Magistère M1 **Université Grenoble Alpes** **année 2016-2017**

Topologie algébrique, DM n°1, 19/10/2016

Jean-Pierre Demailly

On note $\mathrm{O}(n)$ (resp. $\mathrm{SO}(n)$) le groupe orthogonal (resp. spécial orthogonal) en dimension $n \geq 1$, c'est-à-dire l'ensemble des matrices carrées $Z \in M_n(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^{n^2}$ telles que ${}^tZZ = \mathbb{1}$ (resp. et de plus $\det(Z) = 1$), où $\mathbb{1}$ est la matrice unité. Dans la suite, on identifiera matrices de $M_n(\mathbb{R})$ et endomorphismes de $\mathbb{R}^n$. On se propose de déterminer pour tout entier $n \geq 1$ le groupe fondamental $\pi_1(\mathrm{SO}(n)) = \pi_1(\mathrm{SO}(n), \mathbb{1})$.

I. Première partie : utilisation des complexes et des quaternions

1) Montrer que $\mathrm{O}(n)$ est un groupe topologique pour la topologie induite par $\mathbb{R}^{n^2}$, et aussi qu'il s'agit d'une sous-variété différentiable de classe C^∞ et de dimension $\frac{n(n-1)}{2}$. Quel est l'espace tangent au point $Z = \mathbb{1}$?
Indication. Utiliser le théorème des fonctions implicites.

2) Montrer que $\mathrm{O}(n)$ admet deux composantes connexes par arcs et que $\mathrm{SO}(n)$ est la composante connexe contenant l'élément neutre.
Indication. En dimension n, un élément de $\mathrm{SO}(n)$ se décompose en rotations planes suivant des plans 2 à 2 orthogonaux, en somme directe orthogonale avec une droite invariante si n est impair.

3) Déterminer $\pi_1(\mathrm{SO}(n))$ pour $n = 1$ et $n = 2$.

4) On appelle quaternions les matrices $q \in M_2(\mathbb{C})$ de la forme

$$q = Q(a,b) = \begin{pmatrix} a & -\bar{b} \\ b & \bar{a} \end{pmatrix}, \qquad a, b \in \mathbb{C}$$

et on appelle quaternion conjugué de q le quaternion $q^* = Q(\bar{a}, -\bar{b})$ (matrice adjointe de q). Montrer que l'ensemble $\mathbb{H}$ des quaternions (ainsi dénommé en hommage au mathématicien irlandais W. Hamilton, 1805-1865) forme un corps non commutatif $(\mathbb{H}, +, \times)$, l'inverse de $q \neq 0$ étant donné par la relation $qq^* = q^*q = |q|^2\mathbb{1}$ où $|q|^2 = |a|^2 + |b|^2$. Montrer que $\mathbb{H}$ est un espace vectoriel réel de dimension 4 sur $\mathbb{R}$ engendré par les matrices

$$\mathbb{1} = Q(1,0), \quad I = Q(i,0), \quad J = Q(0,1), \quad K = IJ = Q(0,-i).$$

Déterminer la table de multiplication du groupe multiplicatif à 8 éléments $\{\pm\mathbb{1}, \pm I, \pm J, \pm K\}$ et le centre du corps $\mathbb{H}$ (éléments qui commutent multiplicativement avec tous les autres).

5) Vérifier dans $\mathbb{H}$ la relation $|q \times q'| = |q|\,|q'|$, et en déduire que la sphère unité $S^3 \subset \mathbb{H}$ admet une structure naturelle de groupe topologique pour la multiplication.

6) Montrer que l'ensemble des quaternions dits “purs” $P = \{q \in \mathbb{H}\,;\ q^* = -q\}$ forme un espace vectoriel de dimension 3 orthogonal au sous-corps $\mathbb{R}\mathbb{1}$ (habituellement identifié à $\mathbb{R}$ lui-même) dans l'espace euclidien $(\mathbb{H}, |{\bullet}|^2)$. Montrer que l'on a des homomorphismes de groupes

$$\begin{aligned} &\varphi : S^3 \to \mathrm{SO}(P) \simeq \mathrm{SO}(3), && u \mapsto (P \ni q \mapsto uqu^* \in P), \\ &\psi : S^3 \times S^3 \to \mathrm{SO}(\mathbb{H}) \simeq \mathrm{SO}(4), && (u,v) \mapsto (\mathbb{H} \ni q \mapsto uqv^* \in \mathbb{H}), \end{aligned}$$

7) Montrer que φ est surjectif et que son noyau est $\{\pm\mathbb{1}\}$, de sorte que l'on a un isomorphisme de groupes topologiques $\mathrm{SO}(3) \simeq S^3/\{\pm\mathbb{1}\}$. En déduire que φ est un revêtement à deux feuillets de groupe d'automorphismes $G \simeq (\mathbb{Z}_2, +)$ et que $\pi_1(\mathrm{SO}(3)) \simeq \mathbb{Z}_2$.
Indication. Pour la surjectivité, on calculera d'abord dans la base (I, J, K) de P les sous-groupes de $\mathrm{SO}(P)$ obtenus à partir des matrices $u = Q(e^{i\theta}, 0)$, resp. $u = Q(\cos\theta, \sin\theta)$, $\theta \in \mathbb{R}$. Pour le noyau, utiliser la propriété du centre de $\mathbb{H}$. On montrera ensuite en général que si X est un espace simplement connexe et G un groupe opérant proprement librement et sans point fixe sur X, alors $\pi_1(X/G) \simeq G$.

