Surfaces de Riemann (Jean-Pierre Demailly), feuille n°10, 18/04/2019

On s'appuiera sur les notions et résultats de la feuille d'exercices n°8.
Si $\varphi : X \to Y$, $x \mapsto y = \varphi(x)$, est une application de classe C^k, $k \geq 1$, entre variétés différentielles, et si $\alpha(y) = \sum_{|I|=p} \alpha_I(y)\, dy_I$ est une p-forme différentielle continue sur Y (avec la notation multi-indice usuelle $dy_I = dy_{i_1} \wedge \ldots \wedge dy_{i_p}$), l'image réciproque $\varphi^*\alpha$ est par définition la p-forme différentielle sur X obtenue en effectuant la substitution $y = \varphi(x)$ dans $\alpha(y)$, c'est-à-dire

$$\varphi^*\alpha(x) = \sum_{|I|=p} \alpha_I(\varphi(x))\, d\varphi_I(x), \quad d\varphi_I(x) = d\varphi_{i_1}(x) \wedge \ldots \wedge d\varphi_{i_p}(x).$$

Si φ est un difféomorphisme de variétés de dimension n et si α est une n-forme intégrable (par exemple à support compact), on a $d\varphi_I(x) = \mathrm{Jac}(\varphi)(x)\, dx_I$ pour $I = (1, 2, \ldots, n)$, et la formule du jacobien équivaut à $\int_X \varphi^*\alpha = \pm \int_Y \alpha$, avec un signe $\pm$ qui est celui de $\mathrm{Jac}(\varphi)$ (donc $+$ si φ préserve l'orientation).

1. On revient ici à l'étude de la fonction $\wp$ de Weierstrass et au plongement des courbes elliptiques $\mathbb{C}/\Lambda \hookrightarrow \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$, où $\Lambda = \mathbb{Z}a \oplus \mathbb{Z}b$. Nous avons montré en cours que $\wp$ est une fonction méromorphe paire, périodique de groupe de périodes Λ, ayant des pôles doubles en chaque point $\lambda \in \Lambda$, avec $\wp(z) = (z-\lambda)^{-2} + O(1)$ au voisinage de λ, de sorte que $\wp$ (resp. $\wp'$) définit un morphisme $\wp : \mathbb{C}/\Lambda \to \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ de degré 2 (resp. $\wp' : \mathbb{C}/\Lambda \to \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ de degré 3). On a montré en outre que $\wp$ satisfait l'équation différentielle algébrique

$$(\wp')^2 = 4\wp^3 + \alpha\wp + \beta, \quad \alpha = -60\sigma_2, \quad \beta = -140\sigma_3$$

où les $\sigma_k := \sum_{\lambda \in \Lambda^*} \lambda^{-2k}$ sont les *séries d'Eisenstein.*

(a) Montrer que $\wp'$ s'annule avec multiplicité 1 aux points $a/2$, $b/2$ et $(a+b)/2$.

(b) Déduire de (a) que l'équation $4X^3 + \alpha X + \beta = 0$ admet comme racines les nombres complexes $\wp(a/2)$, $\wp(b/2)$, $\wp((a+b)/2)$, et que ces 3 nombres sont 2 à 2 distincts. En conséquence, le discriminant $\Delta = \alpha 3 + 27\beta^2$ est non nul.
Indication. De manière générale, tout point $w \in \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ admet deux préimages $\dot{z}$ et $-\dot{z}$, qui sont confondues si et seulement si $z \in \frac{1}{2}\Lambda$. Si on avait $w = \wp(a/2) = \wp(b/2)$, compter combien w aurait de préimages (en tenant compte des multiplicités).

(c) La courbe algébrique affine $y^2 = 4x^3 + \alpha x + \beta$ admet un seul point à l'infini, et sa compactication $\Gamma \subset \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ est lisse. De plus $\mathbb{C} \smallsetminus \Lambda \ni z \mapsto (\wp(z), \wp'(z)) \in \mathbb{C}^2$ se prolonge en un biholomorphisme $\varphi : \mathbb{C}/\Lambda \to \Gamma \subset \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$.
Indication. Vérifier que φ est de degré 1 en considérant par exemple les préimages du point à l'infini.

(d) la différentielle dz peut-être vue comme une 1-forme partout non nulle sur la courbe elliptique $\mathbb{C}/\Lambda$, trivialisant donc son faisceau cotangent, et le biholomorphisme φ est tel que $\varphi^*(dx/y) = dz$. En conséquence, le réseau de périodes Λ peut être obtenu comme l'ensemble des intégrales $\int_\gamma dx/y$ où γ décrit l'ensemble des lacets de classe C^1 par morceaux tracés dans Γ (mais on peut toujours se ramener au cas où γ ne croise pas les 4 points de ramification où $y \in \{0, \infty\}$).

