Examen partiel de Topologie algébrique, 10/11/2016

Jean-Pierre Demailly

I. Une nouvelle preuve du théorème de d'Alembert

En utilisant la théorie des revêtements, on se propose de donner ici une nouvelle démonstration du thorème de d'Alembert (i.e. que le corps $\mathbb{C}$ est algébriquement clos). On s'intéresse aux revêtements connexes $\rho : X \to B$ de base $B = \mathbb{R}^n \smallsetminus \{0\}$, $n \geq 2$.

1) Quel est le groupe fondamental $\pi_1(\mathbb{R}^n \smallsetminus \{0\})$?

2) Pour $n \geq 3$, montrer que tout revêtement de $\mathbb{R}^n \smallsetminus \{0\}$ est trivial.

3) Déterminer, à isomorphisme de revêtements près, quels sont les revêtements connexes de $\mathbb{R}^2 \smallsetminus \{0\}$.

4) On suppose que $\mathbb{K} \supset \mathbb{C}$ est une extension finie de $\mathbb{C}$ (c'est-à-dire un sur-corps commutatif) de degré $d \geq 1$.

a) Que vaut $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{K}$?

b) On munit le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{K}$ d'une norme quelconque $\|\ \ \|$, et on déduit une nouvelle norme $a \mapsto |a|$ sur $\mathbb{K}$ en prenant la norme d'application linéaire $z \mapsto az$ relativement à $\|\ \ \|$. Montrer qu'il s'agit d'une norme sous-multiplicative et en déduire qu'on peut définir une application exponentielle $\exp : \mathbb{K} \to \mathbb{K}^* = \mathbb{K} \smallsetminus \{0\}$ par la série entière usuelle.

c) Montrer que exp définit un C^∞ difféomorphisme d'un voisinage de 0 sur un voisinage de 1 et en déduire que l'image $\exp(\mathbb{K})$ est une partie à la fois ouverte et fermée de $\mathbb{K}^*$.

d) Montrer que $\ker(\exp)$ (comme homomorphisme de groupes) est un sous-groupe discret non trivial H du groupe additif $(\mathbb{K}, +)$, puis que exp définit un revêtement connexe non trivial. En déduire les valeurs possibles du degré d et conclure.

II. Sur les applications continues de S^1 dans S^1

On étudie ici les classes d'homotopie d'applications continues $f : S^1 \to S^1$ où $S^1 = \{z \in \mathbb{C}\,;\ |z| = 1\}$. On sait qu'on peut associer à une telle application un entier $\deg(f) \in \mathbb{Z}$ appelé degré, dépendant uniquement de la classe d'homotopie.

1) Montrer que l'on a la relation $\deg(g \circ f) = \deg(g) \times \deg(f)$:

a) en utilisant un argument direct d'homotopie ;

b) en utilisant un relèvement $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de f (resp. G de g) tel que $f(\exp(2\pi i u)) = \exp(2\pi i\, F(u))$, et en exprimant les degrés à l'aide de F et G.

2) Quels peuvent être les valeurs de $\deg(f)$ si f est un homéomorphisme de S^1 dans S^1 ?

3) Si $\deg(f) \neq 1$, montrer que f admet un point fixe, et qu'il existe en revanche un homéomorphisme f de S^1 de degré 1 sans point fixe.

4) Soit $\zeta_p = e^{2\pi i/p}$ la racine p-ième primitive standard de l'unité, $p \geq 2$. On suppose que $f : S^1 \to S^1$ vérifie la relation

$$(*) \qquad f(\zeta_p u) = \zeta_p^a f(u), \qquad a \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}.$$

a) Dans le cas où $f(u) = u^n$, quelle condition n doit-il vérifier pour que la relation $(*)$ soit satisfaite ?

b) En général, montrer que si $(*)$ est satisfaite, alors le degré de f vérifie une certaine relation de congruence.
Indication. Si $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est un relèvement de f on pourra considérer la quantité $F(x + 1/p) - F(x)$.

c) Quelle conclusion peut-on en tirer dans le cas particulier où f est paire (resp. impaire), c'est-à-dire telle que $f(-x) = f(x)$ (resp. $f(x) = -f(x)$), pour tout $x \in S^1$?

5) (Théorème de Borsuk-Ulam) On considère une application continue $g : S^2 \to \mathbb{R}^2$ où $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ est la sphère unité. On se propose de montrer qu'il existe des points antipodaux de S^2 où g atteint les mêmes valeurs, autrement dit, il existe $x \in S^2$ tel que $g(x) = g(-x)$.

a) On suppose qu'un tel point x n'existe pas et on définit

$$v : S^2 \to S^1, \qquad v(x) = \frac{g(x) - g(-x)}{\|g(x) - g(-x)\|}, \qquad x \in S^2.$$

Soit par ailleurs $\gamma : S^1 \to S^2$ l'application donnée par un cercle équatorial (par exemple celui du plan $z = 0$, si (x, y, z) sont les coordonnées de $\mathbb{R}^3$). Montrer que $v \circ \gamma : S^1 \to S^1$ est homotope à une application constante. Obtenir une contradiction avec le résultat de 4)c) et conclure.

