



## Curiosités géométriques et physique de l'Univers

Jean-Pierre Demailly

Institut Fourier, Université de Grenoble I, France

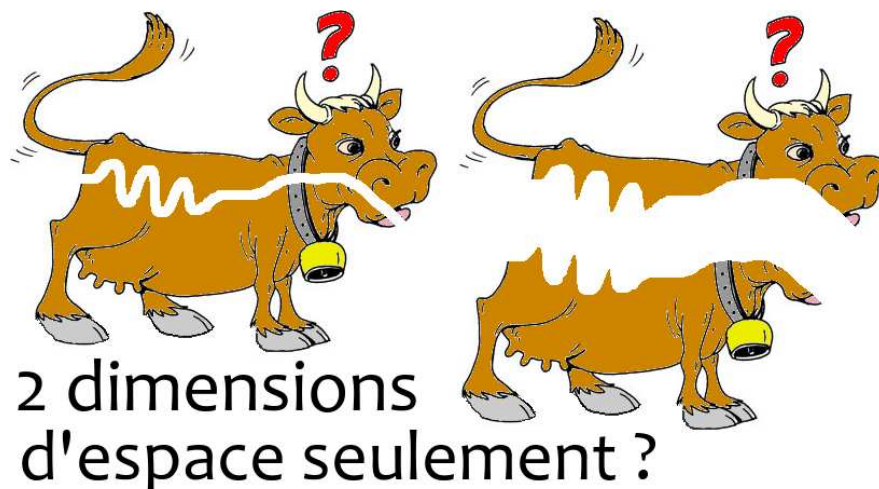
6 mai 2010 / Conférence Midi-Sciences - St Martin d'Hères

### Dimension de l'espace-temps

Selon Einstein, notre univers est de dimension 4 :

3 dimensions d'espace et 1 de temps

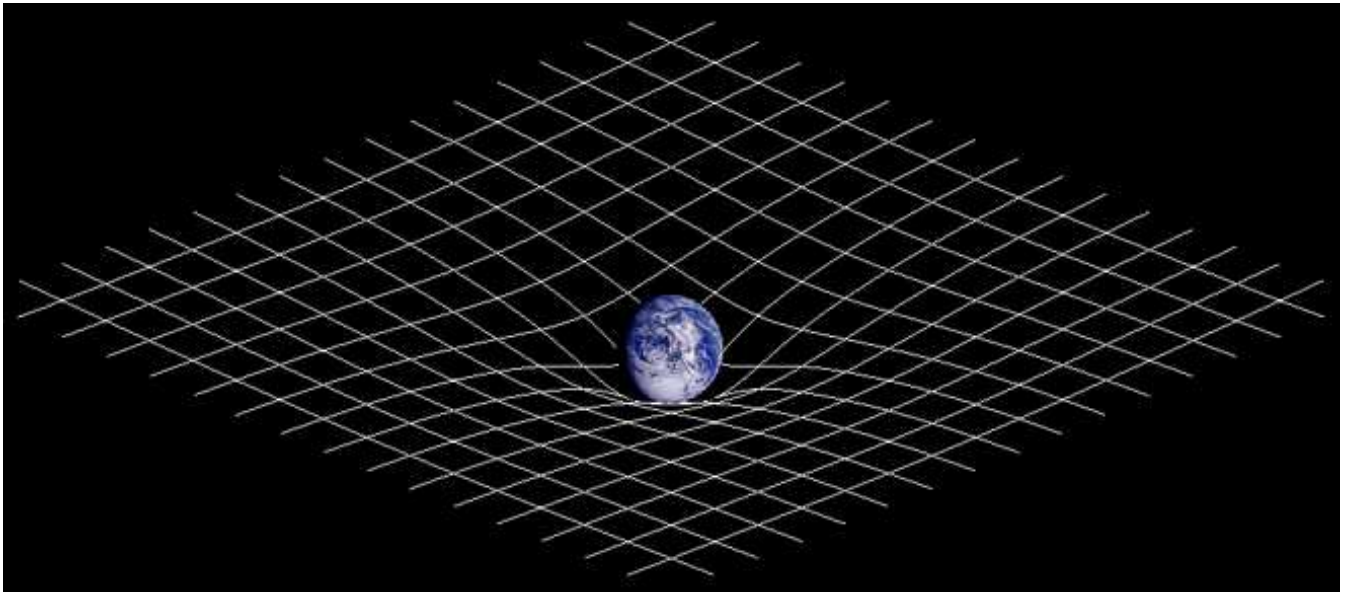
Pourrait-il en avoir moins ?



