# Propriétés de semi-continuité de la cohomologie et de la dimension de Kodaira-Iitaka

Jean-Pierre DEMAILLY

***Résumé*** – Soit $\mathcal{X} \to S$ un morphisme analytique propre et plat d'espaces complexes réduits, de fibres $(X_t)_{t\in S}$. Etant donné un faisceau $\mathcal{E}$ sur $\mathcal{X}$ de $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$-modules localement libres, induisant sur les fibres une famille de faisceaux $(E_t \to X_t)_{t\in S}$, nous montrons que les dimensions de cohomologie $h^q(t) = h^q(X_t, E_t)$ satisfont la propriété de semi-continuité suivante: pour tout $q \geq 0$, la somme alternée $h^q(t) - h^{q-1}(t) + \ldots + (-1)^q h^0(t)$ est semi-continue supérieurement pour la topologie de Zariski. En particulier, $\mathcal{E}$ étant supposé de rang 1, si le faisceau $E_0$ au dessus d'une fibre $X_0$, $0 \in S$, a une dimension de Kodaira-Iitaka $\kappa(E_0) = d_0 \geq 0$ et si $h^0(X_0, E_0^{\otimes m})$ croît plus vite que $h^1(X_0, E_0^{\otimes m})$, alors $\kappa(E_t) \geq d_0$ pour $t$ voisin de 0.

## Semicontinuity properties of cohomology and of Kodaira-Iitaka dimension

***Abstract*** – *Let $\mathcal{X} \to S$ be a proper and flat morphism of complex spaces, and let $(X_t)_{t\in S}$ be the fibres. Given a sheaf $\mathcal{E}$ over $\mathcal{X}$ of locally free $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$-modules, inducing on the fibres a family of sheaves $(E_t \to X_t)_{t\in S}$, we show that the cohomology group dimensions $h^q(t) = h^q(X_t, E_t)$ satisfy the following semicontinuity property: for every $q \geq 0$, the alternate sum $h^q(t) - h^{q-1}(t) + \ldots + (-1)^q h^0(t)$ is upper semicontinuous for the Zariski topology. In particular, for $\mathcal{E}$ of rank 1, if the sheaf $E_0$ over a fibre $X_0$, $0 \in S$, has a Kodaira-Iitaka dimension $\kappa(E_0) = d_0 \geq 0$ and if $h^0(X_0, E_0^{\otimes m})$ grows faster than $h^1(X_0, E_0^{\otimes m})$, then $\kappa(E_t) \geq d_0$ for $t$ near 0.*

***Abridged English version.*** – Let $\mathcal{X} \to S$ be a proper and flat morphism of reduced complex spaces, and let $(X_t)_{t\in S}$ be the fibres. Given a sheaf $\mathcal{E}$ over $\mathcal{X}$ of locally free $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$-modules, inducing on the fibres a family of sheaves $(E_t \to X_t)_{t\in S}$, it is well-known that the cohomology group dimensions $h^q(t) = h^q(X_t, E_t)$ are upper semicontinuous; this was first shown by Kodaira-Spencer [KoS57] in the case of a smooth deformation $\mathcal{X} \to S$. In fact, the following stronger semicontinuity property (almost explicitly contained in H. Flenner's results [Fle81a]) holds:

**Theorem.** – *For every $q \geq 0$, the alternate sum $h^q(t) - h^{q-1}(t) + \ldots + (-1)^q h^0(t)$ is upper semicontinuous for the* (*analytic*) *Zariski topology.*

In the above analytic situation, the proof is an easy consequence of the method developed by Kiehl-Verdier [KiV71] to prove Grauert's direct image theorem [Gra60], modulo an elementary linear algebra argument. In fact, Kiehl-Verdier proved that there exists locally on $S$ a complex $(\mathcal{V}^q, d)$ of locally free sheaves which admits precisely the direct images $R^q\pi_\star\mathcal{E}$ as its cohomology sheaves. Moreover, as $\pi : \mathcal{X} \to S$ is flat, the fibre cohomology groups $H^q(X_t, E_t)$ are obtained from the complex of finite dimensional vector spaces $(V_t^q, d_t)$, where $V_t^q = \mathcal{V}^q \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{O}_{S,t}/\mathfrak{m}_{S,t}$ (see e.g. [DoV72], exposé II-bis). If $Z_t^q$ denotes the kernel of $d_t^q : V_t^q \to V_t^{q+1}$, then $z^q(t) := \dim Z_t^q$ is an upper semicontinuous function for the Zariski topology. This is easily seen by looking at the rank of the minor determinants of the matrix of $d^q : \mathcal{V}^q \to \mathcal{V}^{q+1}$. Since the truncated complex