(e) Réciproquement, si on considère $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ tels que $\alpha^3 + 27\beta^2 \neq 0$ et la courbe $\Gamma_{\alpha,\beta}$ définie comme la cubique affine $y^2 = 4x^3 + \alpha x + \beta$ complétée par son point à l'infini, on obtient une surface de Riemann difféomorphe à n'importe quelle courbe elliptique $\mathbb{C}/\Lambda_0$.
Indication. Il existe un difféomorphisme de $\mathbb{C}$ qui envoie un triplet de points quelconques 2 à 2 distincts (x_1^0, x_2^0, x_3^0) sur un autre triplet quelconque (x_1, x_2, x_3) et qui est l'identité au voisinage de ∞.

(f) Pour tout $u \in \mathbb{C}^*$, les courbes $\Gamma_{\alpha,\beta}$ et $\Gamma_{u^2\alpha, u^3\beta}$ sont isomorphes. De plus, la courbe $\Gamma_{\alpha,\beta}$ est isomorphe à la courbe $\mathbb{C}/\Lambda$ obtenue en prenant pour Λ un certain réseau de $\mathbb{C}$, égale à l'ensemble des "périodes" $\int_\gamma dx/y$ lorsque γ décrit les lacets tracés dans $\Gamma_{\alpha,\beta}$.

Indication. Si $X = \Gamma_{\alpha,\beta}$, le faisceau cotangent $\mathcal{T}_X^*$ est un $\mathcal{O}_X$-module engendré globalement par la forme $\omega = dx/y$, et il existe donc un champ de vecteur global ξ sur X tel que $\omega(\xi) = 1$. On considère l'application $\psi : \mathbb{C} \to X$, $z \mapsto p = \psi(z)$ solution du problème de Cauchy holomorphe $\frac{dp}{dz} = \xi(p)$, i.e. $\psi'(z) = \xi(\psi(z))$, avec condition initiale $\psi(0) = p_0 \in \Gamma_{\alpha,\beta}$ = point à l'infini (disons). Alors ψ définit un revêtement holomorphe de X, qui coïncide nécessairement avec le revêtement universel de X, et les automorphismes du revêtement constituent nécessairement un réseau Λ de translations de $\mathbb{C}$ (les automorphismes holomorphes de $\mathbb{C}$ sont affines, et les seuls n'ayant pas de points fixes sont les translations). Par suite ψ coïncide avec la fonction $\wp$ associée au réseau Λ et $\Gamma_{\alpha,\beta} \simeq \mathbb{C}/\Lambda$.

2. Soit $\varphi : X \to Y$ une application holomorphe de degré d entre surfaces de Riemann compactes connexes.

(a) Pour toute forme différentielle α de degré 2 sur Y, montrer que $\int_X \varphi^*\alpha = d \times \int_Y \alpha$.
Indication. Si C est l'ensemble des points critiques et si $V = \varphi(C)$ est l'ensemble des valeurs critiques, on peut se ramener à des intégrales sur $Y \setminus V$ et $X \setminus \varphi^{-1}(V)$ respectivement, là où φ est un revêtement de degré d. On peut alors utiliser un recouvrement fini de $Y \setminus V$ formés par des ouverts au dessus desquels le revêtement est trivial.

(b) Soit $\mathcal{F}$ un $\mathcal{O}_Y$-module inversible sur Y. Par définition tout point de Y admet un voisinage V sur lequel $\mathcal{F}_{|V}$ est le $\mathcal{O}_Y$-module de rang 1 engendré par un certain générateur $g_V \in \mathcal{F}(V)$. On définit le $\mathcal{O}_X$-module inversible $\varphi^*\mathcal{F}$ comme étant le $\mathcal{O}_X$-module inversible engendré par $g_V \circ \varphi$ sur $\varphi^{-1}(V)$, de sorte que $(\varphi^*\mathcal{F})_{|\varphi^{-1}(V)} = \mathcal{O}_{X|\varphi^{-1}(V)} \cdot (g_V \circ \varphi)$. Si $\mathcal{F} = \mathcal{O}_Y([p])$ pour un certain point $p \in Y$, décrire $\varphi^*\mathcal{O}_Y([p])$ en termes de diviseurs, et calculer le degré de $\varphi^*\mathcal{O}_Y([p])$. En général, si $\mathcal{F} = \mathcal{O}_Y(\Delta)$ pour un certain diviseur Δ sur Y, quelle est la relation entre $\deg \varphi^*\mathcal{F}$ et $\deg \mathcal{F}$?

