 1,$$

et

$$X - 1 = \frac{1}{3}(3X-3) = \frac{1}{3}A(X) - \frac{1}{3}(X-1)B(X),$$

donc l'identité de Bézout $AU + BV = D$ est réalisée par $U = \frac{1}{3}$, $V = -\frac{1}{3}(X-1)$.

b) Soit $L, M \in \mathbb{Q}[X]$ des polynômes donnés et $P \in \mathbb{Q}[X]$ un polynôme inconnu. On cherche à résoudre les congruences simultanées

$$P \equiv L \mod \langle A \rangle,$$
$$P \equiv M \mod \langle B \rangle.$$

Montrer que ceci n'est possible que si $L - M \equiv 0 \mod \langle D \rangle$.
Ces congruences signifient que $P = L + WA$, $P = M + ZB$ avec $W, Z \in \mathbb{Q}[X]$, elles entraînent donc

$$L - M = (P - WA) - (P - ZB) = -WA + ZB \equiv 0 \mod \langle D \rangle.$$

c) En supposant la condition $L - M \equiv 0 \mod \langle D \rangle$ satisfaite, on pose $M = L + HD$ et $Q = P - L$. Montrer que le problème se ramène à un problème de congruences simultanées pour Q et exprimer les solutions P du problème initial en fonction des données L et H.
Si la condition $L - M \equiv 0 \mod \langle D \rangle$ est satisfaite, écrivons $M = L + HD = L + H(X-1)$ et $Q = P - L$. Les congruences simultanées pour P sont alors équivalentes à

$$Q \equiv 0 \mod \langle A \rangle, \quad \text{i.e. } \exists W \in \mathbb{K}[X] \quad Q = WA,$$
$$Q \equiv HD \mod \langle B \rangle, \quad \text{i.e. } \exists Z \in \mathbb{K}[X] \quad Q = HD + ZB,$$

ce qui implique que Q est divisible par D, disons $Q = \widetilde{Q}D$ avec

$$\widetilde{Q} = W\widetilde{A} \quad \text{i.e. } \widetilde{Q} \equiv 0 \mod \langle \widetilde{A} \rangle,$$
$$\widetilde{Q} = H + Z\widetilde{B} \quad \text{i.e. } \widetilde{Q} \equiv H \mod \langle \widetilde{B} \rangle.$$

On commence par chercher une solution particulière $\widetilde{Q}_0$. Or, on a l'identité de Bézout $\widetilde{A}U + \widetilde{B}V = 1$, qui implique

$$\widetilde{A}U \equiv 0 \mod \langle \widetilde{A} \rangle, \quad \text{et} \quad \widetilde{A}U \equiv 1 \mod \langle \widetilde{B} \rangle.$$

Afin d'avoir une solution pour les données de congruence $(0, H)$, on peut prendre $\widetilde{Q}_0 = \widetilde{A}UH = \frac{1}{3}(X^2+2)H$. Comme $\widetilde{A}$ et $\widetilde{B}$ sont premiers entre eux, le théorème des reste chinois nous dit que la solution cherchée pour $\widetilde{Q}$ est

$$\widetilde{Q} \equiv \widetilde{A}UH \mod \langle \widetilde{A}\widetilde{B} \rangle,$$

et comme $P = L + Q = L + \widetilde{Q}D$, P doit satisfaire la congruence

$$P = L + \widetilde{A}UHD \mod \langle \widetilde{A}\widetilde{B}D \rangle,$$

soit, de façon explicite

$$P \equiv L + \frac{1}{3}AH \mod \langle \widetilde{A}\widetilde{B}D \rangle,$$
$$P \equiv L + \frac{1}{3}(X^3 - X^2 + 2X - 2)H \mod \langle \widetilde{A}\widetilde{B}D \rangle,$$

où

$$\widetilde{A}\widetilde{B}D = (X^2 + 2)(X + 1)(X - 1) = \operatorname{pgcd}(A, B).$$

Exercice 3

On se place dans un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E de dimension 3 muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$, et on considère l'endomorphisme $f \in \operatorname{End}_{\mathbb{R}}(E)$ de matrice

$$M = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 \\ -6 & 0 & 7 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Calculer la trace et le déterminant de f.
   On trouve $\operatorname{tr}(f) = \operatorname{tr}(M) = -1$ et $\det(f) = \det(M) = -3$.

