UJF 2009-2010 L2 UE MAT244

Contrôle continu du Vendredi 30 Avril 2010, Amphi A1 et A2

Horaire : 15h15-16h45. Une attention particulière sera portée à la clarté de la rédaction. En particulier, on demande de justifier les réponses et de toujours expliquer, même rapidement, les calculs utilisés.

Question de cours

Soit E l'espace des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ qui sont 2π-périodiques, continues par morceaux. On définit sur E le produit scalaire

$$< f, g >= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \overline{f(t)} g(t) dt.$$

1) On considère pour tout $n \in \mathbb{Z}$, la fonction $e_n : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ définie par $e_n(t) = e^{int}$. Démontrer que $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ forme une famille orthonormée de E pour le produit scalaire $< .,. >$.
2) Soit $f \in E$. Donner les coefficients de Fourier complexes $c_n(f)$ de f et leur interprétation en fonction du produit scalaire $< .,. >$.
3) Soit $f \in E$. On pose $S_N(f) = \sum_{n=-N}^{N} c_n(f) e_n$. Donner une interprétation géométrique (en fonction de $< .,. >$) de $S_N(f)$. Donner un énoncé précis sur la convergence de $S_N(f)$ (plusieurs choix possibles, en choisir un seul).
4) Soit f la fonction de E qui vaut 1 sur $[0, \pi]$ et -1 sur $[-\pi, 0[$. Tracer l'allure du graphe de f. Calculer les coefficients de Fourier réels $a_n(f)$ et $b_n(f)$ de f.

Exercice 1

Soit ϕ la forme bilinéaire définie sur $\mathbb{R}^3$ par

$$\phi(x, y) = x_1 y_1 - x_2 y_2 - x_3 y_3$$

1. Déterminer la matrice J qui représente ϕ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
2. (a) Soit $e_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $e_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.
   Montrer que $\mathcal{C} = \{e_1, e_2, e_3\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
   (b) Déterminer la matrice qui représente ϕ dans la nouvelle base $\mathcal{C}$.
   (c) En déduire que $\forall X,\ Y \in \mathbb{R}^3$ on a
   $$\phi(PX, PY) = \phi(X, Y)$$
   où P est la matrice de passage de la base canonique vers la base $\mathcal{C}$.
3. Soit q la forme quadratique associée à ϕ (c'est à dire $q(X) = \phi(X, X)$)
   (a) Calculer $q(X_0)$ où $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
   (b) Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $X_n = P^n.X_0$
      i. Calculer X_1 et X_2.
      ii. Calculer $q(X_1)$ et $q(X_2)$.
   (c) Calculer, pour $n \in \mathbb{N}$, $q(X_n)$.

4. En déduire qu'il y a une infinité de solutions de l'équation de Fermat

$$x^2 + y^2 = z^2 \text{ avec } x, y \text{ et } z \in \mathbb{N}$$

Exercice 2

Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ l'espace des polynômes de degré $\leqslant n$ à coefficients réels.

On pose $b(P,Q) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(P(x)Q(-x) + P(-x)Q(x))dx$

1) Vérifier que b est une forme bilinéaire symétrique.

On note $F = \{P \in E | P(x) = P(-x), \forall x \in \mathbb{R}\}$ et $G = \{P \in E | P(x) = -P(-x), \forall x \in \mathbb{R}\}$ respectivement les sous-espaces vectoriels des polynômes pairs et impairs.

2) Montrer que E est la somme directe de F et de G.

3) Vérifier que F et G sont b-orthogonaux.

On note $q(P) = b(P,P)$ la forme quadratique dont b est la forme polaire.

4) Montrer que q est définie positive sur F et définie négative sur G.

On suppose à partir d'ici que $n = 3$.

5) En utilisant 2) et 3), expliquer pourquoi il existe une base b-orthogonale $B = (P_1, P_2, P_3, P_4)$ avec chacun des P_i dans F ou G.

6) Décrire explicitement les sous-espaces F et G. En déduire leurs dimensions.

7) En exprimant $q(P)$ dans les coordonnées (x_1, x_2, x_3, x_4) par rapport à B (c'est à dire $P = x_1P_1 + x_2P_2 + x_3P_3 + x_4P_4$) déduire de 4) et 6) la signature de q et le rang de b.

8) Retrouver ce résultat en exprimant $q(P)$ dans les coordonnées (a_0, a_1, a_2, a_3) par rapport à la base canonique B_0 (c'est à dire $P(X) = a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3$) puis en appliquant la réduction en carrés de Gauss.