



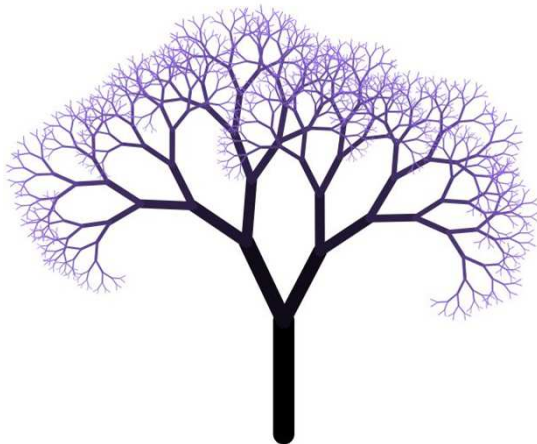
# Ensembles fractals, mesure et dimension

Jean-Pierre Demailly

Institut Fourier, Université de Grenoble I, France  
& Académie des Sciences de Paris

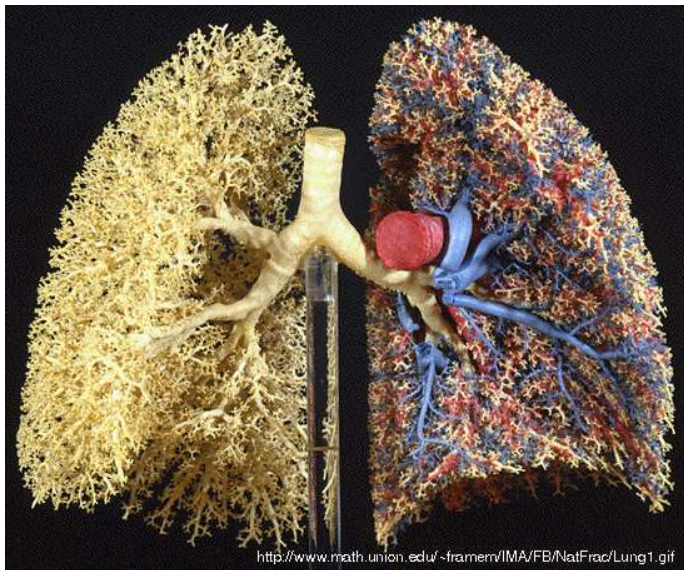
19 novembre 2012  
Conférence au Lycée Champollion, Grenoble

# Les fractales sont partout : arbres ...



fractale pouvant être obtenue comme un  
“système de Lindenmayer”

# Poumons ...



# Chou broccoli Romanesco ...



# Notion de dimension

La dimension d'un espace (ensemble de points dans lequel on se place) est classiquement le **nombre de coordonnées** nécessaires pour repérer un point de cet espace. C'est donc a priori un **nombre entier**. On va introduire ici une notion plus générale, qui conduit à des dimensions parfois non entières.

## Objet de dimension 1



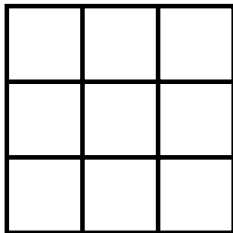
Par une homothétie de rapport 3, la mesure (longueur) est multipliée par  $3 = 3^1$ , l'objet résultant contient 3 fois l'objet initial.

**La dimension d'un segment est 1.**

## Objet de dimension 2



$\times 3$   
 $\rightsquigarrow$

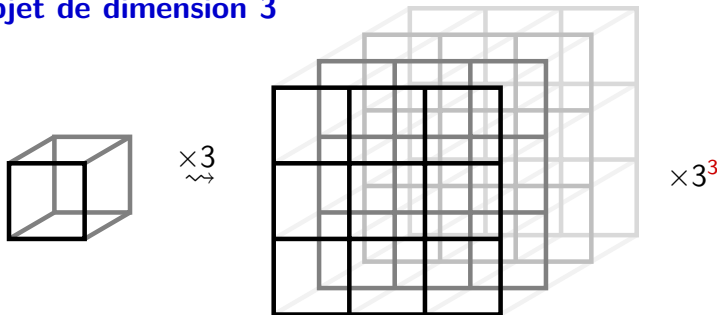


$\times 3^2$

Par une homothétie de rapport 3, la mesure (aire) de l'objet est multipliée par  $9 = 3^2$ , l'objet résultant contient 9 fois l'objet initial. La dimension du carré est **2**.