b) Déterminer le polynôme caractéristique $\chi_f(X)$, les valeurs propres et les sous-espaces propres de f.
   Le polynôme caractéristique vaut

$$\chi_f(X) = \det(XI_3 - M) = \begin{vmatrix} X+1 & 1 & -3 \\ 6 & X & -7 \\ -2 & 1 & X \end{vmatrix}$$
$$= X^2(X+1) + 14 - 18 - 6X - 6X + 7(X+1) = X^3 + X^2 - 5X + 3.$$

Il y a une racine évidente, ce qui donne

$$\chi_f(X) = (X-1)(X^2 + 2X - 3) = (X-1)^2(X+3).$$

L'endomorphisme f admet par conséquent une valeur propre $\lambda_1 = 1$ double et une valeur propre simple $\lambda_2 = -3$. Pour déterminer les sous-espaces propres, on cherche les noyaux des endomorphismes $f - \lambda_1 \operatorname{Id}_E$ et $f - \lambda_2 \operatorname{Id}_E$, dont les matrices sont

$$M - I_3 = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 3 \\ -6 & -1 & 7 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad M + 3I_3 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -6 & 3 & 7 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Le sous-espace propre $E_{f,1}$ associé à $\lambda_1 = 1$ est constitué des vecteurs $u \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ tels que

$$\begin{cases} -2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0 \\ -6x_1 - x_2 + 7x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -2x_2 + 2x_3 = 0 \\ -4x_2 + 4x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 0 \end{cases} \iff x_1 = x_2 = x_3.$$

(Pour les deux premières lignes, on élimine x_1 en ajoutant un multiple de la troisième ligne). Ceci montre que

$$\operatorname{Ker}(f - \lambda_1 \operatorname{Id}_E) = \operatorname{Ker}(f - \operatorname{Id}_E) = \mathbb{R}v \quad \text{où} \quad v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

La dimension de $E_{f,1}$, égale à 1, est strictement inférieure à la multiplicité $m_1 = 2$. L'endomorphisme f n'est donc pas diagonalisable. Le sous-espace propre $E_{f,-3}$ associé à $\lambda_2 = -3$ est constitué des vecteurs $u \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ tels que

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0 \\ -6x_1 + 3x_2 + 7x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0 \\ 16x_3 = 0 \end{cases} \iff x_2 = 2x_1,\ x_3 = 0.$$

On trouve donc

$$\operatorname{Ker}(f - \lambda_2 \operatorname{Id}_E) = \operatorname{Ker}(f + 3\operatorname{Id}_E) = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ 2x_1 \\ 0 \end{pmatrix} \ / \ x_1 \in \mathbb{R} \right\} = \mathbb{R}w \quad \text{où} \quad w = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

c) Si λ_1 est la valeur propre double, déterminer le noyau de $(f - \lambda_1 \operatorname{Id}_E)^2$, et trouver une base de ce noyau dont le premier élement v_1 est un vecteur propre.

La matrice de $f - \lambda_1 \operatorname{Id}_E$ est $M - I_3$. On calcule successivement

$$M - I_3 = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 3 \\ -6 & -1 & 7 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad (M - I_3)^2 = \begin{pmatrix} 16 & 0 & -16 \\ 32 & 0 & -32 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On en déduit aussitôt que $\operatorname{Ker}(f - \operatorname{Id}_E)^2$ est constitué des vecteurs $v \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ tels que $x_1 - x_3 = 0$. Il s'agit d'un plan vectoriel Π qui contient le vecteur $v \in \operatorname{Ker}(f - \operatorname{Id}_E)$. Ce plan Π admet la base (v_1, v_2) telle que

$$v_1 = v \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

d) En complétant la base obtenue au c) par d'autre(s) vecteur(s) propre(s), montrer que l'on peut obtenir une base $\mathcal{B}'$ dont la matrice de passage P par rapport à $\mathcal{B}$ est à coefficients entiers et de déterminant 1, dans laquelle la matrice M' de f est triangulaire.

