Magistère M1 **Université Grenoble Alpes** **année 2016-2017**

Topologie algébrique, feuille n°3, 01/12/2016
Jean-Pierre Demailly

1. Soit $u : S \to X$ et $v : S \to Y$ deux applications continues, $Z = (X \coprod Y)/\sim$ l'espace obtenu en recollant X et Y le long de S, et $f : X \to Z$, $g : Y \to Z$ les applications naturelles.

a) Si v est injective, montrer que $f : X \to Z$ est injective.
Indication. Ensemblistement, on peut considérer que S est une partie de Y et que v est l'injection par inclusion. Observer alors que Z est alors simplement la réunion disjointe de X et $Y \smallsetminus S$.

b) Vérifier par récurrence sur n que dans la définition d'un complexe cellulaire, l'application naturelle $\mathrm{Sk}_{n-1} X \to \mathrm{Sk}_n X$ est injective et que c'est un homéomorphisme sur son image [on considère en général cette injection comme une inclusion.]

2. Soit X un complexe cellulaire et K une partie compacte de X. On se propose de montrer que K est contenue dans une réunion finie de cellules (à savoir un nombre fini de sommets et d'images $P_{n,i}$ des applications $(\mathbb{B}_n)_i \to X$, $i \in C_n$ associées aux différentes cellules de dimension $n \in \mathbb{N}$).

On note $P'_{n,i}$ l'image de $(\mathbb{B}_n \smallsetminus S^{n-1})_i$ dans X. C'est un ouvert de $\mathrm{Sk}_n X$ (mais par forcément de X !), et X est la réunion disjointe des "cellules ouvertes" $P'_{n,i}$, $i \in C_n$, et de l'ensemble $S = \mathrm{Sk}_0 X$; pour unifier les notations, on considère aussi que S est la réunion des singletons formés par ses points et que ceux-ci constituent des cellules $P'_{0,i}$ de dimension 0, ouvertes dans $\mathrm{Sk}_0 X = S = C_0$ qui est discret.

a) On suppose par l'absurde que K contient une infinité de points $x_\nu \in P'_{n_\nu,i_\nu}$ situés dans des cellules ouvertes 2 à 2 distinctes. On note $P''_{n,i} = P'_{n,i} \smallsetminus \{x_\nu\}$ si $(n,i) = (n_\nu, i_\nu)$ et $P''_{n,i} = P'_{n,i}$ si (n,i) est distinct des (n_ν, i_ν). Montrer que la partie $U_{n,i}$ de X qui est la réunion de $P'_{n,i}$ et de tous les $P''_{m,j}$ de dimension $m > n$ est un ouvert de X, que $U_{n,i} \cap \mathrm{Sk}_n X = P_{n,i}$ et enfin que $U_{n,i}$ contient au plus un point x_ν, seulement dans le cas $(n,i) = (n_\nu, i_\nu)$.

b) Déduire de a) que K ne peut pas être compact.

c) Montrer que si un complexe cellulaire X se plonge homéomorphiquement dans un espace localement compact Y (par exemple $Y = \mathbb{R}^n$), alors il est nécessairement localement fini, c'est à dire que tout point de X a un voisinage qui ne rencontre qu'un nombre fini de cellules. [Dans le cas $Y = \mathbb{R}^n$, on peut montrer de plus que $\dim X \le n$, mais nous n'avons pas encore les moyens de faire cette démonstration !]

3. La bouteille de Klein, sous divers aspects. On rappelle que le tore $\mathbb{T}^2 = (S^1)^2$ est homéomorphe à $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$.

a) On considère le groupe G d'homéomorphismes de $\mathbb{R}^2$ engendré par la translations $\tau : (x,y) \mapsto (x+1, y)$, et par $\sigma : (x,y) \mapsto (-x, y+1)$. Observer que σ^2 est aussi une translation, et en déduire que l'on a une suite exacte de groupes

$$0 \to \mathbb{Z}^2 \to G \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to 0.$$

Montrer que G opère proprement librement et sans point fixe sur $\mathbb{R}^2$, et que $K = \mathbb{R}^2/G$ est une variété topologique compacte de dimension 2 (c'est la bouteille de Klein !)

b) Quel est le groupe fondamental de K ?

c) Montrer qu'il existe un revêtement à 2 feuillets $\mathbb{T}^2 \to K$.

d) Montrer que K est homéomorphe à l'espace obtenu en recollant le carré $[0,1]^2$ par identification des arêtes opposées, par $(0,y) \sim (1,y)$, $y \in [0,1]$ et $(x,0) \sim (1-x, 1)$, $x \in [0,1]$. En déduire que K est un complexe cellulaire de dimension 2, obtenu en recollant une cellule de dimension 2 sur un bouquet de 2 cercles. Retrouver ainsi quel est le groupe fondamental de K en termes de générateurs et relations.

e) Réaliser le tore $\mathbb{T}^2$ et la bouteille de Klein K comme des complexes simpliciaux et décrire les données combinatoires qui les définissent (on peut y arriver assez simplement avec 18 triangles et 9 sommets).

4. Soit X l'espace topologique associé au graphe de Cayley du groupe libre $G = \mathcal{L}(a,b)$, et soit H (resp. H') le sous-groupe distingué engendré par les éléments a^3 et b (resp. a^2, b^2 et $aba^{-1}b^{-1}$).

a) Quel sont les indices de H et H'' dans G ?

b) Dessiner les revêtements $X/H \to X/G$ et $X/H' \to X/G$.

c) Trouver explicitement des systèmes générateurs libres pour H et H'.

d) Montrer que le sous-groupe dérivé $[G,G]$ engendré par les commutateurs est un groupe libre à une infinité de générateurs, de même que le sous-groupe distingué H'' engendré par a^2, b^2 (sans le commutateur de a et b).