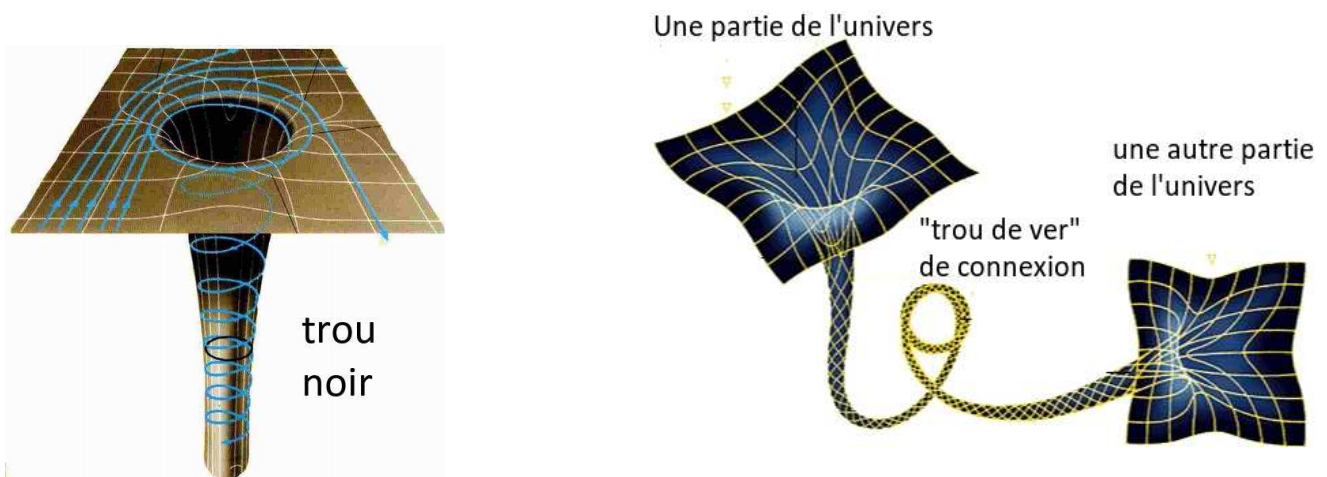
Le tube digestif de la vache la couperait en deux composantes connexes – les animaux ne pourraient pas exister!

# Géométrie de l'espace

Selon Einstein et sa théorie de la relativité générale (1907–1915),  
l'espace est courbé en raison de la distribution de matière, qui  
induit un champ gravitationnel



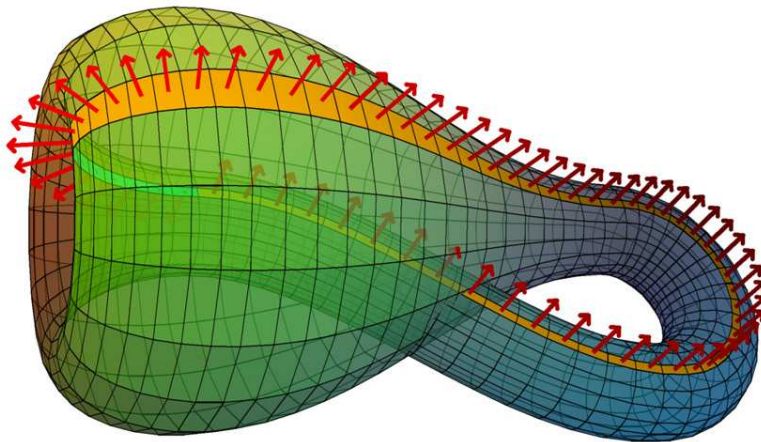
## “Trous noirs” et “trous de ver” ?