On complète (v_1, v_2) avec le vecteur propre $v_3 = \alpha w \begin{pmatrix} \alpha \\ 2\alpha \\ 0 \end{pmatrix}$. Ceci donne un système de vecteurs (v_1, v_2, v_3) défini par la matrice de passage

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ 1 & 1 & 2\alpha \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

dont le déterminant $\det(P)$ est égal à $-\alpha$. Par conséquent il convient de prendre $\alpha = -1$ et alors $\mathcal{B}' = (v_1, v_2, v_3)$ est bien une base de E de déterminant 1 dans la base $\mathcal{B}$. Par construction, $f(v_1) = v_1$ et $f(v_3) = -3v_3$, tandis que

$$f(v_2) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = -v_1 + v_2.$$

Dans la base $\mathcal{B}'$ la matrice M' de f prend la forme triangulaire

$$M' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

N.B. D'autres choix de matrices de passage P étaient possibles, par exemple

$$\widehat{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{ou encore} \quad \widetilde{P} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dans ce cas, le coefficient -1 de M' pouvait éventuellement prendre une autre valeur (à savoir 1 pour chacune des matrices de passage $\widehat{P}$ et $\widetilde{P}$).

e) Calculer M'^k pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, et indiquer comment on peut en déduire M^k.

M' est diagonale par blocs, avec un bloc diagonal 2×2 et un bloc diagonal 1×1. Pour le premier, il est facile de voir par récurrence sur k que

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} 1 & -k \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

donc

$$M'^k = \begin{pmatrix} 1 & -k & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (-3)^k \end{pmatrix}.$$

On a enfin $M = PM'P^{-1}$, et donc $M^k = PM'^kP^{-1}$. On peut ainsi expliciter complètement M^k. On trouve

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$M^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -k & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (-3)^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

ce qui conduit (si on le veut vraiment, et après un calcul un peu fastidieux !) à la forme explicite

$$M^k = \begin{pmatrix} 2k + (-3)^k & -k & -k - (-3)^k + 1 \\ 2k + 2((-3)^k - 1) & -k + 1 & -k - 2((-3)^k - 1) \\ 2k & -k & -k + 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 4

Pour $z \in \mathbb{C}$, on note f_z l'endomorphisme de $\mathbb{C}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$M_z = \begin{pmatrix} z & 0 & 1 \\ i & z & 0 \\ 0 & -i & z \end{pmatrix}.$$

a) Calculer le rang de M_z en fonction de z.
Le déterminant de M_z est donné par

$$\det(M_z) = \begin{vmatrix} z & 0 & 1 \\ i & z & 0 \\ 0 & -i & z \end{vmatrix} = z^3 + i \times (-i) = z^3 + 1 = (z+1)(z^2 - z + 1).$$

Ce déterminant s'annule pour les valeurs complexes $z_1 = -1$, $z_2 = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$, $z_3 = \frac{1-i\sqrt{3}}{2}$.
Pour $z \in \mathbb{C} \setminus \{z_2, z_2, z_3\}$, on a $\det(M_z) \neq 0$, et le rang de M_z est alors égal à 3.
Pour $z = z_j$, $j = 1, 2, 3$, on a $\det(M_z) = 0$, donc le rang est au plus égal à 2. Mais le déterminant mineur d'ordre 2

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ z & 0 \end{vmatrix} = -z \neq 0$$

montre que les deux dernières colonnes sont indépendantes, donc le rang de M_z est nécessairement égal à 2 pour les valeurs $z = z_j$, $j = 1, 2, 3$.

b) Pour $z = 0$, calculer les puissances $(M_0)^k$, $k \in \mathbb{N}$.
Par définition, on a $(M_0)^0 = I_3$. On obtient successivement

$$M_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 \end{pmatrix}, \quad (M_0)^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & i \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (M_0)^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On en déduit facilement qu'il y périodicité modulo 3 et que $(M_0)^{3k} = I_3$, $(M_0)^{3k+1} = M_0$, $(M_0)^{3k+2} = (M_0)^2$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ (et même pour $k \in \mathbb{Z}$).

c) Déterminer le noyau de f_z dans les cas où M_z n'est pas inversible. Pour $z = z_1 = -1$, le noyau est l'ensemble des vecteurs $w = (w_1, w_2, w_3)$ tels que

$$\begin{cases} -w_1 + w_3 = 0 \\ iw_1 - w_2 = 0 \\ -iw_2 - w_3 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} w_2 = iw_1 \\ w_3 = w_1 \end{cases} \iff (w_1, w_2, w_3) = w_1(1, i, 1).$$

Pour $z = z_2 = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$, comme $\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^{-1} = \frac{1-i\sqrt{3}}{2}$, on trouve

$$\begin{cases} \frac{1+i\sqrt{3}}{2} w_1 + w_3 = 0 \\ iw_1 + \frac{1+i\sqrt{3}}{2} w_2 = 0 \\ -iw_2 + \frac{1+i\sqrt{3}}{2} w_3 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} w_2 = \frac{-i-\sqrt{3}}{2} w_1 \\ w_3 = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2} w_1 \end{cases} \iff (w_1, w_2, w_3) = w_1(1, \tfrac{-i-\sqrt{3}}{2}, \tfrac{-1-i\sqrt{3}}{2}).$$

