Examen partiel de Topologie algébrique, 10/11/2016

Jean-Pierre Demailly

I. Une nouvelle preuve du théorème de d'Alembert

En utilisant la théorie des revêtements, on se propose de donner ici une nouvelle démonstration du thorème de d'Alembert (i.e. que le corps $\mathbb{C}$ est algébriquement clos). On s'intéresse aux revêtements connexes $\rho : X \to B$ de base $B = \mathbb{R}^n \smallsetminus \{0\}$, $n \geq 2$.

1) Quel est le groupe fondamental $\pi_1(\mathbb{R}^n \smallsetminus \{0\})$?

L'ouvert $\mathbb{R}^n \smallsetminus \{0\}$ se rétracte sur la sphère unité $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n \smallsetminus \{0\}$ au moyen de la rétraction par déformation

$$h(t,x) = (1-t)x + t\frac{x}{\|x\|} = \Big(1 - t + \frac{t}{\|x\|}\Big)x, \qquad t \in [0,1].$$

On a donc d'après le cours

$$\pi_1(\mathbb{R}^n \smallsetminus \{0\}) \simeq \pi_1(S^{n-1}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } n = 2, \\ \{1\} & \text{si } n \geq 3 \end{cases}$$

(il est inutile de spécifier les points base car ce sont des espaces connexes par arcs pour $n \geq 2$).

2) Pour $n \geq 3$, montrer que tout revêtement de $\mathbb{R}^n \smallsetminus \{0\}$ est trivial.

Pour $n \geq 3$, l'espace $\mathbb{R}^n \smallsetminus \{0\}$ est simplement connexe. On sait alors (d'après le théorème de relèvement), que tout revêtement de base $\mathbb{R}^n \smallsetminus \{0\}$ est trivial.

3) Déterminer, à isomorphisme de revêtements près, quels sont les revêtements connexes de $\mathbb{R}^2 \smallsetminus \{0\}$.

D'après le théorème général de la correspondance de Galois pour les revêtements, les revêtements connexes de $B = \mathbb{R}^2 \smallsetminus \{0\}$ sont les applications $\widehat{B}/H \to \widehat{B}/G \simeq B$ associées aux quotients $\widehat{B}/H$, où $\widehat{B}$ est le revêtement universel de B et H un sous-groupe de

$$G = \pi_1(B) = \mathrm{Aut}(\widehat{B} \to B).$$

(On notera que comme $\pi_1(B) \simeq \mathbb{Z}$ est abélien, ces sous-groupes sont distingués, donc les revêtements en question sont automatiquement galoisiens). Or $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^* \simeq \mathbb{R}^2 \smallsetminus \{0\}$ définit précisément le revêtement universel de $B = \mathbb{C}^*$ puisque $\mathbb{C}$ est simplement connexe. Les automorphismes du revêtement universel s'identifient aux translations $z \mapsto z + 2\pi i k$, $k \in \mathbb{Z}$, groupe isomorphe à $(\mathbb{Z}, +)$. Les sous-groupes de $(\mathbb{Z}, +)$ sont $H = \{0\}$ et $H = n\mathbb{Z}$. Si $H = \{0\}$, on obtient le revêtement universel $\widehat{B} \to B$ lui-même, tandis que si $H = n\mathbb{Z}$, le revêtement en question est

$$\widehat{\rho}_n : \widehat{B}/H = \mathbb{C}/(2\pi i n\mathbb{Z}) \to B = \mathbb{C}^* \simeq \mathbb{C}/2\pi i\mathbb{Z},$$

et on peut identifier $\mathbb{C}/(2\pi i n\mathbb{Z})$ à $\mathbb{C}^*$ par l'homéomorphisme $\varphi_n : \dot{z} \mapsto \zeta = \exp(z/n)$. On voit alors que $\widehat{\rho}_n$ "s'identifie" à l'application $\rho_n = \widehat{\rho}_n \circ \varphi_n^{-1} : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$, $\zeta \mapsto \zeta^n$. Les revêtements $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$ et $\rho_n : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$, $\zeta \mapsto \zeta^n$, $n \in \mathbb{N}^*$, constituent donc, à isomorphisme près, la liste de tous les revêtements connexes de $\mathbb{C}^*$ (on notera que $\rho'_n : \zeta \mapsto \zeta^{-n}$ donne un revêtement isomorphe à $\rho_n : \zeta \mapsto \zeta^n$, $\psi : \zeta \mapsto \zeta^{-1}$ étant un isomorphisme de l'un vers l'autre). Le groupe des automorphismes de ρ_n est isomorphe à $G/H \simeq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, donné explicitement par $\zeta \mapsto a\zeta$ où a décrit le groupe des racines n-ièmes de l'unité.