La question de savoir si l'univers est ouvert ou fermé agite  
beaucoup les astrophysiciens : cela dépend de la densité de matière  
présente dans l'univers ... seule une densité suffisante permettrait  
qu'il se referme sur lui-même.

## Question de topologie : un espace non orienté ?

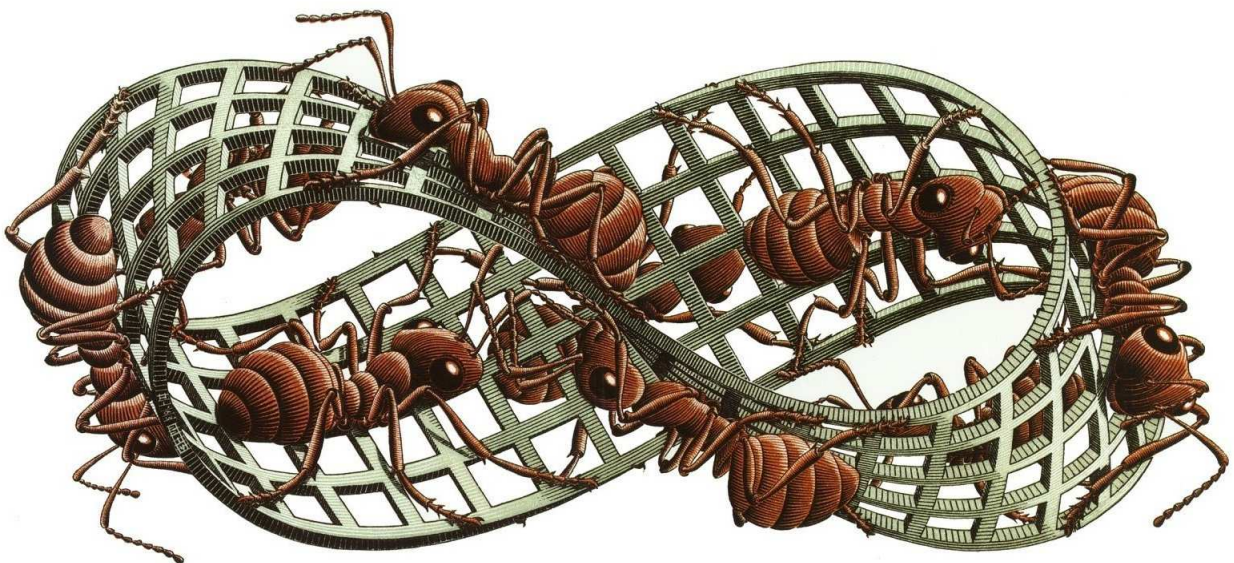
La “bouteille de Klein” (Felix Klein 1849 – 1925) : **une surface compacte** (=fermée sans bord) **non orientable**.



Après un “tour d’univers”, les droitiers se retrouveraient gauchers et vice-versa...

