Surfaces de Riemann (Jean-Pierre Demailly), feuille n°1, 17/01/2019

On désignera ici par $\mathcal{O}$ désigne le faisceau des fonctions holomorphes, et par $\mathcal{M}$ celui des fonctions méromorphes sur $\mathbb{C}$.

1. *Le but de cet exercice est de (re)démontrer le théorème de factorisation de Weierstrass : si $(a_j)_{j\in I}$ est une famille de points distincts localement finie dans l'ouvert Ω, et si les $p_j \in \mathbb{N}^*$ sont des entiers donnés, il existe une fonction $v \in \mathcal{O}(\Omega)$ telle que les zéros de v soient exactement les points a_j avec les multiplicités p_j.*

(a) Démontrer le théorème de Weierstrass lorsque la famille (a_j) est finie.

On supposera donc désormais que la famille (a_j) est infinie. On se ramènera également au cas où les a_j sont non nuls (en montrant comment on peut aisément ajouter un point $a_0 = 0$ si besoin).

(b) Montrer que $K_p = \{z \in \Omega\,;\ |z| \le 2^p$ et $d(z, \complement\Omega) \ge 2^{-p}\}$ est une suite croissante de compacts de Ω telle que $\Omega = \bigcup K_p$, et en déduire que (a_j) est une suite infinie dénombrable et que l'on a que $\max(|a_j|, 1/d(a_j, \complement\Omega)) \to +\infty$ quand $j \to +\infty$ (on convient que $d(\bullet, \complement\Omega) = +\infty$ si $\Omega = \mathbb{C}$).

On décompose alors la suite a_j en deux sous-suites disjointes suivant que $|a_j| \ge 1/d(a_j, \complement\Omega)$ ou $|a_j| < 1/d(a_j, \complement\Omega)$, et on réindexe ces suites sous la forme (b_k) et (c_k) respectivement, de sorte que $|b_k| \to +\infty$ et $d(c_k, \complement\Omega) \to 0$ (seule la suite (b_k) existe si $\Omega = \mathbb{C}$). Pour $a \ne 0$ et $s \in \mathbb{N}$, on introduit les "facteurs élémentaires de Weierstrass"

$$E_{a,s}(z) = \Big(1 - \frac{z}{a}\Big)\exp\bigg(\sum_{j=1}^{s}\frac{1}{j}\Big(\frac{z}{a}\Big)^j\bigg).$$

On choisit enfin des points $\gamma_k \in \partial\Omega$ (bord de Ω), tels que $|c_k - \gamma_k| = d(c_k, \gamma_k) = d(c_k, \complement\Omega) > 0$, de sorte que $|c_k - \gamma_k| \to 0$ quand $k \to +\infty$.

(c) Si p_k et q_k sont les multiplicités prescrites aux points b_k et c_k, montrer qu'il existe un choix d'entiers s_k tels que le produit infini

$$v(z) = \prod_k \big(E_{b_k,s_k}(z)\big)^{p_k} \prod_k \Big(E_{\frac{1}{c_k-\gamma_k},s_k}\Big(\frac{1}{z-\gamma_k}\Big)\Big)^{q_k}$$

soit convergent sur tout compact de Ω, et en déduire le théorème de factorisation de Weierstrass en toute généralité.

Indication. On peut s'arranger pour que $\big|\big(E_{b_k,s_k}(z)\big)^{p_k} - 1\big| \le 2^{-k}$ sur le "grand" disque $|z| \le \frac{1}{2}|b_k|$, et $\big|\big(E_{\frac{1}{c_k-\gamma_k},s_k}\big(\frac{1}{z-\gamma_k}\big)\big)^{q_k} - 1\big| \le 2^{-k}$ dans le complémentaire du "petit" disque $|z - \gamma_k| \le 2|c_k - \gamma_k|$.

2. *Extraction de racines m-ièmes holomorphes ou méromorphes*

(a) Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert simplement connexe et $g \in \mathcal{O}(\Omega)$. Si g ne s'annule pas dans Ω, montrer qu'il existe une fonction $h \in \mathcal{O}(\Omega)$ telle que $e^h = g$.

Indication: on pourra par exemple considérer l'intégrale curviligne $I(z) = \int_{z_0}^{z}\frac{dg}{g} = \int_{z_0}^{z}\frac{g'(\zeta)}{g(\zeta)}\,d\zeta$ où l'intégrale est prise le long d'un chemin de classe C^1 par morceaux reliant un point $z_0 \in \Omega$ à un point quelconque $z \in \Omega$ – et on rappelle que la simple connexité de Ω montre que cette intégrale ne dépend pas du chemin choisi.

(b) Sous la même hypothèse que $g \in \mathcal{O}(\Omega)$ ne s'annule pas, montrer que pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, il existe $u \in \mathcal{O}(\Omega)$ telle que $u^m = g$.

(c) Lorsque $\Omega = \mathbb{C}^*$, a-t-on existence de la fonction u dans la question (b), lorsque $g(z) = z$?

(d) Soit $f \in \mathcal{M}(\Omega)$ une fonction méromorphe non identiquement nulle. À quelle condition nécessaire portant sur les multiplicités des zéros et des pôles de f peut-il exister une fonction $u \in \mathcal{M}(\Omega)$ telle que $u^m = f$?

(e) Si $f \in \mathcal{M}(\Omega)$ est une fonction méromorphe (resp. holomorphe) dont les multiplicités des zéros et des pôles sont multiples de m, montrer qu'il existe $v_1, v_2 \in \mathcal{O}(\Omega)$ telles que $g = f(\frac{v_1}{v_2})^m$ soit holomorphe sans zéros ni pôles. En déduire, lorsque Ω est simplement connexe, que f possède une racine m-ième méromorphe (resp. holomorphe).