4) On suppose que $\mathbb{K} \supset \mathbb{C}$ est une extension finie de $\mathbb{C}$ (c'est-à-dire un sur-corps commutatif) de degré $d \geq 1$.

a) Que vaut $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{K}$?

On a $\mathbb{R} \subset \mathbb{C} \subset \mathbb{K}$ et $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{K} = 2\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{K} = 2d \geq 2$.

b) On munit le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{K}$ d'une norme quelconque $\|\ \ \|$, et on déduit une nouvelle norme $a \mapsto |a|$ sur $\mathbb{K}$ en prenant la norme d'application linéaire $z \mapsto az$ relativement à $\|\ \ \|$. Montrer qu'il s'agit d'une norme sous-multiplicative et en déduire qu'on peut définir une application exponentielle $\exp : \mathbb{K} \to \mathbb{K}^* = \mathbb{K} \smallsetminus \{0\}$ par la série entière usuelle.

La norme $\|\ \ \|$ n'est pas nécessairement sous-multiplicative (on ne sait pas si $\|ab\| \le \|a\|\,\|b\|$), mais cette propriété est vraie pour la norme d'applications linéaires $|\ \ |$ associée, et on a aussi $|1| = |\mathrm{Id}_{\mathbb{K}}| = 1$. En particulier, si on définit

$$\exp(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} z^n, \qquad z \in \mathbb{K}.$$

alors $|z^n| \le |z|^n$, et on en déduit que la série est absolument convergente. Comme $\mathbb{K}$ est un espace normé de dimension finie sur $\mathbb{R}$, il est complet, et la série est convergente sur $\mathbb{K}$ tout entier. On voit facilement par un argument de série produit que $\exp(z+w) = \exp(z)\exp(w)$ (pour cela, il est essentiel que $\mathbb{K}$ soit commutatif, cette relation n'a pas lieu dans le corps des quaternions !). En particulier $\exp(z)\exp(-z) = 1$, donc $\exp(z) \ne 0$ et $\exp(\mathbb{K}) \subset \mathbb{K}^*$.

c) Montrer que exp définit un C^∞ difféomorphisme d'un voisinage de 0 sur un voisinage de 1 et en déduire que l'image $\exp(\mathbb{K})$ est une partie à la fois ouverte et fermée de $\mathbb{K}^*$.

La relation $\exp(z+h) - \exp(z) = \exp(z)\big(\exp(h)-1\big) = \exp(z)\big(h + O(h^2)\big)$ montre que exp est différentielle et que la dérivée dans le corps $\mathbb{K}$ est $\exp' = \exp$. C'est donc une application indéfiniment différentiable, et comme $d\exp_0 = \mathrm{Id}_{\mathbb{K}}$, le théorème d'inversion locale implique que exp est un difféomorphisme d'un voisinage de 0 sur un voisinage de 1 dans $\mathbb{K}^*$. Le difféomorphisme inverse est d'ailleurs lui même donné par une série entière de rayon de convergence ≥ 1, à savoir

$$z = 1 + h \mapsto \log z = \log(1+h) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} h^k.$$

Si $\varphi : G \to H$ est un homomorphisme de groupes topologiques et que l'image d'un voisinage de 1_G est un ouvert V de H, alors l'image $H' = \varphi(H)$ contient V et coïncide avec la réunion de tous les translatés yV, $y \in H'$. L'image H' est donc alors un sous-groupe *ouvert* de H. Mais un sous-groupe ouvert H' est *automatiquement fermé* (c'est le complémentaire de la réunion des classes à gauche zH' autres que H', qui sont ouvertes). Si H est connexe, ceci implique la surjectivité de l'homomorphisme φ, et c'est le cas ici, puisque $\mathbb{K}^* \simeq \mathbb{R}^{2d} \smallsetminus \{0\}$, $2d \ge 2$. On a donc $\exp(\mathbb{K}) = \mathbb{K}^*$ (noter que ceci est bien vrai en particulier pour $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, mais pas pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, et il n'y a pas contradiction, $\mathbb{R}^*$ *n'étan pas connexe* !).

d) Montrer que ker(exp) (comme homomorphisme de groupes) est un sous-groupe discret non trivial H du groupe additif $(\mathbb{K}, +)$, puis que exp définit un revêtement connexe non trivial. En déduire les valeurs possibles du degré d et conclure.