(c) On redémontre ici (b) d'une autre manière. Soit h est une métrique hermitienne de classe C^∞ sur $\mathcal{F}$. Montrer que $\varphi^*h := h \circ \varphi$ définit une métrique hermitienne sur $\varphi^*\mathcal{F}$ et que sa courbure est telle que $\Theta_{\varphi^*\mathcal{F},\varphi^*h} = \varphi^*\Theta_{\mathcal{F},h}$ (voir la feuille 8 pour la définition de la courbure). En déduire la relation attendue entre $\deg \varphi^*\mathcal{F}$ et $\deg \mathcal{F}$.

3. Soient X, Y, φ comme dans l'exercice **1**. On désigne par c_j les points critiques de φ et par r_j les indices de ramification associés (de sorte que $r_j - 1$ est l'ordre d'annulation de φ' au point c_j).

(a) Montrer qu'il existe un morphisme injectif de faisceaux inversibles

$$\mathcal{T}_X \to \varphi^*\mathcal{T}_Y, \quad \xi \mapsto d\varphi(\xi).$$

(b) Ce morphisme n'est pas surjectif au voisinage des points critiques, et son image coïncide avec $\mathcal{O}_X(-\sum(r_j - 1)[c_j]) \otimes_{\mathcal{O}_X} \varphi^*\mathcal{T}_Y \subset \varphi^*\mathcal{T}_Y$.

(d) Déduire de ce qui précède la formule générale de Riemann-Hurwitz

$$\deg \mathcal{T}_X = d \deg \mathcal{T}_Y - \sum_j (r_j - 1),$$

et la relation qui existe entre le genre g_X et le genre g_Y (on admettra que l'on a $\deg \mathcal{T}_X = 2 - 2g$, ce qui est une propriété de topologie différentielle des surfaces, impliquée par la formule de Gauss-Bonnet).

4. On considère la courbe de Fermat projective $\Gamma : x^d + y^d - z^d = 0$, dont la partie affine est $\Gamma^\circ : x^d + y^d - 1 = 0$. Montrer que la projection $\varphi : \Gamma \to \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$, $[x : y : z] \to [x : z]$ (soit $(x, y) \mapsto x$ dans la version affine), est un revêtement ramifié de degré d dont les points de ramification c_j sont au nombre de d et d'indice de ramification égaux à d. En déduire que le genre de Γ est $g = \frac{(d-1)(d-2)}{2}$.

5. (*Points d'inflexion des courbes projectives planes*)

On considère dans le plan projectif $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ une courbe X définie en coordonnées homogènes $z = (z_0, z_1, z_2)$ par $P(z_0, z_1, z_2) = 0$ où P est un polynôme homogène de degré d.

(a) On se place au voisinage d'un point lisse $[m] \in X$ tel que $P(m) = 0$ et $dP(m) \neq 0$. Montrer, quitte à permuter les coordonnées, que X admet une paramétrisation holomorphe locale $z = f(t)$,

$t \in D(0,r)$, avec $[f(0)] = [m]$ et, disons, $f_0(t) \equiv 1$, $(f_1'(0), f_2'(0)) \neq (0,0)$ [supposer $m_0 \neq 0$ et appliquer le théorème des fonctions implicites avec par exemple $t = z_1/z_0$.]

(b) Montrer, avec les notations de (a), que les autres paramétrisations holomorphes locales $\tau \mapsto g(\tau)$ de $P(g(\tau)) = 0$ avec $[g(0)] = [m]$ et $g'(0) \neq 0$ sont données par $g(\tau) = g_0(\tau) f(\varphi(\tau))$, où g_0 est holomorphe non nulle et φ est un biholomorphisme d'un voisinage de 0 sur un voisinage de 0 dans $\mathbb{C}$. Montrer que la condition $f''(0) = 0$ équivaut à ce que $g''(0)$ soit colinéaire à $g'(0)$. On dit alors que $[m] \in X$ est un point d'inflexion de X. [Le cas modèle est celui de la courbe $y = x^3$ à l'origine, mais pour $y = x^d$, $d \geq 4$, on a un point osculateur d'ordre plus élevé qui n'est pas toujours un point d'inflexion au sens strict.]