6) (Étude des recouvrements fermés de la sphère) Un fermé $A \subset S^2$ est dit non antipodal si A ne contient pas de paire de points antipodaux x, $-x$.

a) Montrer que l'on peut recouvrir la sphère S^2 par 4 fermés $(A_i)_{1 \le i \le 4}$ non antipodaux.
Indication. Considérer un tétraèdre régulier inscrit dans la sphère.

b) On se propose de montrer que l'on *ne peut pas* recouvrir S^2 par 3 fermés non antipodaux (ou moins). Sinon, soit $A_i \neq \emptyset$, $1 \le i \le n_0$ des fermés non antipodaux recouvrant S^2, avec $n_0 = 2$ ou $n_0 = 3$ (le cas $n_0 = 1$ étant clairement impossible). On pose

$$g : S^2 \to \mathbb{R}^2, \qquad g(x) = (d(x, A_1), d(x, A_2)).$$

Obtenir une contradiction en appliquant le théorème de Borsuk-Ulam.

III. Un théorème de H. Hopf (1936)

On étudie ici les courbes continues $\gamma : [0, 1] \to P$ tracées dans un plan P, identifié à $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$. On suppose que le "vecteur corde" formé par les extrémités, à savoir $v = \gamma(1) - \gamma(0)$, est non nul. Pour $\lambda \in [0, 1]$, on appelle λ-corde un bipoint $(\gamma(u_1), \gamma(u_2))$ tel que $\gamma(u_2) - \gamma(u_1) = \lambda v = \lambda(\gamma(1) - \gamma(0))$, avec $0 \le u_1 \le u_2 \le 1$ (les dessins sont bienvenus !). Le théorème de Hopf stipule que pour tout $\lambda \in [0, 1]$, le chemin γ possède une λ-corde ou une $(1 - \lambda)$-corde.

1) Pour $\lambda \in]0, 1[$ tel que $\frac{1}{\lambda} \notin \mathbb{N}^*$, on considère le chemin à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ défini par

$$\gamma(u) = \big(u, \cos(2\pi \tfrac{1}{\lambda} u)\big), \qquad u \in [0, 1].$$

Montrer que γ ne possède pas de λ-corde.

2) On suppose que $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{C}$ ne *possède pas* de $\frac{1}{2}$-corde. Sur le triangle

$$T = \big\{(u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2 \,;\ 0 \le u_1 \le u_2 \le 1\big\}$$

on définit $f : T \to \mathbb{C}^*$ par

$$f(u_1, u_2) = \frac{\gamma(u_2) - \gamma(u_1)}{v} - \frac{1}{2}.$$

a) Montrer que f envoie la diagonale $\Delta = \{0 \le u_1 = u_2 \le 1\}$ sur un même point et que $f(u, 1) = -f(0, u)$ pour tout $u \in [0, 1]$.

b) Montrer que le quotient T/Δ est homéomorphe au disque unité fermé $B^2 = \{z \in \mathbb{C} \,;\ |z| \le 1\}$ et que l'on peut réaliser un homéomorphisme $\varphi : T/\Delta \to B^2$ en sorte que $\varphi(\Delta) = 1$, $\varphi(0, u) = \exp(-i\pi u)$ et $\varphi(u, 1) = \exp(i\pi(1 - u))$ (faire un dessin !)

c) On définit $g : B^2 \to \mathbb{C}$ par $g = \tilde{f} \circ \varphi^{-1}$ où $\tilde{f} : T/\Delta \to \mathbb{C}$ est le passage au quotient de f. Montrer que $\frac{1}{|g|} g : B^2 \to S^1$ est impaire en restriction au cercle S^1 et en déduire une contradiction en utilisant II.4)c).

3) Le théorème de Hopf est ainsi démontré pour $\lambda = \frac{1}{2}$ (on pourra admettre ce résultat en cas d'échec à la résolution de la question 2)).

a) Montrer que si γ possède une λ-corde, alors il possède aussi une $(\frac{\lambda}{2})$-corde, et que si γ possède une $(1 - \lambda)$-corde, alors il possède une $(\frac{\lambda}{2})$-corde ou une $(1 - \frac{\lambda}{2})$-corde.
Indication. Si $(\gamma(u_1), \gamma(u_2))$ est une $(1 - \lambda)$-corde, considérer le chemin $\tilde{\gamma}$ formé de la concaténation de $\gamma_{|[0,u_1]}$ et d'un translaté de $\gamma_{|[u_2,1]}$, de sorte que la corde extrême de $\tilde{\gamma}$ soit $\lambda(\gamma(1) - \gamma(0))$, et utiliser la propriété de la demi-corde pour $\tilde{\gamma}$.

b) Démontrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ que pour tout entier $k = 0, 1, 2, \ldots, 2^n$, le chemin γ possède une λ-corde ou une $(1 - \lambda)$-corde pour $\lambda = \frac{k}{2^n}$.

c) Démontrer le théorème de Hopf par un argument de passage à la limite.

d) Montrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ que γ possède une $\frac{1}{n}$-corde.