La surjectivité de $\exp : \mathbb{K} \simeq \mathbb{K}^*$ implique par passage au quotient un isomorphisme $\mathbb{K}/H \to \mathbb{K}^*$ où $H = \ker(\exp)$. Comme exp est un homéomorphisme local, l'élement neutre 0 est isolé dans H, et H est donc un sous-groupe discret. Ceci entraîne que $\exp : \mathbb{K} \simeq \mathbb{K}^* \simeq \mathbb{K}/H$ est un revêtement. Ce revêtement n'est pas trivial puisque $H \supset 2\pi i\mathbb{Z}$ en regardant les éléments du noyau qui sont dans le sous-corps $\mathbb{C} \subset \mathbb{K}$. Mais si $d \ge 2$, $\mathbb{K}^* \simeq \mathbb{R}^{2d} \smallsetminus \{0\}$ est simplement connexe, ce qui contredit la possibilité d'un revêtement non trivial. Par conséquent $d = 1$, et on en conclut que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, donc $\mathbb{C}$ est algébriquement clos.

II. Sur les applications continues de S^1 dans S^1

On étudie ici les classes d'homotopie d'applications continues $f : S^1 \to S^1$ où $S^1 = \{z \in \mathbb{C}\,;\ |z| = 1\}$. On sait qu'on peut associer à une telle application un entier $\deg(f) \in \mathbb{Z}$ appelé degré, dépendant uniquement de la classe d'homotopie.

1) Montrer que l'on a la relation $\deg(g \circ f) = \deg(g) \times \deg(f)$:

a) en utilisant un argument direct d'homotopie ;

b) en utilisant un relèvement $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de f (resp. G de g) tel que $f(\exp(2\pi i u)) = \exp(2\pi i\, F(u))$, et en exprimant les degrés à l'aide de F et G.

a) On sait que $n = \deg(f)$ si et seulement si f est homotope à $f_n(z) = z^n$, et de même $p = \deg(g)$ si et seulement si g est homotope à $f_p(z) = z^p$. Par conséquent $g \circ f$ est homotope à $f_p \circ f_n : z \mapsto (z^n)^p = z^{np}$, et donc

$$\deg(g \circ f) = np = \deg(g) \times \deg(f).$$

b) Si $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est un relèvement de f alors $F(x+1) - F(x) = n$ est constante égale à $n = \deg(f)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ (noter que $\exp(2\pi i(F(x+1) - F(x)) = f(\exp(2\pi i(x+1)))\, f(\exp(2\pi i x))^{-1} = 1$). Pour $k \in \mathbb{N}^*$ entier, on en déduit $F(x+k) - F(x) = \sum_{j=0}^{k-1} (F(x+j+1) - F(x+j)) = kn$, et ceci vaut encore pour

$k \in \mathbb{Z}$ comme on le voit aisément en remplaçant x par $x-k$ et en multipliant les deux termes de l'égalité par -1. Maintenant, si G est un relèvement de g et $p = \deg(g)$, l'argument précédent nous donne de même $G(y+k) - G(y) = kp$. Or, il est clair que $G \circ F$ est un relèvement de $g \circ f$, et on trouve ainsi

$$\deg(g \circ f) = G(F(x+1)) - G(F(x)) = G(F(x)+n) - G(F(x)) = np$$

en prenant $k = n$ et $y = F(x)$.

2) Quels peuvent être les valeurs de $\deg(f)$ si f est un homéomorphisme de S^1 dans S^1 ?

Si $g = f^{-1}$, il vient $g \circ f = \mathrm{Id}_{S^1}$, donc $\deg(g) \times \deg(f) = 1$. Or un produit d'entiers relatifs ne peut donner 1 que si ces deux entiers valent ± 1. Les cas $\deg(f) = \deg(g) = \pm 1$ correspondent par exemple aux deux homéomorphismes $z \mapsto z$ et $z \mapsto z^{-1}$ (qui sont leurs propres inverses).

3) Si $\deg(f) \neq 1$, montrer que f admet un point fixe, et qu'il existe en revanche un homéomorphisme f de S^1 de degré 1 sans point fixe.

La rotation $f(z) = e^{2\pi i\alpha} z$ d'angle $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ non entier (en unité “tours”) est de degré 1 (car trivialement homotope à l'identité en remplaçant α par $t\alpha$, $t \in [0,1]$), et n'a pas de point fixe. En général f admet un point fixe si et seulement si $\delta(u) = F(u) - u$ passe par une valeur entière pour $u \in [0,1]$ (disons). Mais on a $\delta(1) - \delta(0) = n - 1$ où $n = \deg(f)$. Si $n \neq 1$, on a $|n-1| \geq 1$ et l'intervalle réel $[\delta(0), \delta(1)]$ contient un entier relatif k. Le théorème des valeurs intermédiaires implique l'existence de $u \in [0,1]$ tel que $\delta(u) = k$.

