Magistère M1 **Université Grenoble Alpes** **année 2018-2019**

Surfaces de Riemann (Jean-Pierre Demailly), feuille n°2, 24/01/2019

1. *Morphismes de surfaces de Riemann*
(a) Soient X et Y deux surfaces de Riemann, et soient $\tau_j : U_j \to \Omega_j \subset \mathbb{C}$, $\theta_k : V_k \to \Omega'_k \subset \mathbb{C}$, avec $X = \bigcup U_j$, $Y = \bigcup V_k$. Montrer que $\varphi : X \to Y$ est un morphisme (c'est-à-dire un morphisme d'espaces annelés de $(X, \mathcal{O}_X)$ vers $(Y, \mathcal{O}_Y)$) si pour tous indices j, k l'application $\theta_k \circ \varphi \circ \tau_j^{-1}$ est holomorphe sur l'ouvert $\tau_j(\varphi^{-1}(V_k) \cap U_j) \subset \Omega_j$.
(b) On note $\mathrm{Aut}(X)$ l'ensemble des isomorphismes de X sur X : c'est un groupe pour la composition des applications.

2. *Un théorème de Weierstrass* (connu ?)
Soit $\Omega_R = D(z_0, R) \smallsetminus \{z_0\} \subset \mathbb{C}$ un disque épointé et $f \in \mathcal{O}(\Omega_R)$ non constante. On veut montrer que si f possède une singularité essentielle en $z = z_0$, alors il existe une partie dense $E \subset \mathbb{C}$ telle que toute valeur $w \in E$ est prise une infinité de fois dans chaque disque épointé $\Omega_r = D(z_0, r) \smallsetminus \{z_0\}$.

(a) On suppose que $A_r = \overline{f(\Omega_r)} \neq \mathbb{C}$, et on choisit un point $w_r \in \mathbb{C} \smallsetminus A_r$. Montrons que $g(z) = \frac{1}{f(z) - w_r}$ est holomorphe bornée sur Ω_r et en déduire que f n'a pas de singularité essentielle en z_0, d'où contradiction.

(b) Montrer que $E = \bigcap_{k \geq 1} f(\Omega_{2^{-k}R})$ est une partie dense de $\mathbb{C}$ à l'aide du théorème de Baire, et conclure.

3. *Détermination de* $\mathrm{Aut}(\mathbb{C})$ (*comme surface de Riemann*).

(a) Montrer que les transformations affines $\varphi(z) = az + b$, $a \in \mathbb{C}^*$, $b \in \mathbb{C}$ constituent un sous-groupe de $\mathrm{Aut}(\mathbb{C})$.

(b) Réciproquement, soit $f \in \mathrm{Aut}(\mathbb{C})$. Montrer à l'aide de l'exercice 2 que $g(z) = f(1/z)$, qui est holomorphe sur $\mathbb{C}^*$, ne peut pas avoir une singularité essentielle en 0. En déduire que f est nécessairement un polynôme, puis que ce polynôme est de degré 1.

(c) Montrer que $\mathrm{Aut}(\mathbb{C})$ est constitué précisément des transformations affines bijectives décrites au (a).

4. *Détermination des automorphismes de la sphère de Riemann.*
On considère ici la sphère de Riemann $X = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ et on se propose de déterminer $\mathrm{Aut}(X)$. On appelle transformation homographique toutes application $h : X \to X$ telle que

$$h(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

avec $a, b, c, d, \in \mathbb{C}$ telle que $\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc \neq 0$ (si le déterminant est nul et $(c, d) \neq (0, 0)$, alors h est constante, et on souhaite exclure ce cas). On étend h à $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ en posant $h(\infty) = a/c$ et $h(-d/c) = \infty$ (avec $a/c = \infty$ et $d/c = \infty$ si $c = 0$).
(a) En écrivant $h = \frac{a}{c} - \frac{1}{c^2} \frac{ad - bc}{z + d/c}$ si $c \neq 0$, montrer que h est la composée d'un translation $z \mapsto z + \alpha$, de l'inversion $z \mapsto 1/z$, d'une homothétie $z \mapsto \lambda z$, $\lambda \in \mathbb{C}^*$ et d'une nouvelle translation $z \mapsto z + \beta$. Traiter également le cas $c = 0$. En déduire que h définit bien en élément de $\mathrm{Aut}(\mathbb{C} \cup \{\infty\})$ et que l'ensemble des homographies forme un groupe pour la composition (avec la loi $\circ$ qui correspond au produit des matrices 2×2 associées).