Pour $z = z_3 = \frac{1-i\sqrt{3}}{2}$, comme $\left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)^{-1} = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$, on trouve

$$\begin{cases} \frac{1-i\sqrt{3}}{2} w_1 + w_3 = 0 \\ iw_1 + \frac{1-i\sqrt{3}}{2} w_2 = 0 \\ -iw_2 + \frac{1-i\sqrt{3}}{2} w_3 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} w_2 = \frac{-i+\sqrt{3}}{2} w_1 \\ w_3 = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} w_1 \end{cases} \iff (w_1, w_2, w_3) = w_1(1, \tfrac{-i+\sqrt{3}}{2}, \tfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}).$$

En résumé, nous avons

$$\mathrm{Ker}\, f_{z_1} = \mathbb{C}\,(1, i, 1), \quad \mathrm{Ker}\, f_{z_2} = \mathbb{C}\left(1, \tfrac{-i-\sqrt{3}}{2}, \tfrac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right), \quad \mathrm{Ker}\, f_{z_3} = \mathbb{C}\left(1, \tfrac{-i+\sqrt{3}}{2}, \tfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right).$$

d) Montrer que les noyaux trouvés à la question 3 pour les différentes valeurs de z forment des sous-espaces supplémentaires. En concaténant des bases de ces sous-espaces, on obtient une base de $\mathbb{C}^3$. déterminer la matrice de f_0 dans cette base en utilisant la relation qui existe entre f_0 et f_z. Que constate-t-on ?

Les noyaux calculés au c) sont des droites vectorielles. Pour voir que leur somme directe est égale à $\mathbb{C}^3$, il suffit de voir que la matrice formée par leurs vecteurs directeurs respectifs (v_1, v_2, v_3) est une base. Or, la matrice de passage correspondante est

$$P = (V_1, V_2, V_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ i & \frac{-i-\sqrt{3}}{2} & \frac{-i+\sqrt{3}}{2} \\ 1 & \frac{-1-i\sqrt{3}}{2} & \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}.$$

Pour calculer son déterminant, on peut par exemple retrancher la première colonne aux deux suivantes, ce qui donne

$$\det(P) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ i & \frac{-3i-\sqrt{3}}{2} & \frac{-3i+\sqrt{3}}{2} \\ 1 & \frac{-3-i\sqrt{3}}{2} & \frac{-3+i\sqrt{3}}{2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{-3i-\sqrt{3}}{2} & \frac{-3i+\sqrt{3}}{2} \\ \frac{-3-i\sqrt{3}}{2} & \frac{-3+i\sqrt{3}}{2} \end{vmatrix} = \sqrt{3} \times i\sqrt{3} \begin{vmatrix} \frac{-1-i\sqrt{3}}{2} & \frac{1-i\sqrt{3}}{2} \\ \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} & \frac{1+i\sqrt{3}}{2} \end{vmatrix}$$

(en simplifiant $\sqrt{3}$ dans la première ligne et $i\sqrt{3}$ dans la deuxième). On en déduit

$$\det(P) = 3i\Big(-\Big(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\Big)^2 + \Big(\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\Big)^2\Big) = (3i) \times (-i\sqrt{3}) = 3\sqrt{3} \neq 0.$$

Il en résulte que (v_1, v_2, v_3) est bien une base. Comme $M_z = zI_3 + M_0$, on voit que les vecteurs colonnes associés vérifient par définition

$$(z_1I_3 + M_0)V_1 = 0, \quad (z_2I_3 + M_0)V_2 = 0, \quad (z_2I_3 + M_0)V_3 = 0,$$

donc

$$M_0V_1 = -z_1V_1, \quad M_0V_2 = -z_2V_2, \quad M_0V_3 = -z_3V_3,$$

par conséquent f_0 admet dans la base (v_1, v_2, v_3) la matrice

$$M_0' = \begin{pmatrix} -z_1 & 0 & 0 \\ 0 & -z_2 & 0 \\ 0 & 0 & -z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-1-i\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}.$$

Nota : pour le cas où le lecteur ne s'en serait pas aperçu, il s'agissait bien entendu d'effectuer le calcul des vecteurs propres de M_0, à de minimes changements de notation près.