# Dimension $d \geq 3 \dots$

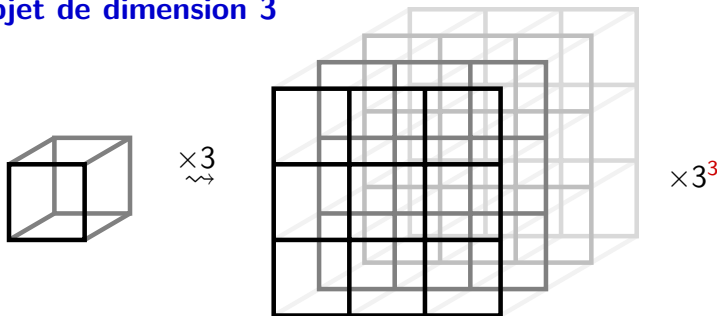
## Objet de dimension 3



Par une homothétie de rapport 3, la mesure (volume) de l'objet est multipliée par  $27 = 3^3$ , l'objet résultant contient 27 fois l'objet initial. La dimension du cube est 3.

# Dimension $d \geq 3$ ...

## Objet de dimension 3



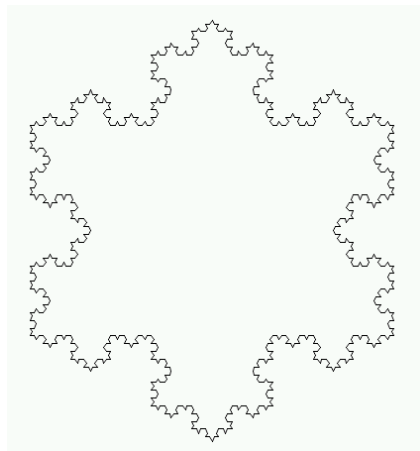
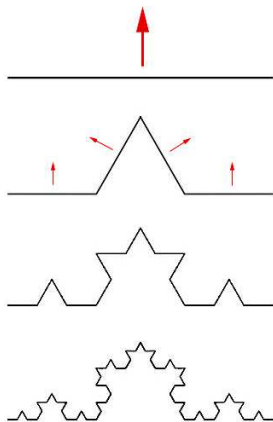
Par une homothétie de rapport 3, la mesure (volume) de l'objet est multipliée par  $27 = 3^3$ , l'objet résultant contient 27 fois l'objet initial. La dimension du cube est 3.

En généralisant, pour un objet de dimension  $d$ , l'effet d'une homothétie de rapport  $\lambda$  est de *multiplier la mesure par  $\lambda^d$* .

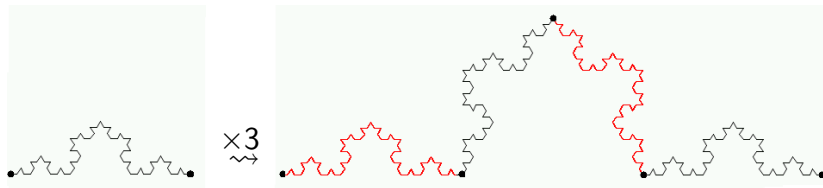


# Qu'en est-il d'un ensemble fractal ?

Prenons l'exemple de la courbe de Koch (ou flocon de neige) obtenue par itération du procédé ci-contre



# Effet d'une homothétie de rapport 3



Par une homothétie de rapport 3, l'objet devient un objet de nature identique, contenant 4 morceaux de même taille que l'objet initial, donc de mesure 4 fois plus grande. Ceci conduit à poser

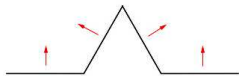
$$3^d = 4 \quad \Longrightarrow \quad d = \frac{\ln 4}{\ln 3} = 1,26185950714 \dots$$

Il nous faut admettre ici que la dimension n'est pas un entier, mais un nombre compris strictement entre 1 et 2 !