4) Soit $\zeta_p = e^{2\pi i/p}$ la racine p-ième primitive standard de l'unité, $p \geq 2$. On suppose que $f : S^1 \to S^1$ vérifie la relation

$$(*) \qquad f(\zeta_p u) = \zeta_p^a f(u), \qquad a \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}.$$

a) Dans le cas où $f(u) = u^n$, quelle condition n doit-il vérifier pour que la relation $(*)$ soit satisfaite ?

On trouve la condition $(\zeta_p u)^n = \zeta_p^a u^n$ pour $u \in S^1$, ce qui équivaut à $\zeta_p^n = \zeta_p^a$, ou encore $n \equiv a \bmod p$.

b) En général, montrer que si $(*)$ est satisfaite, alors le degré de f vérifie une certaine relation de congruence.

Indication. Si $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est un relèvement de f on pourra considérer la quantité $F(x+1/p) - F(x)$.

La relation $(*)$ implique

$$\begin{aligned}\exp\big(2\pi i(F(x+1/p) - F(x)\big) &= f(\exp(2\pi i(x+1/p))\, f(\exp(2\pi i x))^{-1} \\ &= f(\zeta_p \exp(2\pi i x))\, f(\exp(2\pi i x))^{-1} = \zeta_p^a = \exp(2\pi i a/p),\end{aligned}$$

donc $F(x+1/p) - F(x) - a/p \in \mathbb{Z}$. Par continuité, cette différence doit être une constante $k \in \mathbb{Z}$, i.e. $F(x+1/p) - F(x) = \mathrm{Const} = k + a/p$. On en déduit que

$$\deg(f) = F(x+1) - F(x) = \sum_{j=1}^{p-1} F\big((x+j/p)+1/p\big) - F\big(x+j/p\big) = p(k+a/p) = pk + a \equiv a \bmod p.$$

c) Quelle conclusion peut-on en tirer dans le cas particulier où f est paire (resp. impaire), c'est-à-dire telle que $f(-x) = f(x)$ (resp. $f(x) = -f(x)$), pour tout $x \in S^1$?

Ces cas correspondent aux choix $p = 2$ et $a = 0 \bmod 2$ (resp. $a = 1 \bmod 2$). On en déduit respectivement que $\deg(f)$ est un entier pair (resp. impair).

5) (Théorème de Borsuk-Ulam) On considère une application continue $g : S^2 \to \mathbb{R}^2$ où $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ est la sphère unité. On se propose de montrer qu'il existe des points antipodaux de S^2 où g atteint les mêmes valeurs, autrement dit, il existe $x \in S^2$ tel que $g(x) = g(-x)$.

a) On suppose qu'un tel point x n'existe pas et on définit

$$v : S^2 \to S^1, \qquad v(x) = \frac{g(x) - g(-x)}{\|g(x) - g(-x)\|}, \qquad x \in S^2.$$

Soit par ailleurs $\gamma : S^1 \to S^2$ l'application donnée par un cercle équatorial (par exemple celui du plan $z = 0$, si (x,y,z) sont les coordonnées de $\mathbb{R}^3$). Montrer que $v \circ \gamma : S^1 \to S^1$ est homotope à une application constante. Obtenir une contradiction avec le résultat de 4)c) et conclure.

Par construction v est impaire, c'est-à-dire que $v(-x) = -v(x)$. Le cercle équatorial $\gamma : S^1 \to S^2$ est donné par $\gamma(\exp(2\pi i u)) = (\cos(2\pi u), \sin(2\pi u), 0)$, et il est homotope au cercle trivial $\gamma_1(u) = (0,0,1)$ par l'homotopie $\gamma_t(\exp(2\pi i u)) = (\sqrt{1-t^2}\,\cos(2\pi u), \sqrt{1-t^2}\,\sin(2\pi u), t)$, $t \in [0,1]$. Il en résulte que $v \circ \gamma_t$ réalise une homotopie entre l'application $v \circ \gamma : S^1 \to S^1$ qui est impaire, et $v \circ \gamma_1$ qui est constante, donc de degré nul. Ceci contredit le résultat de 4)c) qui affirme que le degré de $v \circ \gamma$ doit être impair.

Nota: une conséquence du théorème de Borsuk-Ulam est par exemple qu'il existe toujours deux points diamètralement opposés à la surface de la Terre où il règne exactement la même pression et la même température ...

