MAT244 - Année universitaire 2009-2010

Feuille d'exercices 2

Exercice 1.

Déterminer si les fonctions suivantes sont des formes bilinéaires/semi-linéaires, et dans l'affirmative, si elles sont symétriques/hermitiennes.

1. $b : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ b(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}) = x_1y_2 + x_2y_2.$
2. $b : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, b(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}) = x_1y_3 + x_1x_2$
3. $b : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ b(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}) = x_1y_2 + x_2x_1.$
4. $\varphi : \mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}, \varphi(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}) = \overline{x}_1y_3 + \overline{x}_2 + y_1y_2$
5. $b : \mathbb{R}_n[X] \times \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R},\ b(P, Q) = P'(1)Q(0) + Q'(1)P(0),$
6. $b : C([a, b], \mathbb{R}) \times C([a, b], \mathbb{R}) \to \mathbb{R}, b(f, g) = \int_a^b f(x)g(x)dx.$
7. $\varphi : C([a, b], \mathbb{C}) \times C([a, b], \mathbb{C}) \to \mathbb{C}, \varphi(f, g) = \int_a^b \overline{f(x)}g(x)dx.$
8. $\varphi : C([a, b], \mathbb{C}) \times C([a, b], \mathbb{C}) \to \mathbb{C}, \varphi(f, g) = \int_a^b f(x)\overline{g(x)}dx.$

Exercice 2.

Pour chacune des formes bilinéaires suivantes, calculer sa matrice M_1 dans la base B_1 et sa matrice M_2 dans la base B_2 Calculer P, la matrice de passage de B_2 à B_1, et vérifier que $M_2 = {}^tPM_1P$.

1. $\phi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

   $$\phi(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}) = x_1y_2 + 3y_1x_2 \quad , \quad B_1 = \{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\}, B_2 = \{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\}.$$

2. $\phi : \mathbb{R}_2[X] \times \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}$

   $$\phi(P, Q) = P(2)Q(1) \quad , \quad B_1 = \{1, X, X^2\}, B_2 = \{1, (X-1), (X^2-3X+2)\}.$$

3. $\phi : \mathbb{R}_2[X] \times \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}$

$$\phi(P,Q) = \int_0^1 P(x)Q(1-x)dx \quad , \quad B_1 = \{1, X, X^2\}, B_2 = \{1, (X-1), X^2-X\}.$$

Exercice 3. Soient φ et ψ deux formes linéaires définies sur le $\mathbb{C}$-espace vectoriel E.

1. Démontrer que l'application

$$b : E \times E \to \mathbb{C}, (u,v) \mapsto \varphi(u)\psi(v) + \varphi(v)\psi(u)$$

est une forme bilinéaire symétrique, et que la forme

$$h : E \times E \to \mathbb{C}, (u,v) \mapsto \overline{\varphi(u)}\psi(v) + \overline{\psi(u)}\varphi(v)$$

est semi-linéaire hermitienne.

2. Démontrer que l'application

$$\Psi : E \times E \to \mathbb{C}, (u,v) \mapsto \varphi(u)\psi(v) - \varphi(v)\psi(u)$$

est une forme bilinéaire vérifiant

$$\Psi(v,u) = -\Psi(u,v) \text{ pour tout } u, v \in E.$$

3. Supposons que $E = \mathbb{R}^3$ et que, pour tout $x \in \mathbb{R}^3$, $\varphi(x) = y_1^t x$, $\psi(x) = y_2^t x$, où $(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^3$ sont deux vecteurs colonnes fixés. Donner les matrices de b et Ψ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 4.

Soit Φ une forme bilinéaire définie sur $E \times E$ où E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n. Soit A une matrice représentant Φ dans une base $\mathcal{B}$ fixée. Montrer que l'application

$$\Psi : E \times E \to \mathbb{R}$$

définie par $\Psi(u,v) = \Phi(v,u)$ est une forme bilinéaire et préciser, en fonction de A, sa matrice dans la base $\mathcal{B}$. Montrer que Ψ est symétrique (resp. antisymétrique) si et seulement si A l'est.

Exercice 5. Soit $(a,b,c) \neq 0,0,0)$, et soit

$$f_{a,b,c} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto ax + by + cz.$$

Soit
$$\varphi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, (u,v) \mapsto f_{a,b,c}(u \wedge v).$$
Montrer que φ est bilinéaire et calculer sa matrice représentative dans la base canonique.

Exercice 6.

Soit $b : V \times V \to K$ une forme bilinéaire symétrique, et soit $h : V \times V \to K$ une forme semi-linéaire hermitienne. Montrer les relations suivantes :

(1) $\frac{1}{2}(b(x+y,x+y) - b(x,x) - b(y,y)) = b(x,y)$

(2) $\frac{1}{4}(b(x+y,x+y) - b(x-y,x-y)) = b(x,y)$

(3) $\frac{1}{2}(h(x+y,x+y) - h(x,x) - h(y,y)) = \mathrm{Re}h(x,y)$

(3) $\frac{1}{2}(h(x-iy,x-iy) - h(x,x) - h(y,y)) = \mathrm{Im}h(x,y)$

(4) $\frac{1}{4}(h(x+y,x+y) - h(x-y,x-y)) = \mathrm{Re}h(x,y)$

(5) $\frac{1}{4}(h(x-iy,x-iy) - h(x+iy,x+iy)) = \mathrm{Im}h(x,y)$.

Exercice 7.

Soit $b : V \times V \to K$ une forme bilinéaire symétrique. Pour une partie S de V, on pose
$$S^\perp = \{x \in V \mid b(x,s) = 0 \text{ pour tout } s \in S\}.$$

(1) Montrer que $S^\perp$ est un sous-espace vectoriel de V.

(2) Pour chaque forme bilinéaire b ci-dessous, montrer que b est symétrique, et calculer le rang de b.

Calculer également $V^\perp$ et $S^\perp$.

1. $b : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, b(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}) = x_1y_1 + x_2y_1 + x_1y_2$, $S = \{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} | x + y + z = 0\}$.
2. $b : \mathbb{R}_3[X] \times \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}, (P,Q) \mapsto P'(0)Q(0) + P(0)Q'(0)$, $S = \mathbb{R}_2[X]$.

Exercice 8. Démontrer que, pour toute forme bilinéaire symétrique b sur un espace vectoriel E, pour tous sous-espaces vectoriels W, U, nous avons les propriétés suivantes.

1. $(U+W)^{\perp} = (U^{\perp}) \cap (W^{\perp})$.
2. $(U \cap W)^{\perp} \supset U^{\perp} + W^{\perp}$.

Donner un exemple d'une forme bilinéaire de rang 1 sur $\mathbb{R}^2$ et des sous-espaces $U, W \subset \mathbb{R}^2$ tels que

$$(U \cap W)^{\perp} \neq U^{\perp} + W^{\perp}.$$

Exercice 9. Soient $A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ des matrices $n \times n$. Montrer que, si pour tout $X, Y \in \mathbb{R}^n$ on a $X^t A Y = X^t B Y$, alors $A = B$.