Topologie algébrique, feuille n°2, 07/10/2016

Jean-Pierre Demailly

1. On appelle variété topologique de dimension n un espace topologique séparé localement homéomorphe à des ouverts de $\mathbb{R}^n$.

a) Soit $\mathbb{B}^n$ la boule unité fermée euclidienne de $\mathbb{R}^n$ et S^{n-1} son bord. Montrer que pour deux points quelconques p, q de $\mathbb{B}^n \setminus S^{n-1}$ il existe un homéomorphisme φ égal à l'identité sur S^{n-1} et tel que $\varphi(p) = q$.
Indication. Se ramener à $p = 0$, et commencer par le cas $n = 1$.

b) Soit X une variété topologique connexe de dimension $n \geq 2$. Montrer que $X \setminus \{p\}$ et $X \setminus \{q\}$ sont homéomorphes pour $p, q \in X$ quelconques. On commencera par le démontrer lorsque p et q sont dans un même ouvert de carte homéomorphe à une boule, puis on raisonnera par connexité. En déduire que pour des parties finies $A \subset X$ de même cardinal, les complémentaires $X \setminus A$ sont tous homéomorphes, indépendamment du choix de A.

c) On appelle bouquet de p cercles l'espace topologique pointé (Y, y_0) formé de la réunion disjointe de p cercles $(S^1, 1)$ pointés par leur point $1 = e^{2\pi i 0}$, sur laquelle on opère une identification des points base en un point unique $y_0 \in Y$ (on peut réaliser un tel bouquet de diverses manières dans $\mathbb{R}^2$, à homéomorphisme près, par exemple au moyen de cercles tangents en un même point, où à l'aide de “pétales triangulaires” se rejoignant en un point). Montrer que si A est une partie finie de $\mathbb{R}^2$ à p éléments, alors $\mathbb{R}^2 \setminus A$ se rétracte par déformation sur un compact $K \subset \mathbb{R}^2 \setminus A$ homéomorphe à un bouquet de p cercles.
Indication. Utiliser b) pour se ramener au cas $A = \{1, 2, \ldots, p\} \times \{0\}$ et commencer par rétracter $\mathbb{R}^2$ sur le rectangle $[0, p+1] \times [-1, 1]$ sans toucher à A, puis rétracter le rectangle sur une réunion de triangles pleins T_k de sommet $y_0 = (0, 1)$ contenant les points $(k, 0)$ en leur intérieur et ne se touchant qu'au point y_0 ($1 \leq k \leq p$, et enfin rétracter chaque “triangle percé” $T_k \setminus \{(k, 0)\}$ sur le bord de T_k.

d) En déduire que $\pi_1(\mathbb{R}^2 \setminus A)$ est isomorphe au groupe fondamental d'un bouquet de p cercles.

e) On se propose maintenant de calculer $\pi_1(Y, y_0)$ où Y est un bouquet de p cercles $C_k \simeq S^1$ collés en leur point base y_0. Montrer qu'on a un homomorphisme φ du groupe libre $\mathcal{L}(a_1, \ldots, a_p)$ vers $\pi_1(Y, y_0)$ obtenu de la manière suivante : à un mot $a_{i_1}^{s_1} \ldots a_{i_N}^{s_N}$, $s_j \in \mathbb{Z}$, on associe la classe d'homotopie du lacet basé en y_0 formé en faisant (avec l'orientation requise) s_N tours sur le cercle C_{i_N}, puis s_{N-1} tours sur le cercle $C_{i_{N-1}}$, ..., puis s_1 tours sur le cercle C_{i_1}.

f) Prouver que l'homomorphisme φ est surjectif : tout lacet $\gamma : [0, 1] \to Y$ basé en y_0 est homotope à un lacet donné par l'image d'un mot $a_{i_1}^{s_1} \ldots a_{i_N}^{s_N}$ du groupe libre.
Indication. $\gamma^{-1}(Y \setminus \{y_0\})$ est un ouvert de $]0, 1[$ qui est une réunion finie ou dénombrable d'intervalles ouverts que γ envoie sur un cercle C_i privé de y_0, les extrémités étant envoyées sur y_0. Mais par continuité uniforme, les intervalles “trop petits” ne peuvent s'envoyer surjectivement sur le cercle où ils atterrissent, et on peut “homotoper” ces morceaux-là sur le lacet constant y_0. Ne reste plus qu'un nombre fini de lacets tracés sur les cercles C_i, dans un ordre quelconque ...