8) Montrer que ψ est surjectif et que son noyau est $\{\pm(\mathbb{1}, \mathbb{1})\}$, de sorte que $\mathrm{SO}(4) \simeq (S^3 \times S^3)/\{\pm(\mathbb{1}, \mathbb{1})\}$. En déduire que ψ est un revêtement à deux feuillets, et que $\pi_1(\mathrm{SO}(4)) \simeq \mathbb{Z}_2$.
Indication. Considérer l'orbite et le stabilisateur de $q = \mathbb{1}$, et utiliser les résultats déjà obtenus pour φ.

II. Deuxième partie : propriétés de l'injection de $\mathrm{SO}(n-1)$ dans $\mathrm{SO}(n)$

Soit $n \geq 3$ et $(e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. On désigne par $j : \mathrm{SO}(n-1) \to \mathrm{SO}(n)$ l'injection obtenue en envoyant une matrice rotation u de $\mathbb{R}^{n-1}$ sur la matrice rotation $j(u)$ de $\mathbb{R}^n$ laissant e_n invariant et agissant comme u sur $(e_1, \ldots, e_{n-1})$. On considère par ailleurs l'application $f : \mathrm{SO}(n) \to S^{n-1}$ sur la sphère unité $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ donnée par $u \mapsto f(u) = u(e_n)$.

1) Montrer que les fibres $f^{-1}(p)$, $p \in S^{n-1}$, sont toutes homéomorphes à $\mathrm{SO}(n-1)$ (on pourra commencer par étudier la fibre au dessus de $p = e_n$).

2) Montrer l'existence d'une matrice rotation $g(x) \in \mathrm{SO}(n)$ dépendant continûment de $x \in S^{n-1} \smallsetminus \{-e_n\}$ telle que $g(x)(e_n) = x$ et $g(e_n) = \mathbb{1}$.
Indication. Si $x \neq \pm e_n$, soit Π_x le plan vectoriel engendré par e_n et x, et soit $g(x) \in \mathrm{SO}(n)$ l'unique rotation égale à l'identité sur $\Pi_x^\perp$ qui répond à la question. Calculer l'angle de rotation en fonction de x et vérifier que $g(x)$ se prolonge continûment en $x = e_n$.

3) Vérifier que l'on a un homéomorphisme

$$\Phi : \big(S^{n-1} \smallsetminus \{-e_n\}\big) \times \mathrm{SO}(n-1) \longmapsto \mathrm{SO}(n) \smallsetminus \{f^{-1}(-e_n)\}, \qquad (x, u) \mapsto g(x) \circ j(u)$$

qui identifie $\{x\} \times \mathrm{SO}(n-1)$ à la fibre $f^{-1}(x)$. En déduire que $\mathrm{SO}(n) \smallsetminus f^{-1}(-e_n)$ se rétracte par déformation sur $f^{-1}(e_n) = j(\mathrm{SO}(n-1)) \simeq \mathrm{SO}(n-1)$.
Indication. Utiliser la projection stéréographique $\sigma : S^{n-1} \smallsetminus \{-e_n\} \to \mathbb{R}^{n-1}$ de pôle $-e_n$.

4) Soit $\gamma : [0,1] \to \mathrm{SO}(n)$ un lacet basé au point $\mathbb{1}$. Montrer que (par raison de dimension) γ est homotope à un lacet γ' tel que le chemin $f \circ \gamma' : [0,1] \to S^{n-1}$ ne recouvre pas la sphère S^{n-1} toute entière, puis que l'on peut se ramener au cas où l'image ne contient pas le point $p = -e_n$. En déduire que l'homomorphisme de groupes $j_* : \pi_1(\mathrm{SO}(n-1)) \to \pi_1(\mathrm{SO}(n))$ est surjectif pour $n \geq 3$, mais que ce n'est pas vrai pour $n = 2$. Montrer que j_* est surjectif non bijectif pour $n = 3$, et bijectif pour $n = 4$.