(b) Réciproquement, soit $f \in \mathrm{Aut}(\mathbb{C} \cup \{\infty\})$. Montrer qu'il existe une homographie h telle que $g = h \circ f$ satisfasse $g(\infty) = \infty$. En déduire que g est affine et que f est une homographie.

5. *Détermination des automorphismes du disque unité* $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \,/\, |z| < 1\}$.
Pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda = 1$, et $a \in \mathbb{D}$, on pose

$$r_\lambda(z) = \lambda z, \quad et \quad \varphi_a(z) = \frac{z - a}{1 - \bar{a}z}.$$

(a) Montrer que

$$1 - |\varphi_a(z)|^2 = 1 - \varphi_a(z)\overline{\varphi_a(z)} = \frac{(1 - |a|^2)(1 - |z|^2)}{|1 - \bar{a}z|^2},$$

et en déduire que $r_\lambda, \varphi_a \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$, avec $\varphi_a^{-1} = \varphi_{-a}$.

(b) Réciproquement, soit $f \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$ un automorphisme. Si $f(0) = 0$, montrer que f est une rotation r_λ (pour le voir, on appliquera le lemme de Schwarz). Sinon, montrer qu'il existe $a \in \mathbb{D}$ tel que $g = f \circ \varphi_{-a}$ vérifie $g(0) = 0$, et en déduire que f est de la forme $r_\lambda \circ \varphi_a$.

(c) Déterminer $\mathrm{Aut}(\mathbb{D})$ et montrer qu'il s'agit d'un sous-groupe du groupe des homographies.

6. *Détermination des automorphismes du demi-plan de Poincaré* $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \,/\, \operatorname{Im} z > 0\}$.
On considère les homographies de la forme

$$(*) \qquad h(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}, \quad ad - bc \neq 0.$$

(a) Vérifier que

$$\operatorname{Im} h(z) = \frac{(ad-bc) \operatorname{Im} z}{|cz+d|^2}$$

et en déduire que $h \in \mathrm{Aut}(\mathbb{H})$ si $ad - bc > 0$. Que se passe-t-il si $ad - bc < 0$? Dans le cas $ad - bc > 0$ montrer qu'on peut se ramener à ce que $ad - bc = 1$ sans changer h.

(b) Montrer que l'ensemble G des homographies $(*)$ de coefficients réels tels que $ad - bc = 1$ forment un sous-groupe G de $\mathrm{Aut}(\mathbb{H})$. Quelle est l'action d'un élément $h \in G$ sur le demi-plan conjugué $-\mathbb{H}$? Pour tout $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, montrer qu'il existe $h_0 \in G$ telle que $h(x_0) = \infty$.

(c) Montrer que les homographies

$$u(z) = \frac{z-i}{z+i}, \quad v(z) = i\,\frac{1+w}{1-w}$$

définissent des isomorphismes $u : \mathbb{H} \to \mathbb{D}$, $v : \mathbb{D} \to \mathbb{H}$ inverses l'un de l'autre.

(d) Déduire de (c) et de l'exercice 5 que $\mathrm{Aut}(\mathbb{H})$ est un sous-groupe du groupe des homographies (avec des coefficients a priori complexes), et que ce groupe est isomorphe à $\mathrm{Aut}(\mathbb{D})$.

(e) Soit $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ une homographie à coefficients complexes induisant un automorphisme de $\mathbb{H}$. Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{C}^*$ tels que $\alpha = \lambda a$, $\beta = \lambda b$, $\gamma = \lambda c$, $\delta = \lambda d$ soient réels et satisfassent $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$, de sorte que $f \in G$.
Indication. Démontrer d'abord le résultat lorsque $f(\infty) = \infty$ (i.e. $c = 0$). En général, par passage au complémentaire dans la sphère de Riemann, montrer que f induit un automorphisme du demi-plan conjugué $-\mathbb{H}$, et une bijection de $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ sur $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Montrer qu'il existe $h_0 \in G$ telle que $g = h_0 \circ f$ satisfasse $g(\infty) = g(\infty)$, et conclure.