6) (Étude des recouvrements fermés de la sphère) Un fermé $A \subset S^2$ est dit non antipodal si A ne contient pas de paire de points antipodaux x, $-x$.

a) Montrer que l'on peut recouvrir la sphère S^2 par 4 fermés $(A_i)_{1\le i\le 4}$ non antipodaux.
Indication. Considérer un tétraèdre régulier inscrit dans la sphère.

À rotation près, on peut choisir comme tétraèdre régulier inscrit dans la sphère S^2 celui formé par le "pôle Nord" $(0,0,1)$ et les trois sommets d'un triangle équilatéral situé dans un plan horizontal $\beta \in \,]-1,0[$. On peut prendre pour ces 3 derniers points

$$(\alpha, 0, \beta), \qquad (-\alpha/2, \alpha\sqrt{3}/2, \beta), \qquad (-\alpha/2, -\alpha\sqrt{3}/2, \beta).$$

L'équibarycentre du pôle Nord et des 3 sommets de la face inférieure doit être $(0,0,0)$, ce qui donne la condition $1 + 3\beta = 0$, d'où $\beta = -1/3$, et on doit avoir aussi $\alpha^2 + \beta^2 = 1$; le choix $\alpha = 2\sqrt{2}/3$ convient par exemple. On prend comme fermés $(A_i)_{1\le i\le 4}$ les "projections radiales" des faces du tétraèdre sur la sphère. Ces 4 projections donnent des triangles sphériques 2 à 2 isométriques, celui obtenu pour la face inférieure (disons A_1) est contenu dans le demi-espace $z \le \beta = -1/3$ (puisque pour ceux-ci on aura $z \ge 1/3$). Ceci implique que A_1 est non antipodal, et par action du groupe des rotations constituant les isométries positives du tétraèdre, il en est de même pour les 3 autres faces.

b) On se propose de montrer que l'on *ne peut pas* recouvrir S^2 par 3 fermés non antipodaux (ou moins). Sinon, soit $A_i \ne \emptyset$, $1 \le i \le n_0$ des fermés non antipodaux recouvrant S^2, avec $n_0 = 2$ ou $n_0 = 3$ (le cas $n_0 = 1$ étant clairement impossible). On pose

$$g : S^2 \to \mathbb{R}^2, \qquad g(x) = (d(x, A_1), d(x, A_2)).$$

Obtenir une contradiction en appliquant le théorème de Borsuk-Ulam.

Pour un fermé A, on sait que $x \mapsto d(x, A)$ est continue (en fait 1-lipschitzienne), et que $d(x, A) = 0$ ssi $x \in A$, ou encore $d(x, A) > 0$ ssi $x \in \complement A$. Le théorème de Borsuk-Ulam implique l'existence d'une paire de points antipodaux x, $-x$ tels que

$$(d(x, A_1), d(x, A_2)) = (d(-x, A_1), d(-x, A_2)).$$

On doit alors avoir nécessairement

$$d(x, A_1) = d(-x, A_1) > 0 \quad \text{et} \quad d(x, A_2) = d(-x, A_2) > 0$$

car sinon on aurait par négation $x, -x \in A_1$ ou $x, -x \in A_2$, ce qui contredirait l'hypothèse que A_1 et A_2 sont non antipodaux. Mais alors on en déduit que x et $-x$ sont dans le complémentaire de $A_1 \cup A_2$, par conséquent $n_0 = 3$ et $x, -x \in A_3$, ce qui est encore une contradiction.

Remarque 1. Le théorème de Borsuk-Ulam se généralise aux applications continues $S^n \to \mathbb{R}^n$ (on a alors besoin d'une théorie analogue du degré pour les applications $S^{n-1} \to S^{n-1}$). On en déduit de manière similaire qu'on ne peut recouvrir S^n par strictement moins de $n+2$ fermés non antipodaux, $n+2$ étant possible.

Remarque 2. Stanislaw Ulam est un mathématicien polonais émigré aux États-Unis, qui a contribué à la mise au point de la bombe H en collaboration avec le physicien hongrois Edward Teller. Il aurait probablement mieux fait de continuer à faire de la topologie théorique, plutôt que de la topologie et de l'analyse numérique probabiliste appliquée aux charges fissiles ! Nous héritons malheureusement aujourd'hui d'une industrie nucléaire totalement pervertie par les choix militaires issus de la seconde guerre mondiale et de la guerre froide. Voir la rediffusion de la chaîne Arte

`http://future.arte.tv/fr/thorium`

pour un documentaire édifiant et passionnant là-dessus, où l'université de Grenoble est d'ailleurs très à l'honneur (en vue d'une technologie nucléaire alternative, très bonne et même sans doute vitale ...)