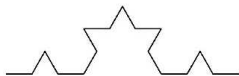
# Longueur de la courbe de Koch



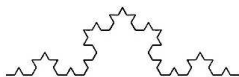
$$\ell = 1$$



$$\ell = 4 \times 1/3 = 4/3$$



$$\ell = (4/3) \times (4/3) = (4/3)^2$$

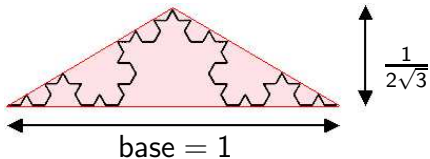


$$\ell = (4/3)^3$$

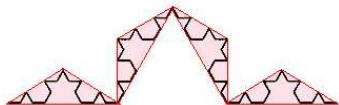
À chaque itération, la longueur est multipliée par  $4/3$ , donc si le segment initial est pris pour unité, la longueur de la  $n$ -ième itération est  $(4/3)^n$ , ce qui tend vers l'infini quand  $n \rightarrow +\infty$ . La longueur de la courbe de Koch est donc **infinie** !

# Aire de la courbe de Koch

La courbe de Koch est entièrement contenue dans le triangle isocèle figuré ci-dessous (raisonnement par récurrence).



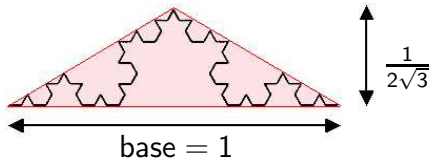
$$\text{aire} = \alpha = \frac{1}{4\sqrt{3}} \simeq 0.1443\dots$$



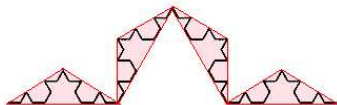
$$\text{aire} = 4 \times \frac{\alpha}{9} = \frac{4}{9}\alpha$$

# Aire de la courbe de Koch

La courbe de Koch est entièrement contenue dans le triangle isocèle figuré ci-dessous (raisonnement par récurrence).



$$\text{aire} = \alpha = \frac{1}{4\sqrt{3}} \simeq 0.1443\dots$$

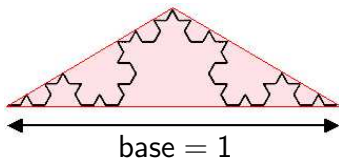


$$\text{aire} = 4 \times \frac{\alpha}{9} = \frac{4}{9}\alpha$$

Par récurrence sur le nombre d'itérations, on voit que la courbe de Koch est contenue dans la réunion de  $4^n$  triangles isocèles d'aire  $\alpha/9^n$ , l'aire totale  $(4/9)^n \alpha$  **tend vers 0**.

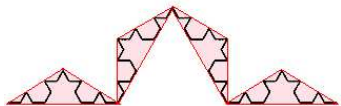
# Aire de la courbe de Koch

La courbe de Koch est entièrement contenue dans le triangle isocèle figuré ci-dessous (raisonnement par récurrence).



$$\frac{1}{2\sqrt{3}}$$

$$\text{aire} = \alpha = \frac{1}{4\sqrt{3}} \simeq 0.1443\dots$$



$$\text{aire} = 4 \times \frac{\alpha}{9} = \frac{4}{9}\alpha$$

Par récurrence sur le nombre d'itérations, on voit que la courbe de Koch est contenue dans la réunion de  $4^n$  triangles isocèles d'aire  $\alpha/9^n$ , l'aire totale  $(4/9)^n \alpha$  **tend vers 0**.

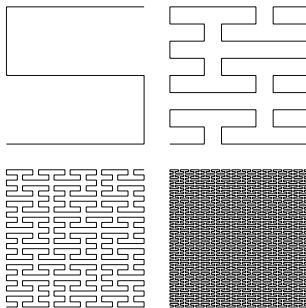
L'aire de la courbe de Koch **est donc nulle !**

# La courbe de Peano

Il existe cependant des courbes continues **d'aire non nulle**, même si on les trace avec un crayon infiniment fin !