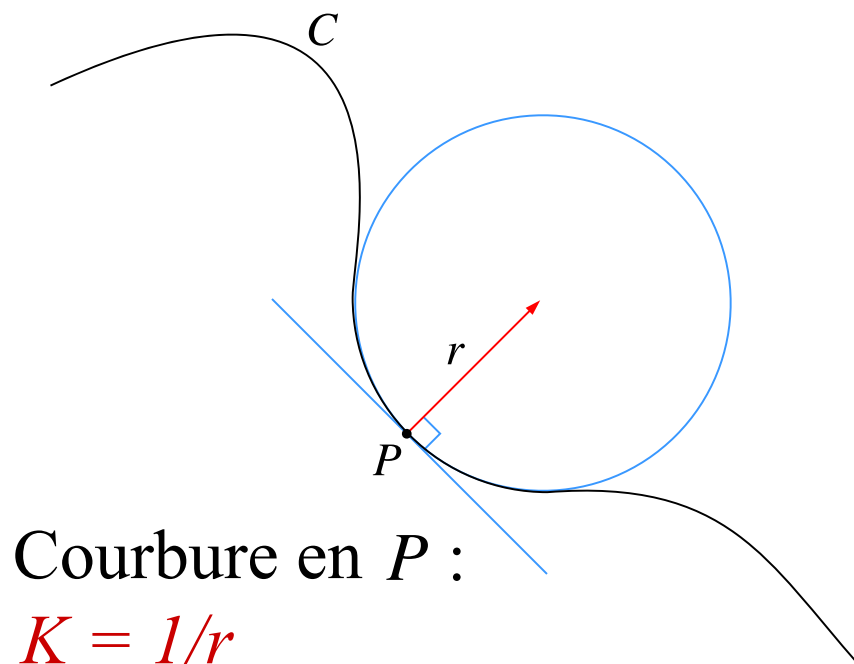
## Le ruban de Möbius d'Escher

Un célèbre dessin de Maurits Cornelis Escher (1898-1972)



# Comment calcule-t-on la courbure ?

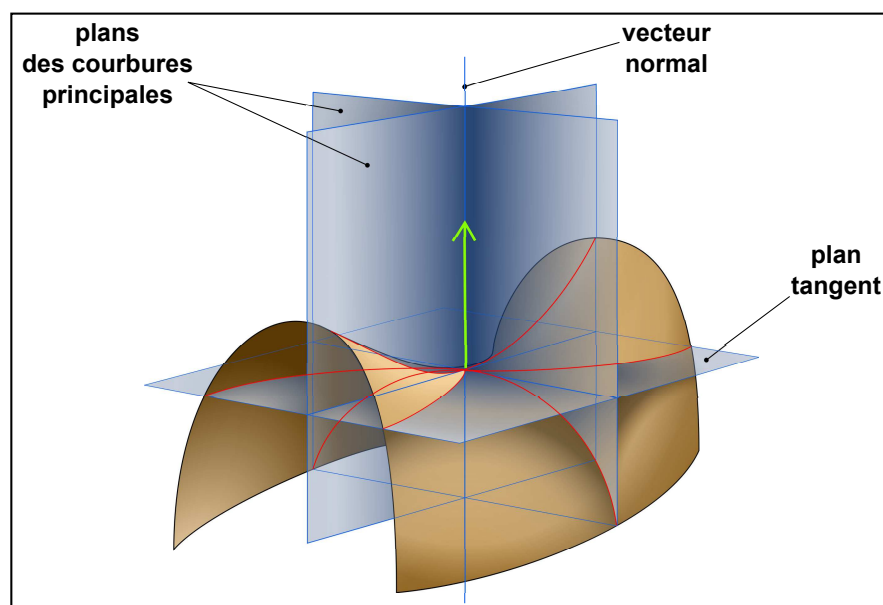
Une courbe et son **cercle osculateur** de rayon  $r$



Si le rayon  $r = \infty$ , la courbure  $K$  est **nulle**.

