Topologie algébrique, feuille n°4, 13/12/2016

Jean-Pierre Demailly

1. a) Soit G, H des groupoïdes et $u : G \to H$ un morphisme de groupoïdes (c'est-à-dire un foncteur des "petites catégories" correspondantes). Montrer que u envoie les composantes connexes de G dans les composantes connexes de H.

On dira que u est quasi-bijectif si l'application induite $u : \mathrm{Mor}(x, y) \to \mathrm{Mor}(u(x), u(y))$ est bijective pour tous x, y et si u induit une bijection des composantes connexes de G sur les composantes connexes de H.

b) Soit X l'ensemble des objets de G, $(X_i)_{i\in I}$ les différentes composantes connexes de X. On choisit arbitrairement un objet p_i de X_i, et pour chaque objet x de X_i une flèche $\delta_x \in \mathrm{Mor}(p_i, x)$. Soit G' le "sous-groupoïde plein" de G dont l'ensemble des objets est $\{p_i\}_{i\in I}$ et dont les flèches sont les $\mathrm{Mor}(p_i, p_j)$. On définit $\mu_G : G \to G'$ par $\mu_G(x) = p_i$ si $x \in X_i$ et $\mu_G(\gamma) = \delta^{-1}_{\mu(y)} \cdot \gamma \cdot \delta_x$. Montrer que l'inclusion $j_G : G' \to G$ et $\mu_G : G \to G'$ sont des morphismes de groupoïdes "quasi-inverses", c'est-à-dire des morphismes quasi-bijectifs induisent des bijections inverses l'une de l'autre au niveau des composantes connexes. (On dira ici que G' est la réduction de G).

c) Montrer que si $u : G \to H$ est quasi-bijectif, on peut trouver un morphisme $v : H \to G$ qui est un quasi-inverse de u (observer que les réductions G' et H' sont isomorphes).

d) Déduire de ce qui précède que dans la catégorie des groupoïdes connexes, la notion de recollement se ramène à celle connue pour les groupes (on peut alors "oublier" les ensembles d'objets qui composent les groupoïdes).

e) Plus généralement, on considère des morphismes de groupoïdes $u : S \to G$ et $v : S \to H$; et le recollement K de G et H le long de S (et u, v). On effectue une réduction du diagramme comme suit: on définit S' comme dans b) en prenant un objet par composante connexe de S, et pour les objets de G' (resp. H'), on ajoute aux objets de S' un point par composante connexe de G (resp. H) qui ne contient pas de composante connexe de S [il se peut alors que des objets distincts de G' ou H' soient connectés dans G' ou H']. Montrer que le recollement K' de G' et H' le long de S' est quasi-isomorphe à K.

2. On appelle plan projectif réel, noté X, le quotient de S^2 par l'identification antipodale $x \sim -x$.

a) Montrer directement (en utilisant la théorie des revêtements) que $\pi_1(X) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

b) Montrer que X s'identifie aussi au complexe cellulaire dont le 1-squelette est $\mathrm{Sk}_1 X = S^1$ (obtenu à homéomorphisme près en recollant les deux extrêmités de $B_1 = [-1, 1]$ en un seul point) avec une cellule B_2 vue comme le disque de $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$, avec l'application de recollement $u : S^1 = bB_2 \to \mathrm{Sk}_1 X = S^1$ donnée par $u(z) = z^2$. En déduire alors de nouveau par la méthode générale de calcul du groupe fondamental des complexes cellulaires que $\pi_1(X) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

3. Soit X un espace topologique. Si X est réunion de deux ouverts simplement connexes U et V tels que $U \cap V$ est formé de m composantes connexes par arcs, alors $\pi_1(X)$ est un groupe libre à $m-1$ générateurs. *Indication.* Montrer que cette situation se produit pour la réunion $\tilde{X}$ d'une chaîne de $m-1$ cercles C_i du plan $(x-2i)^2 + y^2 = 1$, $1 \le i \le m-1$ avec $\tilde{U}$, $\tilde{V}$ les intersections de X avec les demi-plans $y > -1/2$ (resp $y < 1/2$. Dans ce cas, $\tilde{X}$ se rétracte par déformation sur un bouquet de $m-1$ cercles, et $\tilde{U} \cap \tilde{V}$ sur un espace discret fini à m points. Utiliser ensuite un argument de réduction des groupoïdes πX et $\pi\tilde{X}$ obtenus par recollement, en observant que la seule différence éventuelle réside dans les groupes $\pi_1(W_i)$ associés aux composantes connexes W_i de $U \cap V$ (qui sont triviaux dans le cas de $\tilde{U} \cap \tilde{V}$); mais ces groupes ne jouent aucun rôle dans le recollement, car ils s'envoient nécessairement sur $\{1\}$ dans $\pi_1(U)$ et $\pi_1(V)$. Dessiner un exemple d'ouvert $X = U \cup V$ dans $\mathbb{R}^3$ pour lequel on a $m \ge 2$ et des groupes $\pi_1(W_i)$, $i = 1, 2, \ldots, m$ non triviaux.