$$0 \to V_t^0 \to V_t^1 \to \ldots \to V_t^{q-1} \to Z_t^q \to 0$$

admits $H^j(X_t, E_t)$, $0 \le j \le q$, as its sole cohomology groups, we infer

$$h^q(t) - h^{q-1}(t) + \ldots + (-1)^q h^0(t) = z^q(t) - v^{q-1} + v^{q-2} + \ldots + (-1)^q v^0,$$

where $v^q$ denotes the rank of $\mathcal{V}^q$. The Theorem follows. A similar proof can be obtained via harmonic forms and Hodge theory (but the semicontinuity is then proved only for the "ordinary" topology on $S$). For rank 1 sheaves $E_t$, the upper semicontinuity of $h^1(t) - h^0(t)$ implies the following

**Consequence.** – *If the sheaf $E_0$ over a fibre $X_0$, $0 \in S$, has a Kodaira-Iitaka dimension $\kappa(E_0) = d_0 \ge 0$ and if*

$$\limsup_{m \to +\infty} m^{-d_0} \big( h^0(X_0, E_0^{\otimes m}) - h^1(X_0, E_0^{\otimes m}) \big) > 0,$$

*then $\kappa(E_t) \ge d_0$ for $t$ near $0$ in the Zariski topology. In particular, if $X_0 = X$ is a nonsingular variety of Kodaira dimension $\kappa(X) := \kappa(K_X) = d_0$ such that $h^0(X, K_X^{\otimes m})$ grows faster than $h^1(X, K_X^{\otimes m})$ by a term of magnitude $c\, m^{d_0}$, then every small deformation $X_t$ satisfies $\kappa(X_t) \ge d_0$.*

Easy examples show that $\kappa(E_t)$ is in general neither upper nor lower semicontinuous (even with respect to the ordinary topology), without further assumptions on $h^1(X_t, E_t^{\otimes m})$. On the other hand, according to a more or less standard conjecture, it is expected that the Kodaira dimension $\kappa(X_t)$ should be constant for an arbitrary smooth deformation. I would like to thank S. Kosarew for pointing out such questions and for other stimulating discussions. In order to apply the above results to deformations of varieties of general type, it would be interesting to know whether every birational class of varieties of general type contains a normal variety $X$ with only $\mathbb{Q}$-Gorenstein terminal singularities, such that $h^0(X, K_X^{\otimes m}) - h^1(X, K_X^{\otimes m}) \ge c\, m^{\dim X}$ for $m$ large. This is indeed the case if a minimal model $X$ exists (i.e. if $K_X$ can be taken numerically effective). Moreover, in the above general setting, we conjecture that

$$\limsup_{m \to +\infty} m^{-n} \big( h^q(X_t, E_t^{\otimes m}) - h^{q-1}(X_t, E_t^{\otimes m}) + \ldots + (-1)^q h^0(X_t, E_t^{\otimes m}) \big)$$

is an upper semicontinuous function of $t$ (in the ordinary topology, say). We expect that this will follow from a careful analysis of the spectral theory of complex Laplace-Beltrami operators, at least when $\mathcal{X} \to S$ is smooth.

**1. Semi-continuité des dimensions de cohomologie**. – Soient $\mathcal{X}$ et $S$ des espaces analytiques complexes réduits, et soit $\pi : \mathcal{X} \to S$ un morphisme analytique propre et plat, de fibres $(X_t)_{t \in S}$. On suppose donné sur $\mathcal{X}$ un faisceau $\mathcal{E}$ de $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$-modules localement libres, c'est-à-dire une famille holomorphe $(E_t \to X_t)_{t \in S}$ de faisceaux localement libres. On sait alors que les dimensions de cohomologie $h^q(t) = \dim H^q(X_t, E_t)$ sont des fonctions semi-continues supérieurement de $t$ pour la topologie de Zariski (dans sa version analytique, c'est-à-dire la topologie dont les ouverts sont les complémentaires d'ensembles analytiques). Ce résultat remonte aux travaux de Kodaira-Spencer [KoS57] dans le cas d'une déformation lisse $\mathcal{X} \to S$, la topologie considérée sur $S$ étant la topologie ordinaire (de variété différentiable). Le cas général peut se déduire de la démonstration du théorème des images directes de Grauert [Gra60] (voir [KiV71], [FoK71], [DoV72], [Sch72]). On a en fait le résultat de semi-continuité nettement plus fort suivant:

