Contrôle continu n° 1

le 24 octobre 2018, durée : 2 heures
appareils électroniques interdits
une feuille A4 manuscrite de résumé de cours autorisée

Exercice 1 (Questions de cours)
Soit E un espace vectoriel de dimension n sur un corps $\mathbb{K}$.

a) Rappeler la définition du déterminant $\det(u)$ d'un endomorphisme $u \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(E)$ et expliquer pourquoi $\det(u)$ ne dépend pas du choix d'une base de E.

b) Montrer que pour tous endomorphismes $u, v \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(E)$ on a $\det(u \circ v) = \det(u) \times \det(v)$.

Exercice 2 On se place dans un $\mathbb{C}$-espace vectoriel $E = \mathbb{C}^3$ de dimension 3 muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$, et on considère l'endomorphisme $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(E)$ de matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ a & a^2 & ab \\ b & ab & b^2 \end{pmatrix}$$

dans cette base, où $a, b \in \mathbb{C}$ sont des constantes.

a) Montrer qu'il existe un scalaire $\lambda \in \mathbb{C}$ que l'on explicitera, tel que $f \circ f = \lambda f$.

b) Déterminer $\mathrm{Im}(f)$ et $\mathrm{Ker}(f)$ ainsi que les dimensions respectives de ces sous-espaces, et vérifier que l'on a $E = \mathrm{Im}(f) \oplus \mathrm{Ker}(f)$ si et seulement si $\lambda \neq 0$.

c) À quelle condition f est-il un projecteur ? Quelle est alors la nature précise de ce projecteur ?

d) Dans le cas $\lambda \neq 0$, déterminer une base $\mathcal{B}' = (u, v, w)$ composée d'une base de $\mathrm{Im}(f)$ et d'une base de $\mathrm{Ker}(f)$ (dans cet ordre), et expliciter la matrice M' de f dans la base $\mathcal{B}'$.

e) Comment sont situés $\mathrm{Im}(f)$ et $\mathrm{Ker}(f)$ lorsque $\lambda = 0$? Dans ce cas, montrer que l'on peut trouver un vecteur $t \in \mathrm{Ker}(f)$ tel que $\mathcal{B}'' = (e_1, f(e_1), t)$ soit une base de E. Expliciter alors la matrice de f dans la base $\mathcal{B}''$.

Exercice 3
Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_9$ la permutation $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 7 & 5 & 8 & 9 & 1 & 4 & 2 & 3 & 6 \end{bmatrix}$.

a) Déterminer une décomposition de σ en cycles disjoints, et calculer σ^2, σ^3, σ^4.

b) Déterminer l'ordre et la signature de σ.

c) Calculer $\sigma^{2018}(5)$.

Exercice 4
Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et $M = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & a \\ 2 & 1 & 0 & a \\ 1 & a & a & b \end{pmatrix}$.

a) Calculer $\det(M)$ (par exemple en faisant intervenir la combinaison linéaire $L_1 + L_3 - 2L_2$ des 3 premières lignes). A quelle condition M est-elle inversible ? Quel est alors le rang de M ?

b) Calculer le déterminant mineur $D = \begin{vmatrix} 2 & 1 & a \\ 1 & 0 & a \\ a & a & b \end{vmatrix}$. Que peut-on dire du rang de M si $D \neq 0$?

c) Déterminer le rang de M en fonction de a et b.

Exercice 5 (Questions bonus facultatives)
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$, $u \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(E)$ un endomorphisme et $M = (m_{i,j})$ sa matrice dans la base $\mathcal{B}$. On note ${}^{\mathrm{ad}}u$ l'endomorphisme, dit adjoint de u, dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est la matrice adjointe

$${}^{\mathrm{ad}}M := {}^{t}(\mathrm{comat}(M)) = (\widetilde{m}_{j,i})$$

où les $\widetilde{m}_{i,j}$ sont les cofacteurs de M (a priori, ${}^{\mathrm{ad}}u$ semble donc dépendre du choix de la base $\mathcal{B}$).

a) Montrer que
$$\widetilde{m}_{i,j} = \det_{\mathcal{B}}(u(e_1), \ldots, u(e_{j-1}), e_i, u(e_{j+1}), \ldots, u(e_n)).$$

b) Montrer que si $j_1, \ldots, j_n \in \{1, \ldots, n\}$ sont des indices quelconques, on a

$$\det_{\mathcal{B}}(u(e_{j_1}), \ldots, u(e_{j_{n-1}}), e_{j_n}) = \det_{\mathcal{B}}(e_{j_1}, \ldots, e_{j_{n-1}}, {}^{\mathrm{ad}}u(e_{j_n}))$$

[on pourra étudier d'abord le cas où deux des indices j_k, j_ℓ, $k, \ell \leq n-1$ sont confondus, puis le cas où ils sont 2 à 2 distincts, en sorte que $\{j_1, \ldots, j_{n-1}\} = \{1, \ldots, n\} \smallsetminus \{j\}$ pour un certain indice j ; on posera aussi $i = j_n$].

c) Montrer que pour tous vecteurs $x_1, \ldots, x_n \in E$ on a

$$\det_{\mathcal{B}}(u(x_1), \ldots, u(x_{n-1}), x_n) = \det_{\mathcal{B}}(x_1, \ldots, x_{n-1}, {}^{\mathrm{ad}}u(x_n)),$$

puis que si un endomorphisme $v \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(E)$ vérifie pour tous les $x_i \in E$ la relation

$$\det_{\mathcal{B}}(u(x_1), \ldots, u(x_{n-1}), x_n) = \det_{\mathcal{B}}(x_1, \ldots, x_{n-1}, v(x_n)),$$

alors on a nécessairement $v = {}^{\mathrm{ad}}u$.

d) Déduire de c) que ${}^{\mathrm{ad}}u$ ne dépend pas de la base $\mathcal{B}$ choisie pour le définir.

e) Rédémontrer directement (i.e. sans utiliser les résultats du cours reliant M et ${}^{\mathrm{ad}}M$) que ${}^{\mathrm{ad}}u \circ u = \det(u)\,\mathrm{Id}_E$, et en déduire alors que ${}^{\mathrm{ad}}M \times M = \det(M)\, I_n$.

f) Montrer que ${}^{\mathrm{ad}}({}^tM) = {}^t({}^{\mathrm{ad}}M)$, et déduire du e), en prenant $N = {}^tM$, que l'on a aussi $M \times {}^{\mathrm{ad}}M = \det(M)\, I_n$ et $u \circ {}^{\mathrm{ad}}u = \det(u)\,\mathrm{Id}_E$.