III. Troisième partie : lemme de non intersection générique

Soit $f : [0,1]^p \to X \subset \mathbb{R}^N$ une application continue à valeurs dans une sous-variété différentiable fermée $X \subset \mathbb{R}^N$ de dimension n, de classe C^1 au moins, soit $Y \subset X$ une sous-variété fermée de dimension $m < n - p$ (i.e. de codimension $> p$ dans X), et soit enfin A une partie fermée de $[0,1]^p$ telle que $f(A) \cap Y = \emptyset$. Le but est de montrer qu'on peut approcher f uniformément près à ε près par des fonctions continues $f_\varepsilon : [0,1]^p \to X$ telles que $f_\varepsilon([0,1]^p) \cap Y = \emptyset$, avec de plus $f_\varepsilon = f$ sur A. Dans ce qui suit on utilise un quadrillage suffisamment fin du cube $[0,1]^p$ et des triangulations diagonales de chacun des petits cubes : le cube $[0,\delta]^p$ peut ainsi être “triangulé” par les p-simplexes $T_\sigma = \{0 \leq x_{\sigma(1)} \leq \ldots \leq x_{\sigma(p)} \leq \delta\}$, où σ décrit l'ensemble des permutations de $\{1, 2, \ldots p\}$ (ce sont des segments si $p = 1$, des triangles si $p = 2$) ; en général, un p-simplexe est par définition l'enveloppe convexe de $(p+1)$-points affinement indépendants, et ici T_σ est l'enveloppe des $(p+1)$ points de T_σ tels que $\forall i$, $x_i = 0$ ou $x_i = \delta$.

1) Cas élémentaire : $A = \emptyset$, $X = \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^N$ et $Y = \mathbb{R}^m \times \{0\}$. Pour une triangulation suffisamment fine du cube $[0,1]^p$ comme ci-dessus, et en notant $(x_i)_{1 \leq i \leq s}$ les sommets des simplexes, on approxime f par la fonction g affine par morceaux obtenue en prenant $g(x_i) = v_i \in \mathbb{R}^n$ très proche de $f(x_i)$ et en interpolant linéairement ces valeurs par barycentration dans chaque simplexe. L'image $g([0,1]^p)$ est alors contenue dans une réunion finie de sous-espaces vectoriels de dimension $\leq p + 1$, et on montrera que les $(v_1, \ldots, v_s) \in (\mathbb{R}^n)^s$ qui ne conviennent pas sont contenus dans une réunion finie de lieux déterminantiels à préciser, d'intérieur vide, donc de complémentaire dense.

2) On passe au cas général. Montrer qu'il existe un recouvrement ouvert fini du compact $f([0,1]^p)$ par des ouverts $U_\alpha \subset \mathbb{R}^N$ dans lesquels on peut à difféomorphisme près se ramener au cas où $U_\alpha \cap X \simeq V_\alpha \cap (\mathbb{R}^n \times \{0\})$ et $U_\alpha \cap Y \simeq V_\alpha \cap (\mathbb{R}^m \times \{0\})$, et trouver un quadrillage assez fin du cube $[0,1]^p$ par des petits cubes fermés $(C_i)_{1 \leq i \leq s}$ avec $f(C_i) \subset U_{\alpha(i)}$. Montrer qu'en raffinant le quadrillage, on peut faire en sorte que $f(C_i) \cap Y = \emptyset$ si $C_i \cap A \neq \emptyset$.

3) On modifie f de proche en proche sur les cubes C_i tels que $C_i \cap A = \emptyset$, disons par ordre croissant d'indice i (sans modifier f sur les cubes C_i qui intersectent A). Soit f_{i-1} la fonction construite à l'étape $i-1$, supposée telle que $\|f_{i-1} - f\| < \varepsilon(1 - 2^{-i})$, et $f_{i-1}(\bigcup_{j \leq i-1} C_j) \cap Y = \emptyset$. En utilisant le difféomorphisme $U_{\alpha(i)} \simeq V_{\alpha(i)}$, on se ramène au cas $f_{i-1} : C_i \to X = \mathbb{R}^n$ et $f_{i-1}(C_i \cap \bigcup_{j \leq i-1} C_j) \cap Y = \emptyset$, où $Y = \mathbb{R}^m \times \{0\} \subset \mathbb{R}^n$. Soit $P_i \subset C_i$ un parallélépipède “très légèrement rétréci” le long des faces qui forment les intersections $C_i \cap C_j$. Prendre pour f_i une fonction qui coïncide avec f_{i-1} sur $C_i \cap \bigcup_{j \leq i-1} C_j$ et avec une fonction g_i affine par morceaux ad hoc sur P_i.

4) On suppose X connexe (par arcs). Soit $j' : X \smallsetminus Y \hookrightarrow X$ l'inclusion. Montrer que le morphisme induit $j'_* : \pi_1(X \smallsetminus Y) \to \pi_1(X)$ est surjectif pour $p = \operatorname{codim}_X Y \geq 2$ et bijectif pour $p \geq 3$.

5) Avec les notations du II, on considère la composée d'inclusions

$$j = j' \circ j'' : \mathrm{SO}(n-1) \simeq f^{-1}(e_n) \xrightarrow{j''} \mathrm{SO}(n) \smallsetminus f^{-1}(-e_n) \xrightarrow{j'} \mathrm{SO}(n).$$

Montrer que $j_* : \pi_1(\mathrm{SO}(n-1)) \to \pi_1(\mathrm{SO}(n))$ est un isomorphisme pour $n \geq 4$ et en déduire la valeur de $\pi_1(\mathrm{SO}(n))$ pour $n \geq 3$.

Nota : dans tout le problème, des schémas explicatifs peuvent aider à la compréhension et à la rédaction !