**Théorème.** – *Pour tout $q \geq 0$, la somme alternée*

$$h^q(t) - h^{q-1}(t) + \ldots + (-1)^q h^0(t)$$

*est une fonction semi-continue supérieurement de $t$ dans la topologie de Zariski.*

A notre grande surprise, ce résultat semble peu connu des spécialistes (voir toutefois [Pal76], pour un résultat de semi-continuité analogue de la "cohomologie tangente", et H. Flenner [Fle81a,b] pour des résultats plus forts concernant des foncteurs cohomologiques généraux; voir aussi M. Schneider [Sch72]). Nous redonnons ci-dessous une démonstration indépendante élémentaire. Je tiens à remercier vivement S. Kosarew pour quelques références et conversations ayant fortement contribué à l'élaboration des idées de cette note.

*Preuve.* La démonstration du théorème des images directes donnée dans [KiV71] fournit localement sur $S$ un complexe $(\mathcal{V}^q, d)$ de faisceaux localement libres dont la cohomologie calcule les images directes $R^q\pi_\star\mathcal{E}$. De plus, comme $\pi : \mathcal{X} \to S$ est plat, la cohomologie des fibres $H^q(X_t, E_t)$ s'obtient à partir du complexe d'espaces vectoriels de dimension finie $(V_t^q, d_t)$, où $V_t^q = \mathcal{V}^q \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{O}_{S,t}/\mathfrak{m}_{S,t}$ (voir par exemple [DoV72], exposé II-bis). Si $Z_t^q$ désigne le noyau du morphisme $d_t^q : V_t^q \to V_t^{q+1}$, alors $z^q(t) := \dim Z_t^q$ est une fonction semi-continue supérieurement pour la topologie de Zariski, comme on le voit aisément en regardant le rang des mineurs de la matrice définissant le morphisme $d^q : \mathcal{V}^q \to \mathcal{V}^{q+1}$. Le complexe tronqué

$$0 \to V_t^0 \to V_t^1 \to \ldots \to V_t^{q-1} \to Z_t^q \to 0$$

ayant pour cohomologie les groupes $H^j(X_t, E_t)$ d'indices $0 \leq j \leq q$, on obtient

$$h^q(t) - h^{q-1}(t) + \ldots + (-1)^q h^0(t) = z^q(t) - v^{q-1} + v^{q-2} + \ldots + (-1)^q v^0,$$

où $v^q$ désigne le rang de $\mathcal{V}^q$. Le théorème s'ensuit. QED

**Remarque.** – La démonstration initiale de la semi-continuité de $h^q(t)$ proposée par Kodaira-Spencer [KoS57] utilisait les formes harmoniques et la théorie de Hodge. Dans le cas où les fibres $X_t$ sont lisses, il est aisé d'adapter également cette démonstration pour obtenir la semi-continuité de $h^q(t) - h^{q-1}(t) + \ldots + (-1)^q h^0(t)$ (mais seulement pour la topologie ordinaire, dans ce contexte). On utilise le fait que les groupes $H^q(X_t, E_t)$ peuvent se calculer à partir de sous-complexes $(V_t^q)$ de dimension finie convenables du complexe de Dolbeault $\big(C^\infty(X_t, \Lambda^{0,q}T^\star_{X_t} \otimes E_t), \overline{\partial}\big)$. Ayant muni $\mathcal{X}$ et $\mathcal{E}$ de métriques hermitiennes, on peut prendre pour $(V_t^q)$ le sous-complexe tel que $V_t^q$ est la somme directe des espaces propres du Laplacien $\Delta_t^q = \overline{\partial}\overline{\partial}^\star + \overline{\partial}^\star\overline{\partial}$ de valeurs propres inférieures ou égales à un réel $\lambda_0 > 0$ donné (c'est bien un sous-complexe grâce à la propriété de commutation évidente $\overline{\partial}\Delta_t^q = \Delta_t^{q+1}\overline{\partial}$). Si $t_0 \in S$ est fixé, on choisit une valeur $\lambda_0$ n'appartenant au spectre d'aucun des opérateurs $\Delta_{t_0}^q$; on sait alors que les espaces $V_t^q$ définissent des fibrés vectoriels de classe $C^\infty$ dans un voisinage de $t_0$, de sorte que le raisonnement précédent s'applique. De même, si $\mathcal{X} \to S$ est un morphisme algébrique propre et plat, la semi-continuité a lieu pour la topologie de Zariski algébrique.