(c) On note $H(P)(z)$ la forme quadratique hessienne sur $\mathbb{C}^3$ définie par la matrice des dérivées secondes $(\partial^2 P/\partial z_j \partial z_k)$, de sorte que

$$H(P)(z)(v) = \sum_{j,k} \frac{\partial^2 P}{\partial z_j \partial z_k}(z)\, v_j v_k.$$

On suppose que $[m]$ est un point d'inflexion. En prenant les 4 dérivées partielles secondes (holomorphes) de la relation $P(uf(t)) = 0$ par rapport aux variables u, t, en $(u,t) = (1,0)$, montrer $H(P)(m)$ est identiquement nulle sur le plan vectoriel de $\mathbb{C}^3$ engendré par $f(0)$ et $f'(0)$. En déduire que l'on a $\det(H(P))(m) = 0$, où $Q = \det(H(P)) = \det(\partial^2 P/\partial z_j \partial z_k)$ est un polynôme de degré $3(d-2)$.

(d) Réciproquement, on suppose que l'on a un point $m \in \mathbb{C}^3 \setminus \{0\}$ tel que $P(m) = 0$, $\det(H(P))(m) = 0$ et $dP(m) \neq 0$. Il existe alors un vecteur $v \in \mathbb{C}^3 \setminus \{0\}$ tel que $v \in \mathrm{Ker}(H(P))$ [on entend par là le noyau de la matrice $H(P)$]. Montrer en utilisant la relation d'Euler pour les dérivées de P que $m \notin \mathrm{Ker}(H(P))$, de sorte que v et m sont indépendants, et enfin que $v \in \mathrm{Ker}(dP(m))$. Conclure de là que $[m]$ est un point d'inflexion de X.

(e) On admet ici le théorème classique de Bézout qui affirme que l'intersection de deux courbes algébriques projectives planes $Q(z) = 0$, $R(z) = 0$ de degrés respectifs d_1, d_2 admet $d_1 d_2$ points d'intersection comptés avec multiplicités, sauf si Q et R admettent un facteur commun F de degré > 0, auquel cas il y a une infinité de points d'intersection. Déduire du théorème de Bézout que si $d \geq 3$, l'ensemble algébrique $\{[m] \in \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}\,;\ P(m) = \det(H(P))(m) = 0\}$ est non vide, et que toute courbe algébrique lisse de degré $d \geq 3$ admet au moins un point d'inflexion, et en fait $3d(d-2)$ tels points si on les compte avec multiplicités.

6. On appelle cubique du plan projectif $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ l'ensemble X des points $[x : y : z] \in \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ tels que $P(x,y,z) = 0$ où $P \in \mathbb{C}[x,y,z]$ est un polynôme homogène de degré 3, non nul. L'objet de cette question est de montrer qu'une cubique lisse quelconque $X = \{P(x,y,z) = 0\}$ peut se ramener à la forme dite "de Weierstrass" $y'^2 z' = x'^3 + a x' z'^2 + b z'^3$ par un changement linéaire de variable $(x,y,z) \mapsto (x',y',z')$ de $\mathrm{PGL}_3(\mathbb{C})$. On choisit $m, v \in \mathbb{C}^3$ comme dans la question 5 (d) [en s'appuyant sur le résultat de 5 (e)], et on change les coordonnées en sorte que $v = (1,0,0)$ et $m = (0,1,0)$, où $t \mapsto m + tv$ est la tangente d'inflexion.

(a) Vérifier qu'il existe $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $P(m + tv) = P(t,1,0) = \alpha t^3$, si bien que P est de la forme

$$P(x,y,z) = \alpha x^3 + z Q(x,y,z)$$

où Q est un polynôme homogène de degré 2, c'est-à-dire une forme quadratique.

(b) On a nécessairement $\alpha \neq 0$, sinon les points d'intersection de $z = 0$ et $Q(x,y,z) = 0$ seraient des points singuliers.

(c) Quitte à diagonaliser $Q(0,y,z)$ et à changer de nouveau les coordonnées dans le plan $0yz$ (sans toucher à x !), on peut supposer $Q(0,y,z) = \beta y^2 + \gamma z^2$, de sorte que $Q(x,y,z) = \beta y^2 + \gamma z^2 + \delta x^2 + \varepsilon xy + \theta xz$.

(d) On a $\beta \neq 0$, sinon le point $[0 : 1 : 0]$ ne serait pas lisse, et un changement $\tilde{y} = y + (\varepsilon/2\beta)x$ permet de supprimer le terme εxy dans Q.

(e) Un changement $x' = \alpha^{1/3} x + \lambda z$, $y' = \beta^{1/2} y$ permet de se ramener à la forme de Weierstrass.