Topologie algébrique, feuille n°1, 16/09/2016

Jean-Pierre Demailly

Toutes les catégories considérées dans la suite sont supposées avoir des compositions de flèches associatives et une flèche identique $\mathrm{Id}_A : A \to A$ pour tout objet, opérant comme élément neutre pour la composition. (Ceci fait le plus souvent partie des hypothèses - et nous supposerons toujours que c'est le cas dans ce cours ...)

1. Soit $\mathcal{C}$ une catégorie. On dit qu'une famille d'objets A_i, $i \in I$ (où I est un ensemble) admet l'objet X comme produit si on a pour tout $i \in I$ des flèches $p_i : X \to A_i$ telles que pour tout objet S et toutes flèches $u_i : S \to A_i$ données a priori, il existe une *unique* flèche $v : S \to X$ telle que $p_i \circ v = u_i$ pour tout $i \in I$.

a) Montrer que l'objet X, s'il existe, est unique à isomorphisme près.

b) Dans les catégories **Ens** (ensembles), **Gr** (groupes) $\mathbf{EV}_{\mathbb{K}}$ (espaces vectoriels sur un corps $\mathbb{K}$), montrer que cette notion coïncide avec le produit usuel.

c) Montrer que le produit n'existe pas dans la catégorie des corps (les flèches sont par définition les plongements de corps $K \hookrightarrow L$).

2. Soit $\mathcal{C}$ une catégorie. On dit qu'une famille d'objets A_i, $i \in I$ (où I est un ensemble) admet l'objet X comme co-produit si X est un produit des A_i dans la catégorie opposée $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$, autrement dit si on a pour tout $i \in I$ des flèches $p_i : A_i \to X$ telles que pour tout objet S et toutes flèches $u_i : A_i \to S$ données a priori, il existe une *unique* flèche $v : X \to S$ telle que $v \circ p_i = u_i$ pour tout $i \in I$.

a) Dans la catégorie **Ens**, montrer que cette notion coïncide avec la réunion (ou somme) disjointe : $X \simeq \coprod_{i\in I} A_i$.

b) Dans la catégorie $\mathbf{EV}_{\mathbb{K}}$, ou **GrAb** (groupes abéliens notés additivement), montrer que cette notion coïncide avec la somme directe $X \simeq \bigoplus_{i\in I} A_i$ (rappelons que si l'ensemble d'indice I est infini, on ne considère que des sommes d'élements *presque tous nuls* dans une telle somme directe).

c) Montrer que le co-produit existe également dans la catégorie **Gr** des groupes (non nécessairement abéliens), et que pour des groupes $(A_i, \cdot)_{i\in I}$, le co-produit $X = \coprod_{i\in I} A_i$ peut être construit comme suit : on décrit chaque groupe A_i comme $A_i = \mathcal{L}(S_i)/\langle\!\langle R_i\rangle\!\rangle$ par générateurs et relations, et on pose (à isomorphisme près)

$$X = \mathcal{L}(\amalg S_i)/\langle\!\langle \amalg R_i\rangle\!\rangle$$

en prenant la somme disjointe des générateurs et des relations (les systèmes de relations R_i portent donc sur des mots sans générateurs en commun pour des indices i différents).
Remarque. Dans le cas de deux groupes G, H, on note souvent $G * H = G \amalg H$, ce groupe étant appelé aussi “somme amalgamée” de G et H. Décrire (par la liste de ses mots) les éléments de $\mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2$ où $\mathbb{Z}_2$ est le groupe à deux éléments, et observer qu'il s'agit d'un groupe dénombrable non commutatif.

3. Montrer que le groupe diédral D_{2n} (groupe à $2n$ éléments des isométries du polygone régulier à n côtés) peut être défini par générateurs et relations par

$$S_n = \mathcal{L}(\sigma, \rho)/\langle\!\langle \rho^n, \sigma^2, \rho\sigma\rho\sigma\rangle\!\rangle$$

Indication. Prendre pour ρ une rotation d'angle $2\pi/n$ et pour σ une réflexion et montrer que les relations sont satisfaites ; réciproquement, en utilisant le fait que $\sigma\rho = \rho^{-1}\sigma$, montrer que le groupe quotient $\mathcal{L}(\sigma, \rho)/\langle\!\langle \rho^n, \sigma^2, \rho\sigma\rho\sigma\rangle\!\rangle$ a au plus $2n$ éléments ρ^p et $\rho^p\sigma$, $0 \le p < n$, et conclure.

4. On appelle groupe topologique un groupe $(G, *)$ tel que G est muni d'une topologie pour laquelle les applications $G \times G \to G$, $(x, y) \mapsto x * y$ et $G \to G$, $x \mapsto x^{-1}$ sont continues. Montrer que le chemin $\gamma_1 * \gamma_2$ obtenu en faisant le produit dans G de deux lacets $\gamma_i : [0, 1] \to G$ basés en l'élément neutre e est homotope à la concaténation $\gamma_2 \cdot \gamma_1$, et aussi à $\gamma_1 \cdot \gamma_2$. En déduire que pour un groupe topologique G le groupe fondamental $\pi_1(G, e)$ est toujours un groupe abélien.
Indication. “Ralentir” par homotopie γ_1 (resp. γ_2) de façon que le chemin obtenu $\tilde\gamma_1$ (resp. $\tilde\gamma_2$) devienne progressivement constant égal à e sur $[0, 1/2]$ (resp $[1/2, 1]$), ou vice-versa, et considérer le produit dans G.