**2. Semi-continuité de la dimension de Kodaira-Iitaka**. – Avec les notations du § 1, on suppose que $(E_t \to X_t)_{t\in S}$, est une famille holomorphe de faisceaux inversibles (i.e. de rang 1). Rappelons que la *dimension de Kodaira-Iitaka* d'un faisceau inversible $E \to X$ est l'entier $\kappa(E) := \sup_{m\in\mathbb{N}^\star} \operatorname{rang}\Phi_{E^{\otimes m}}$, où

$$\Phi_{E^{\otimes m}} : X \dashrightarrow P(H^0(X, E^{\otimes m})^\star), \qquad x \mapsto H_x = \{\sigma\,;\,\sigma(x) = 0\}$$

est l'application méromorphe canonique associée à l'espace de sections $H^0(X, E^{\otimes m})$ si celui est non nul; si tous ces espaces sont nuls, on pose par convention $\kappa(E) = -\infty$. La *dimension de Kodaira* de la variété $X$ elle-même est par définition $\kappa(X) := \kappa(K_X)$. Si $\kappa(E) = d \geq 0$, il existe une constante $c > 0$ telle que

$$h^0(X, E^{\otimes m}) \geq c\, m^d$$

pour tous les entiers $m$ multiples d'un entier $m_0$ tel que $\operatorname{rang}\Phi_{E^{\otimes m_0}} = d$. Dans la direction inverse, on a la borne supérieure suivante, qui garantit une certaine uniformité dans la croissance des espaces de sections:

**Lemme.** – *Soit $S' \subset S$ une partie ouverte relativement compacte (pour la topologie usuelle), et soit $d_{t,m} = \operatorname{rang}(\Phi_{E_t^{\otimes m}})$. Il existe une constante $C = C(S')$ telle que*

$$h^0(X_t, E_t^{\otimes m}) \leq C\, m^{d_{t,m}}, \qquad \forall t \in S',\ \forall m > 0.$$

*Preuve.* La démonstration est tout à fait classique et repose sur l'utilisation du lemme de Schwarz (voir [Ser54] et [Sie55]). L'idée est de montrer qu'une section de $H^0(X_t, E_t^{\otimes m})$ doit nécessairement s'annuler identiquement si elle s'annule ainsi que ses dérivées d'ordre $< m$ en un maillage de points $(x_{t,j})_{1\leq j\leq N}$ de $X_t$ suffisamment proches les uns des autres. Par suite de la compacité de $\overline{S}'$, le nombre $N$ de points requis peut être choisi indépendant de $t \in \overline{S}'$. On choisit pour $x_{t,j}$ des points lisses de $X_t$ en lesquels $\Phi_{E_t^{\otimes m}}$ est bien définie et de rang maximum $d_{t,m}$. Pour annuler toutes les dérivées d'ordre $< m$ d'une section de $E_t^{\otimes m}$ en un point $x_{t,j}$, il suffit d'annuler les dérivées d'ordre $< m$ dans les directions transverses à la fibre correspondante de $\Phi_{E^{\otimes m}}$, soit un total de $N\binom{m-1+d_{t,m}}{d_{t,m}} \leq C\, m^{d_{t,m}}$ équations. La borne désirée s'ensuit. QED

A ce point, il convient d'observer que la dimension $\kappa(E_t)$ n'est pas nécessairement une fonction semi-continue de $t$ (même pour la topologie ordinaire), comme le montre l'exemple suivant.