## Coefficients de courbure d'une surface

Les deux courbures d'une surface dans un espace de dimension 3



$$K_1 = \frac{1}{r_1} > 0,$$

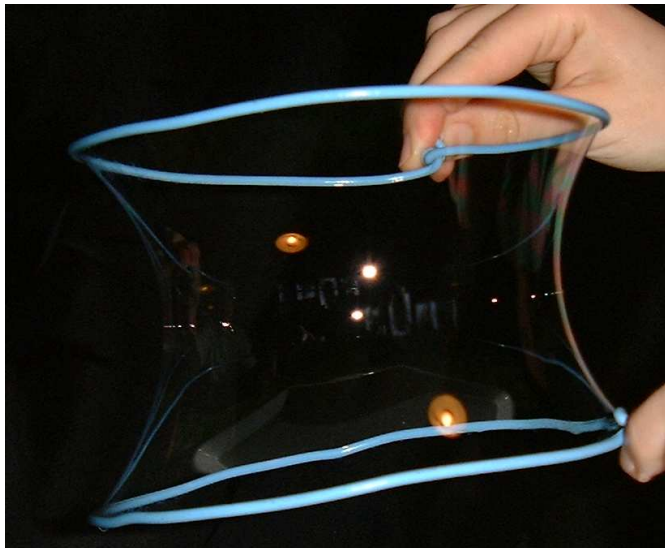
$$K_2 = \frac{1}{r_2} < 0$$



# La courbure moyenne

Courbure moyenne :  $M = \frac{1}{2}(K_1 + K_2)$

Une bulle de savon “libre” est de courbure moyenne nulle en tout point :  $K_1 = -K_2$ ,  $M = 0$



Catenoïde:

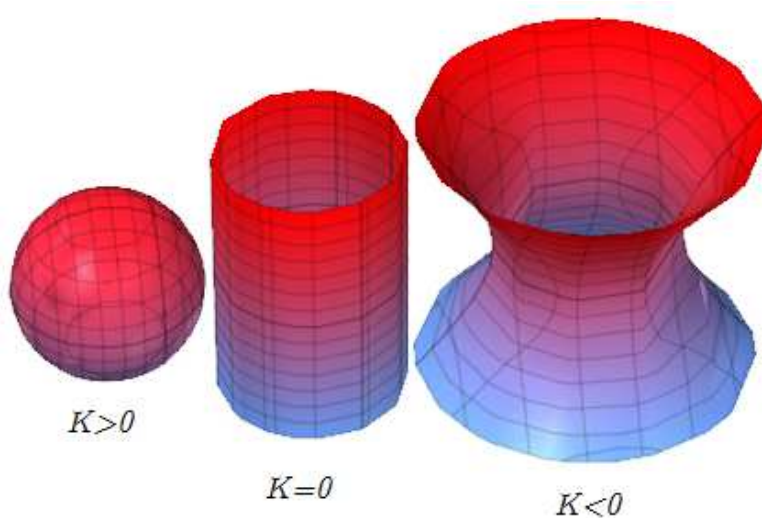
$$x = a \cosh u \cos \theta$$

$$y = a \cosh u \sin \theta$$

$$z = au$$

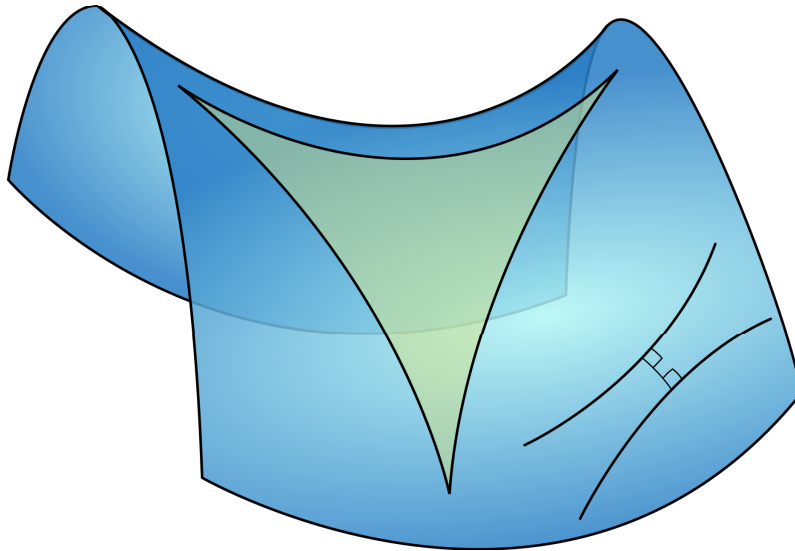
# La courbure de Gauss

Carl Friedrich Gauss (1777-1855) :  $K = K_1 \times K_2$  est invariant par déformation d'une surface inextensible (theorema egregium)



Le cylindre peut s'aplatir, pas la sphère ni le catenoïde.