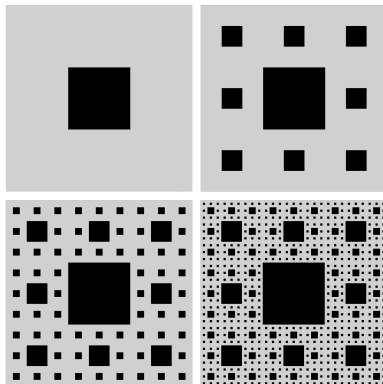
Voici une courbe imaginée en 1890 par le mathématicien italien **Giuseppe Peano** (1858-1932), en utilisant l'écriture des réels en base 3

$$[0, 1] \ni t = 0.a_1a_2a_3\dots = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n 3^{-n}, \quad a_n = 0, 1, 2$$



# Le tapis de Sierpinski

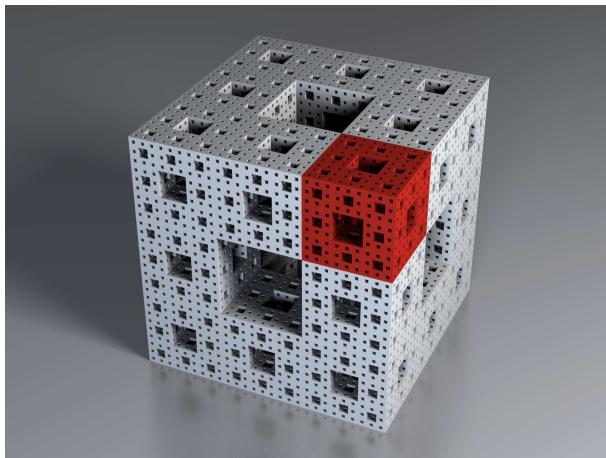
du nom du mathématicien polonais **Wacław Sierpiński** (1882-1969).



**Exercice :** la dimension (partie grise) est  
 $d = \ln(8)/\ln(3) \simeq 1,892789\dots$ , l'aire est nulle.



# L'éponge de Menger



Sa dimension est  $d = \ln(20)/\ln(3) \simeq 2,726833\dots$   
et son volume est nul.

# Mesure $d$ -dimensionnelle de Hausdorff

Les notions de longueur ( $d = 1$ ), d'aire ( $d = 2$ ), de volume ( $d = 3$ ) se généralisent pour  $d$  réel  $> 0$  quelconque des mesures  $d$ -dimensionnelles introduites par Felix Hausdorff (1868-1942) – l'un des fondateurs de la topologie moderne. Si  $(E, \delta)$  est un espace muni d'une distance  $\delta(x, y)$  quelconque, on définit la mesure de Hausdorff  $d$ -dimensionnelle d'une partie  $A$  de  $E$  par

$$\mathcal{H}_d(A) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathcal{H}_{d,\varepsilon}(A), \quad \mathcal{H}_{d,\varepsilon}(A) = \inf_{\text{diam } A_i \leq \varepsilon} \sum_i (\text{diam } A_i)^d$$

où  $\mathcal{H}_{d,\varepsilon}(A)$  est la borne inférieure des sommes  $\sum_i (\text{diam } A_i)^d$  étendue à toutes les partitions dénombrables  $A = \bigcup A_i$  avec  $\text{diam } A_i \leq \varepsilon$ .

# Dimension de Hausdorff



Félix Hausdorff (1868-1942)

## Définition.

*Si  $(E, \delta)$  est un espace métrique et  $A$  une partie de  $E$ , on dit que  $A$  est de dimension de Hausdorff égale à  $d_0$  si on a*

$$\mathcal{H}_d(A) = +\infty \text{ pour } d < d_0 \quad \text{et} \quad \mathcal{H}_d(A) = 0 \text{ pour } d > d_0.$$

# Notion de système dynamique discret

L'une des façons physiquement naturelle d'obtenir des fractales est de considérer un **système dynamique**.

# Notion de système dynamique discret

L'une des façons physiquement naturelle d'obtenir des fractales est de considérer un **système dynamique**.

D'un point de vue mathématique, on a un espace  $X$  (système physique) et une fonction  $f : X \rightarrow X$  qui décrit une évolution élémentaire de  $X$ , se répétant à l'identique dans le temps (ici on simplifie...).

# Notion de système dynamique discret

L'une des façons physiquement naturelle d'obtenir des fractales est de considérer un **système dynamique**.

D'un point de vue mathématique, on a un espace  $X$  (système physique) et une fonction  $f : X \rightarrow X$  qui décrit une évolution élémentaire de  $X$ , se répétant à l'identique dans le temps (ici on simplifie...).