**Exemple.** – Soit $S$ une courbe elliptique, $Y$ une variété projective lisse quelconque et $L$ un fibré ample au dessus de $Y$. On définit $\mathcal{X} = Y \times S \times S$, où $\mathcal{X} \to S$ est la troisième projection, c'est-à-dire $X_t = Y \times S$ pour tout $t \in S$. Pour tout point $(y, s, t) \in \mathcal{X}$, on pose $\mathcal{E}_{(y,s,t)} := L_y \otimes \mathcal{O}(t - a)_s$, où $\mathcal{O}(t - a)$ désigne le fibré en droites associé au diviseur $t - a$ sur $S$, un point $a \in S$ étant choisi une fois pour toutes. Alors $E_t$ s'identifie au produit tensoriel total de $L$ sur $Y$ par le fibré $\mathcal{O}(t-a)$ sur $S$. Ce fibré a pour dimension de Kodaira $\kappa(E_t) = d := \dim Y$ lorsque $\mathcal{O}(t - a) \in \operatorname{Pic}^0(S)$ est un élément de torsion, et $\kappa(E_t) = -\infty$ sinon. Comme les points de torsion et non de torsion sont tous deux denses dans $\operatorname{Pic}^0(S)$, on en conclut que $\kappa(E_t)$ n'est pas semi-continue sur $S$. Toutefois, le théorème du § 1 combiné au lemme ci-dessus donne aussitôt le résultat de semi-continuité inférieure suivant.

**Théorème.** – *Si le fibré $E_0$ au dessus d'un point $0 \in S$ a une dimension de Kodaira-Iitaka $\kappa(E_0) = d_0 \geq 0$ et si*

$$\limsup_{m\to+\infty} m^{-d_0}\big(h^0(X_0, E_0^{\otimes m}) - h^1(X_0, E_0^{\otimes m})\big) > 0,$$

*alors $\kappa(E_t) \geq d_0$ pour $t$ voisin de 0 (relativement à la topologie de Zariski).*

*Preuve.* D'après l'hypothèse et la semi-continuité supérieure de $h^1(t) - h^0(t)$, il existe une constante $c > 0$ et des entiers $m$ arbitrairement grands tels que $h^0(X_t, E_t^{\otimes m}) - h^1(X_t, E_t^{\otimes m}) \geq c\, m^{d_0}$ pour tout $t$ dans un voisinage $\Omega_m$ de 0. Le lemme montre alors que le rang de $\Phi_{E_t^{\otimes m}}$ est au moins égal à $d_0$ lorsque $t \in \Omega_m \cap S'$ et lorsque $m$ est choisi assez grand pour que $C(S')\, m^{d_0-1} < c\, m^{d_0}$. QED

**Corollaire.** – *Soit $(X_t)_{t\in S}$ une famille de variétés complexes compactes lisses. Si une fibre $X_0$ est de dimension de Kodaira $\kappa(X_0) = d_0$ et vérifie*

$$\limsup_{m\to+\infty} m^{-d_0}\big(h^0(X_0, K_{X_0}^{\otimes m}) - h^1(X_0, K_{X_0}^{\otimes m})\big) > 0,$$

*alors $\kappa(X_t) \geq d_0$ pour $t$ voisin de 0.*

**3. Quelques questions connexes**. – La borne uniforme du $h^0$ fournie par le lemme du § 2 et la formulation des inégalités de Morse holomorphes [Dem85] suggèrent la propriété de semi-continuité asymptotique suivante, qui devrait découler d'un examen plus approfondi de la théorie spectrale des opérateurs $\Delta_t^q$.

**Conjecture.** – *Soit $(X_t)_{t\in S}$ une famille de variétés complexes compactes lisses de dimension $n$, et soit $(E_t \to X_t)_{t\in S}$ une famille holomorphe de fibrés en droites. Alors*

$$\limsup_{m\to+\infty} m^{-n}\big(h^q(X_t, E_t^{\otimes m}) - h^{q-1}(X_t, E_t^{\otimes m}) + \ldots + (-1)^q h^0(X_t, E_t^{\otimes m})\big)$$

*est une fonction semi-continue supérieurement de $t$ (pour la topologie ordinaire, disons).*

Dans le cas des surfaces ($\dim_{\mathbb{C}} X = 2$), il est bien connu que la dimension de Kodaira $\kappa(X_t)$ est invariante par déformation. D'où la question (classique):

**Question.** – *Soit $(X_t)_{t\in S}$ une famille de variétés complexes compactes lisses de dimension quelconque. La dimension de Kodaira $\kappa(X_t)$ est-elle toujours constante ?*

Par ailleurs, la théorie du modèle minimal (Mori, Kawamata, Kollár, ..., cf. [KMM85]) prévoit que toute variété algébrique $X$ de type général est birationnelle à un "modèle minimal" $Y$, qui est une variété algébrique normale ayant des singularités terminales $\mathbb{Q}$-factorielles et un fibré canonique $K_Y$ numériquement effectif. La croissance du $h^1(Y, K_Y^{\otimes m})$ est alors d'un ordre de grandeur $\le C\, m^{n-1}$, inférieur à celle de $h^0(Y, K_Y^{\otimes m}) \sim m^n$, où $n = \dim Y$. Il est donc naturel de se poser le problème plus faible (et probablement plus simple) suivant.

