Exercice 1. Déterminer la signature de la forme quadratique

$$q(x, y, z) = (x + 2y + z)^2 - (x + y)^2 + (y + z)^2.$$

Exercice 2. Rappeler l'énoncé de l'inégalité de Cauchy-Schwarz puis l'appliquer aux questions suivantes.
a) Montrer que $\forall (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n, |\sum_{i=1}^n x_i| \leq \sqrt{n}\,(\sum_{i=1}^n x_i^2)^{\frac{1}{2}}$. Etudier le cas d'égalité.
b) Soit f une application continue d'un intervalle $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que :

$$\left(\int_a^b f(t)dt\right)^2 \leq (b-a)\int_a^b f^2(t)dt.$$

Etudier le cas d'égalité.
c) Montrer que :

$$\int_0^1 \frac{e^t}{1+t}\,dt \leq \frac{1}{2}\sqrt{e^2-1}.$$

Exercice 3. On considère la plaque triangulaire homogène T de $\mathbb{R}^2$ de densité surfacique $\sigma(x, y) = 1$ et ayant pour sommets les points $O = (0, 0)$, $A = (3, 0)$ et $B = (0, 1)$.
a) Calculer les coefficients $m_{ij} = \int\int_T x_i x_j dx_1 dx_2$, $1 \leq i, j \leq 2$.
b) Diagonaliser la matrice symétrique $M = (m_{ij})_{1\leq i,j\leq 2}$.
c) En déduire les moments et les axes principaux d'inertie dans les mouvements de rotation de T autour d'axes passant par O.

Exercice 4. Soit f la fonction définie par $f(x) = \cos^3 x + \sin^3 x$.
1) Linéariser f, c'est-à-dire exprimer f à l'aide des $\cos kx$, $\sin kx$, $k = 1, 2, 3$.
2) En déduire les coefficients de Fourier $a_k(f)$ et $b_k(f)$ de f pour tous les entiers $k \geq 0$.

Exercice 5. On suppose que f est 2π-périodique et C^1 par morceaux.
1) On suppose que f est paire. Montrer que $b_n(f) = 0$ pour tout $n \geq 1$.
2) On suppose que f est impaire. Montrer que $a_n(f) = 0$ pour tout $n \geq 0$.

Exercice 6. Soit $b \in]0, \pi[$. On considère la fonction f 2π-périodique, paire, définie sur $[0, \pi]$ par :

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad 0 \leq x < b \\ \frac{1}{2} & \text{si} \quad x = b \\ 0 & \text{si } b < x \leq \pi \end{cases}$$

1) Etudier brièvement la continuité et la dérivabilité de f.
2) Calculer la série de Fourier de f.
3) En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ et de $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{\sin(n\pi/4)}{n}$.

Exercice 7. Si $x \in \mathbb{R}$, on rappelle que l'on a

$$\mathrm{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2},\ \mathrm{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2},\ \mathrm{th}(x) = \frac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)},\ \mathrm{coth}(x) = \frac{1}{\mathrm{th}(x)}.$$

Soit $a \in \mathbb{R}$. Soit f l'unique fonction paire 2π-périodique telle que

$$f(x) = \mathrm{ch}(ax) \text{ pour tout } x \in [0, \pi].$$

1) Calculer la série de Fourier de f.
2) En déduire l'égalité

$$\pi \mathrm{coth}(\pi a) = \frac{1}{a} + \sum_{n \geq 1} \frac{2a}{a^2 + n^2} \text{ pour tout } a \in \mathbb{R}.$$

Exercice 8.
1) Calculer la série de Fourier de la fonction f 2π-périodique impaire telle que

$$f(x) = x(\pi - x) \text{ pour tout } x \in [0, \pi].$$

2) En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{n \geq 0} \frac{1}{(2n+1)^6}$.

Exercice 9. 1) Calculer la série de Fourier de la fonction f 2π-périodique telle que

$$f(x) = |x| \text{ pour tout } x \in [-\pi, \pi[.$$

2) En déduire la valeur des séries $\displaystyle\sum_{n \geq 0} \frac{1}{(2n+1)^2}$ et $\displaystyle\sum_{n \geq 0} \frac{1}{(2n+1)^4}$.

Exercice 10. 1) Calculer la série de Fourier de la fonction f 2π-périodique telle que

$$f(x) = |\cos(x)| \text{ pour tout } x \in [-\pi, \pi[.$$

2) Calculer $\displaystyle\sum_{n \geq 1} \frac{1}{4n^2 - 1}$.

Exercice 11. Soit $k \geq 1$ un entier. On suppose que f est de classe C^k sur $\mathbb{R}$ et 2π-périodique.
1) Montrer que $c_n(f^{(k)}) = (in)^k c_n(f)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.
2) En déduire qu'il existe $M \geq 0$ tel que $|c_n(f)| \leq \dfrac{M}{n^k}$ pour tout $n \in \mathbb{Z}, n \neq 0$.
3) En déduire alors que pour tout $1 \leq m \leq k-1$, on a

$$f^{(m)}(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} i^m n^m c_n(f) e^{inx} \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}.$$