On étudie l'évolution des points par itération de  $f$ . Autrement dit, étant donné un point initial  $x_0$ , on regarde la suite définie par la relation de récurrence  $x_{n+1} = f(x_n)$ , c'est-à-dire encore ce qu'on appelle l'orbite de  $x_0$  sous l'action des composées successives

$$f^{[n]} = f \circ f \circ \dots \circ f : X \rightarrow X, \quad x_n = f^{[n]}(x_0).$$

En mathématiques, on cherche toujours à étudier d'abord les situations intéressantes les plus simples possibles.

# Cas d'un trinôme complexe du second degré

L'une de ces situations-modèle consiste à regarder dans le plan complexe  $\mathbb{C}$  la transformation quadratique

$$P_c : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, \quad P_c(z) = z^2 + c \quad \text{où } c \text{ est un paramètre.}$$

On considère ici l'orbite  $z_n = P_c^{[n]}(z_0)$  d'un point  $z_0 \in \mathbb{C}$  donné. On notera que  $P_c^{[2]}(z) = (z^2 + c)^2 + c$  est un polynôme de degré 4 ; de manière générale,  $P_c^{[n]}$  est un polynôme de degré  $2^n$ .

# Cas d'un trinôme complexe du second degré

L'une de ces situations-modèle consiste à regarder dans le plan complexe  $\mathbb{C}$  la transformation quadratique

$$P_c : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, \quad P_c(z) = z^2 + c \quad \text{où } c \text{ est un paramètre.}$$

On considère ici l'orbite  $z_n = P_c^{[n]}(z_0)$  d'un point  $z_0 \in \mathbb{C}$  donné. On notera que  $P_c^{[2]}(z) = (z^2 + c)^2 + c$  est un polynôme de degré 4 ; de manière générale,  $P_c^{[n]}$  est un polynôme de degré  $2^n$ .

On introduit par définition :

**Ensemble de Julia de  $P_c$ .**

*On appelle ensemble de Julia rempli  $K_c$  l'ensemble des points initiaux  $z_0$  tels que la suite  $(z_n)$  reste bornée, et ensemble de Julia le bord  $J_c = \partial K_c$  de l'ensemble de Julia rempli  $K_c$ .*



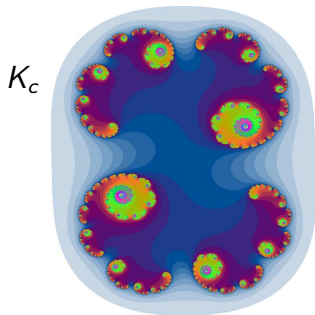
# Ensemble de Julia

Si  $c = 0$ , on a simplement  $P_0^{[n]}(z) = z^{2^n}$  et on voit aussitôt que  $K_0$  consiste en le disque unité fermé  $|z| \leq 1$  (donc  $J_0$  est le cercle unité).

# Ensemble de Julia

Si  $c = 0$ , on a simplement  $P_0^{[n]}(z) = z^{2^n}$  et on voit aussitôt que  $K_0$  consiste en le disque unité fermé  $|z| \leq 1$  (donc  $J_0$  est le cercle unité).

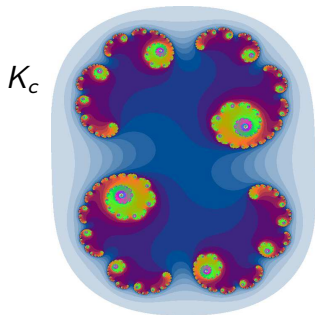
Pour toute autre valeur  $c \neq 0$  on obtient un ensemble fractal. Voici par exemple une image de  $J_c$  et  $K_c$  pour la valeur  $c = 0,328075517 + 0,022051744 i$  du paramètre :



# Ensemble de Julia

Si  $c = 0$ , on a simplement  $P_0^{[n]}(z) = z^{2^n}$  et on voit aussitôt que  $K_0$  consiste en le disque unité fermé  $|z| \leq 1$  (donc  $J_0$  est le cercle unité).