**Problème.** – *Soit $X$ une variété algébrique projective de type général, c'est-à-dire telle que $h^0(X, K_X^{\otimes m}) \sim m^n$, où $n = \dim X$. Existe-t-il une variété algébrique normale $Y$ birationnellement équivalente à $X$, ayant des singularités terminales $\mathbb{Q}$-factorielles, et telle que*

$$\limsup_{m\to+\infty} m^{-n}\big(h^0(Y, K_Y^{\otimes m}) - h^1(Y, K_Y^{\otimes m})\big) > 0 \quad ?$$

## Références


**[Dem85]** Demailly, J.P.: *Champs magnétiques et inégalités de Morse pour la $d''$-cohomologie.* C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math., **301**, 119-122 (13 mai 1985); Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **35**, 189-229 (1985)

**[DoV72]** Douady, A., Verdier, J.-L.: *Séminaire de Géométrie analytique de l'Ecole Normale Supérieure, 1971-72.* Astérisque **16**, Soc. Math. France (1974)

**[Fle81a]** Flenner, H.: *Ein Kriterium für die Offenheit der Versalität.* Math. Zeitschrift **178**, 449-473 (1981)

**[Fle81b]** Flenner, H.: *Eine Bemerkung über relative Ext-Garben.* Math. Ann. **258**, 175-182 (1981)

**[FoK71]** Forster, O., Knorr, K.: *Ein Beweis des Grauertschen Bildgarbensatzes nach Ideen von B. Malgrange.* Inventiones Math. **16**, 113-160 (1972)

**[Gra60]** Grauert, H.: *Ein Theorem der analytischen Garbentheorie und die Modulräume komplexer Strukturen.* Publ. Math. I.H.E.S. **5**, 233-292 (1960)

**[KMM85]** Kawamata, Y., Matsuda, K. and Matsuki, K.: *Introduction to the minimal problem.* Algebraic Geometry, Sendai, 1985, Adv. Stud. in Pure Math., Vol. 10, North Holland, Amsterdam, 283-360 (1987)

**[KiV71]** Kiehl, R. and Verdier, J.L.:*Ein einfacher Beweis des Kohärenzsatzes von Grauert.* Math. Ann. **195**, 24-50 (1971)

**[KoS57]** Kodaira, K. and Spencer, D.C.: *On the variation of almost complex structure.* Alg. Geom. and Topology, Princeton Univ. Press, 139-150 (1957); Kodaira's Collected Works, Vol. 2, Iwanami Shoten Publishers, p. 760-771

**[Pal76]** Palamodov, V.P.: *Deformations of complex spaces.* Uspekhi Math. Nauk **31**:3, 129-194 (1976); Russian Math. Surveys **31**:3, 129-197 (1976)

**[Sch72]** Schneider, M.: *Halbstetigkeitssätze für relativ analytische Räume.* Inventiones Math. **16**, 161-176 (1972)

**[Ser54]** Serre, J.P.: *Fonctions automorphes: quelques majorations dans le cas où $X/G$ est compact.* Sém. Cartan, exposé 2-1 à 2-9 (1953-54)

**[Sie55]** Siegel, C.L.: *Meromorphic Funktionen auf kompakten Mannigfaltigkeiten.* Nachrichten der Akademie der Wissenschaften in Göttingen, Math.-Phys. Klasse **4**, 71-77 (1955)


(version du 21 décembre 1994, imprimée le 31 mai 2007)

Université de Grenoble I, Institut Fourier,
URA 188 du CNRS, BP 74, 38402 Saint-Martin d'Hères, France

*et:* Les Alloves, 17, rue Saint-Exupéry, 38400 Saint-Martin d'Hères, France

*e-mail:* demailly@fourier.grenet.fr