g) Prouver qu'une homotopie de lacets de (Y, y_0) ne “change pas le mot du groupe libre” qui décrit le chemin et en déduire que φ est un isomorphisme.
Indication. On raisonne par connexité en travaillant sur deux lacets γ, γ' suffisamment proches. Montrer que les mots sont alors identiques par un raisonnement similaire à celui du f).

h) Si A est une partie finie de $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, alors $\mathbb{R}^n \setminus A$ se rétracte sur un “bouquet de sphères” S^{n-1}, et $\pi_1(\mathbb{R}^n \setminus A)$ est le groupe trivial.

2. Soit $P = \sum_{j=0}^{d} a_j z^{d-j} \in \mathbb{C}[z]$ un polynôme complexe de degré d. On note $R = \{z \in \mathbb{C}\,;\ P'(z) = 0\}$ l'ensemble des points critiques de P et on pose $B = \mathbb{C} \setminus P(R)$, $X = \mathbb{C} \setminus P^{-1}(P(R))$.

a) Montrer que la restriction $\rho = P_{|X} : X \to B$ est un revêtement de degré d.

b) Si z est une racine complexe de $P(z) = 0$, montrer que

$$|z| \leq 2 \max |a_j / a_0|^{1/j}.$$

Indication. Supposer que l”inégalité est fausse, écrire $1 = -\sum_{j=1}^{d-1} \frac{a_j}{a_0} z^{-j}$ et obtenir une contradiction.

c) Si z est un élément de la fibre $\rho^{-1}(w)$, montrer à l'aide de b) que l'on a une majoration $|z| \leq C(1 + |w|)^{1/d}$ où $C > 0$ est une constante.

d) Soit $\varphi : X \to X$ un automorphisme du revêtement ρ, c'est à dire un homéomorphisme de X tel que $\rho \circ \varphi(z) = \rho(z)$. On supposera $\varphi \neq \mathrm{Id}_X$. Montrer à l'aide du théorème d'inversion locale que φ est holomorphe sur X et que l'on a une majoration de la forme $|\varphi(z)| \leq C'(1 + |z|)$.

e) Montrer que φ se prolonge en une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$ tout entier (on rappelle qu'une fonction holomorphe bornée sur un disque pointé $D(z_0, r) \smallsetminus \{z_0\}$ se prolonge automatiquement en une fonction holomorphe sur $D(z_0, r)$). Montrer à l'aide des inégalités de Cauchy appliquées au développement en série $\varphi(z) = \sum_{j=0}^{+\infty} c_j z^j$ que φ est en fait un polynôme de degré 1, i.e. $\varphi(z) = c_0 + c_1 z$.

f) Montrer que le groupe G d'automorphismes du revêtement est de cardinal au plus d, que φ est d'ordre fini $m|d$, puis que le coefficient c_1 est une racine m-ième de l'unité différente de 1 (observer que φ ne peut pas être une translation, sinon on aurait $P(z + a) = P(z)$ pour une constante $a \neq 0$, et ce n'est pas possible ...). Par suite φ est une rotation du plan.

g) Montrer qu'il ne peut pas y avoir parmi les automorphismes du revêtement une autre rotation ψ ayant un centre de rotation différent de celui de φ.
Indication. Si m' est l'ordre de ψ, montrer qu'il existe une composée $\theta = \varphi^k \circ \psi^\ell$ qui est une rotation d'angle $2\pi/m''$, $m'' = \operatorname{ppcm}(m, m')$, puis une composée $\varphi \circ \theta^s$ qui est une translation différente de l'identité.

h) Si le revêtement ρ est galoisien, montrer que P est de la forme $P(z) = \alpha(z - c)^d + \beta$, et déterminer le groupe des automorphismes du revêtement.

i) Montrer que si P est un polynôme bicarré $P(z) = az^4 + bz^2 + c$ avec $a \neq 0$, $b \neq 0$, alors le revêtement associé est de degré 4 et possède un groupe d'automorphismes de degré 2.