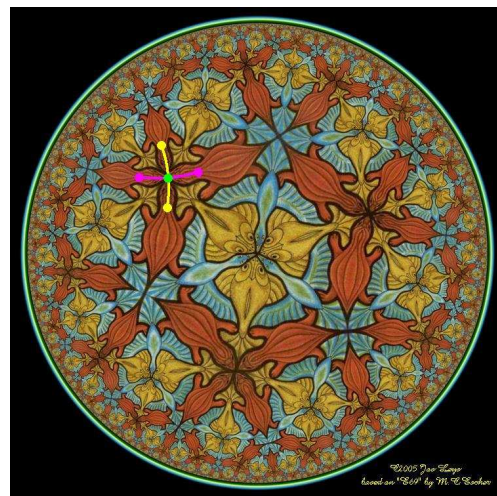
# La courbure de Gauss (formule de Gauss-Bonnet)



$$\text{somme des angles d'un triangle géodésique} = \pi + \iint K dS$$

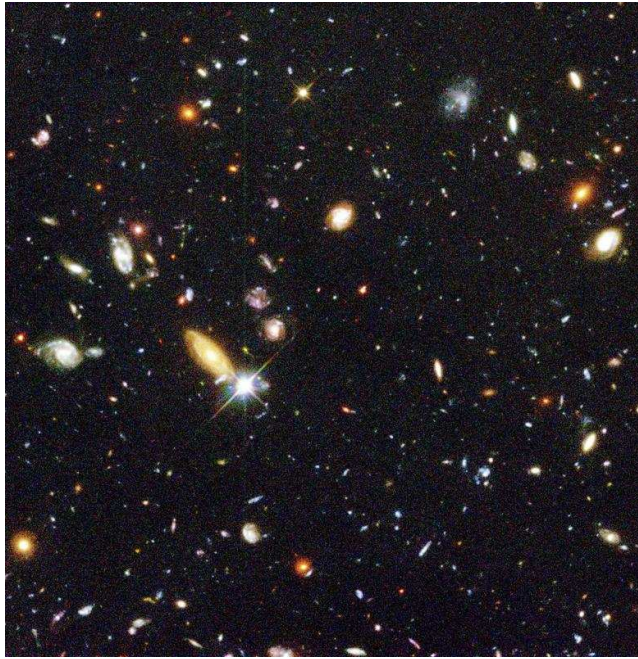
## Espace homogène / localement symétrique ?

Un espace  $X$  est dit **symétrique** s'il admet en tout point une "symétrie" par rapport à ce point



Dans ce cas il admet un **groupe de transformations isométriques**  $G$  et  $X$  est un **espace homogène**  $G/H$ .

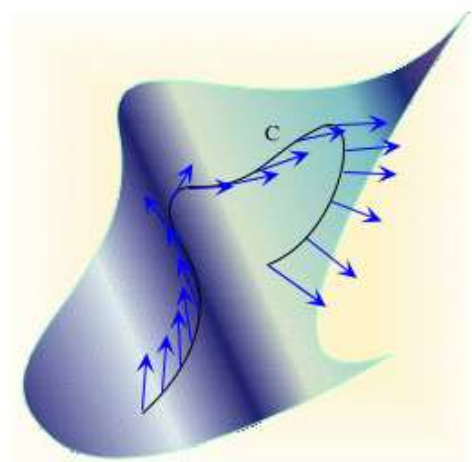
Mais l'univers n'est pas homogène...



