**UJF 2010-2011** **UE MAT244**

## Contrôle continu du Mercredi 4 Mai 2011

*Horaire : 9h45-11h15 Amphi A2*

### Exercice 1

On considère $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire usuel et l'endomorphisme $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ de matrice $A$ dans la base canonique

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Dire pourquoi $f$ est diagonalisable.
2. Calculer le polynôme caractéristique $P_A(\lambda)$ puis les valeurs propres de $f$.
3. Déterminer une base orthonormée de vecteurs propres.
4. En déduire une matrice orthogonale $P$ et une matrice diagonale $D$ telle que $D = P^{-1}AP$.
5. En déduire une expression simple en fonction de $n \in \mathbb{N}$ de la matrice $A^n$.

### Exercice 2

Pour un $a$ un réel positif fixé soit dans le plan $\mathbb{R}^2$ la conique $C_a$ d'équation suivante

$$x^2 + axy + y^2 + x - 1 = 0$$

La forme quadratique $q_a$ est définie par $q_a(x, y) = x^2 + axy + y^2$.

1. En décomposant en carrés la forme quadratique $q_a$, déterminer selon la valeur de $a \geqslant 0$ le genre (ellipse, parabole ou hyperbole) de la conique $C_a$.
   On fixe $a = 1$.
2. Réduire $q_1$ dans un repère orthonormé.
3. En déduire l'équation dans ce repère de l'ellipse $C_1$ en précisant les longueurs de ses demi grand axes.

### Exercice 3

On considère l'espace vectoriel $E$ des fonctions continues $2\pi$-périodiques muni du produit scalaire

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x)g(x)\,dx.$$

On rappelle la formule

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2}(\cos(a+b) + \cos(a-b)), \quad \forall a, b \in \mathbb{R}.$$

1. Montrer que dans $E$, la famille de fonctions $\cos nx, n \geqslant 1$ est orthonormée pour $\langle\, .\, ,\, .\, \rangle$.
   Soit $h$ la fonction de $E$ définie par $h(x) = (\cos x)(\cos 2x)(\cos 4x)$.
2. Exprimer $h(x)$ à l'aide des fonctions $\cos nx, n = 1, \ldots, 7$.
3. En déduire les coefficients de Fourier $a_n$ de $h$.
4. En déduire un calcul de l'intégrale

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} h^2(x)\,dx.$$

***