Pour toute autre valeur  $c \neq 0$  on obtient un ensemble fractal. Voici par exemple une image de  $J_c$  et  $K_c$  pour la valeur  $c = 0,328075517 + 0,022051744 i$  du paramètre :



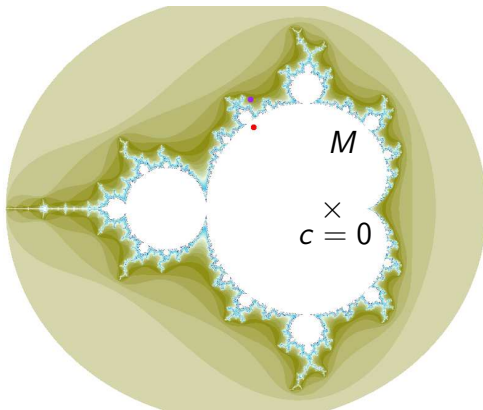
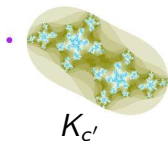
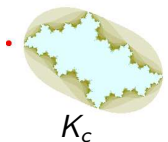
Gaston Julia  
(1893-1978)

# Ensemble de Mandelbrot

Mathématicien franco-américain **Benoît Mandelbrot** (1924-2010).

## Ensemble de Mandelbrot

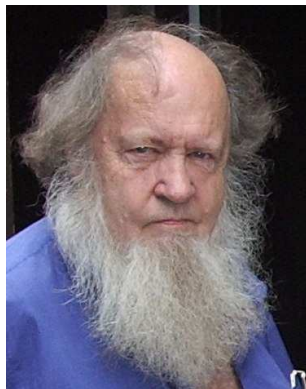
*C'est l'ensemble  $M$  des valeurs complexes  $c$  du paramètre telles que l'ensemble de Julia  $K_c$  associé à  $P_c$  soit connexe.*



# Dynamiciens célèbres ...



Benoît Mandelbrot (1924-2010)



Adrien Douady (1935-2006)

# Un ensemble fractal de dimension 3 : le Mandelbulbe de degré $p = 8$



# L'équation du Mandelbulbe de degré $p$

White et Nylander ont donné la formule suivante en coordonnées sphériques dans  $\mathbb{R}^3$

$$\langle x, y, z \rangle^p = r^p \langle \cos(p\theta) \cos(p\phi), \sin(p\theta) \cos(p\phi), \sin(p\phi) \rangle$$

$$\text{où } \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \theta = \arctan(y/x) \\ \text{et } \phi = \arctan(z/\sqrt{x^2 + y^2}) = \arcsin(z/r). \end{cases}$$

pour la  $p$ -ième puissance du nombre hypercomplexe 3D.

# L'équation du Mandelbulbe de degré $p$

White et Nylander ont donné la formule suivante en coordonnées sphériques dans  $\mathbb{R}^3$

$$\langle x, y, z \rangle^p = r^p \langle \cos(p\theta) \cos(p\phi), \sin(p\theta) \cos(p\phi), \sin(p\phi) \rangle$$

$$\text{où } \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \theta = \arctan(y/x) \\ \text{et } \phi = \arctan(z/\sqrt{x^2 + y^2}) = \arcsin(z/r). \end{cases}$$

pour la  $p$ -ième puissance du nombre hypercomplexe 3D.

Comme pour l'ensemble de Mandelbrot plan, on regarde les domaines de convergences des suites obtenues par itération de  $w \mapsto w^p + c$  où  $w$  et  $c$  sont des nombres "hypercomplexes"  $w = \langle x, y, z \rangle$  dans  $\mathbb{R}^3$  et  $w \mapsto w^p$  l'application définie ci-dessus

<http://www.skytopia.com/project/fractal/2mandelbulb.html>



- Logiciel de présentation : **L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X Beamer**  
**texlive** : <http://www.tug.org/texlive/>
- Systèmes de Lindenmayer :  
**lsysexp** : <http://www.sourceforge.org/Graphics/Fractals/lsysexp-latest.tar.gz>  
**xfraactint** : <http://www.fractint.org/ftp/current>
- Fractales :  
**xfraactint** et  
**xaos** : <http://wmi.math.u-szeged.hu/xaos/doku.php>  
**mandelbulber** : <http://sourceforge.net/projects/mandelbulber/>
- Images et photographies : **Wikipedia**