"Grumeaux"  
de galaxies

## Métrique riemannienne / Tenseur de courbure

Bernhard Riemann (1826–1866) / espace à  $n$  dimensions



$$ds^2 = \sum g_{\alpha\beta}(x) dx^\alpha dx^\beta$$

Métrique riemannienne

$$R_{\alpha\beta\gamma}^{\delta}, \quad 1 \leq \alpha, \beta, \gamma, \delta \leq n.$$

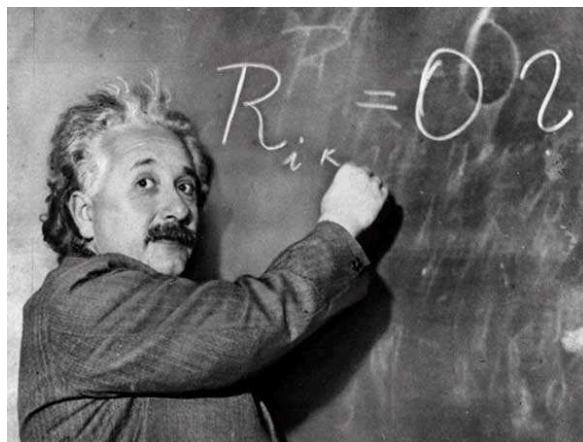
Tenseur de courbure de Riemann  
(calcul précisé par Levi-Civita)



# Tenseur de Ricci / équation d'Einstein

Le tenseur de Ricci est une sorte de “courbure moyenne” :

$$R_{\alpha\beta} = \sum_{\gamma} R^{\gamma}_{\alpha\beta\gamma}$$



Équation d'Einstein (1879–1955) de la relativité générale

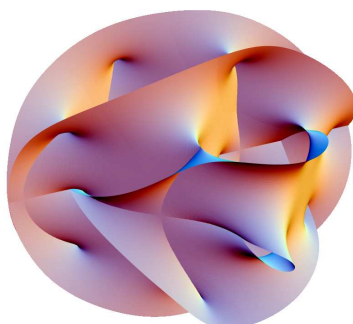
$$R_{\alpha\beta} - \left(\Lambda + \frac{1}{2}R\right)g_{\alpha\beta} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\alpha\beta}.$$

## Équation d'Einstein en mathématiques

Equation d'Einstein “simplifiée” (univers vide !!)

$$R_{\alpha\beta} = \lambda g_{\alpha\beta}, \quad \lambda = \text{constante.}$$

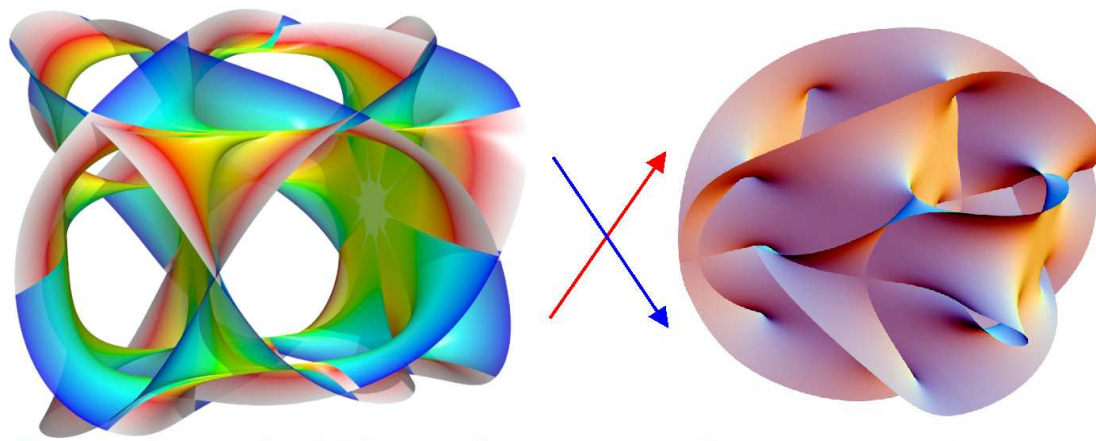
Vérifiée (avec  $\lambda = 0$ ,  $R_{\alpha\beta} \equiv 0$ ) par la  
variété de Calabi-Yau 6-dimensionnelle définie dans  $\mathbb{CP}^4$  par



$z_0^5 + z_1^5 + z_2^5 + z_3^5 + z_4^5 - 5a z_0 z_1 z_2 z_3 z_4 = 0$ ,  $z_0, z_1, z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{C}$ ,  
(avec 1 paramètre  $a$  de déformation). Yau: on a bien  $\text{Ricci} \equiv 0$ .



# Variétés de Calabi-Yau, sièges des champs de forces?



Paramètres de déformation

Structures métriques

Notre univers aurait 6 dimensions supplémentaires ultra-microscopiques ( $\simeq 10^{-35}$  m) qui seraient le siège des champs de force (théorie des cordes)... sous forme d'une variété de Calabi-Yau de dimension complexe 3.

Celle-ci étant de dimension réelle 6, ceci amène à un univers de  $4 + 6 = 10$  dimensions au total.

## Symétrie miroir et paramètres des familles de CY

La symétrie miroir est une dualité encore quelque peu mystérieuse entre les paramètres de déformation d'une famille de variétés de Calabi-Yau  $X_a$  (c'est-à-dire les coefficients  $a_*$  des polynômes qui les définissent), et les paramètres associés aux différentes métriques portées par les membres de la "famille duale"  $Y_b$ .

Ici ces métriques sont des "métriques de Kähler"

$\omega = \sqrt{-1} \sum \omega_{\alpha\bar{\beta}} dz^\alpha \wedge d\bar{z}^\beta$  (métriques hermitiennes vérifiant la propriété symplectique  $d\omega = 0$ ) et la nullité de la courbure Ricci( $\omega$ )  $\equiv 0$ .

Elles dépendent uniquement de la classe de cohomologie

$\{\omega\} \in H^{1,1}(Y_b, \mathbb{C})$  (= paramètres de la structure métrique des variétés  $Y_b$ ).

## Références

Nous renvoyons au site officiel [4] <http://www.mcescher.com/> pour des références exhaustives à l'œuvre de M.C. Escher. L'image du pavage hyperbolique du disque due à Escher est tirée du site de Jos Leys [6]. Les autres images proviennent du domaine public ou de sites libres de droit (Wikipedia...).

- [1] D. Cox, S. Katz, *Mirror Symmetry and Algebraic Geometry*, Mathematical Surveys and Monographs, Vol. **68**, Amer. Math. Soc., 1999.
- [2] J. Bertin, J.-P. Demailly, L. Illusie, C. Peters, *Introduction à la théorie de Hodge*, Panoramas et Synthèses, n<sup>o</sup> 3, Soc. Math. de France, 1996, 267 p ; *Introduction to Hodge Theory*, SMF/AMS Texts and Monographs, Vol. 8, 232 p ; <http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~demailly/books.html>, [B3].
- [3] J.-P. Demailly, *Complex analytic and differential geometry*, <http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~demailly/books.html>, [B1].
- [4] M.C. Escher, *Official website*, <http://www.mcescher.com/>.
- [5] P.A. Griffiths, J. Harris, *Principles of algebraic geometry*, Wiley, New York, 1978.
- [6] J. Leys, *Mathematical imagery*, The M.C.Escher flavoured pages, <http://www.josleys.com/galleries.php?catid=6>.
- [7] M. Spivak, *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry*, Volumes **1–5**, Publish or Perish, Inc., 3rd Edition, 1991.
- [8] C. Voisin, *Théorie de Hodge et géométrie algébrique complexe*, Collection cours spécialisés, Soc. Math. France, 2004.
- [9] C. Voisin, *Symétrie miroir*, Panoramas et Synthèses, Vol. **2**, Soc. Math. France, 1996, 152 p ; *Mirror Symmetry*, American Mathematical Society (SMF/AMS Texts and Monographs, Vol. 1), 1996.
- [10] E. Witten, *Magic, Mystery, and Matrix*, Notices of the AMS, Vol. **45** (1998) 1124–1129, <http://www.sns.ias.edu/~witten/papers/mmm.pdf>.