Magistère M1 **Université Grenoble Alpes** **année 2018-2019**

Surfaces de Riemann (Jean-Pierre Demailly), feuille n°7, 14/03/2019

1. (a) Soient (E, b) et (F, β) des espaces vectoriels euclidiens de même dimension (avec b, b' des formes bilinéaires symétriques définies positives), et $\ell : E \to F$ une application linéaire bijective. Montrer que ℓ préserve les angles non orientés de couples de vecteurs si et seulement si ℓ est une similitude (c'est-à-dire la composée d'une isométrie de E dans F et d'une homothétie).
Indication. On rappelle que l'angle non orienté d'un couple de vecteurs non nuls $v, w \in E$ est défini par

$$\cos(\widehat{v,w}) = \frac{v \cdot w}{\|v\|\,\|w\|} = \frac{b(v,w)}{\sqrt{b(v,v)}\,\sqrt{b(w,w)}}.$$

Prendre une base orthonormée (e_i) de (V, q) et observer que $(\ell(e_i))$ doit être une base orthogonale. Considérer alors les angles des couples $(e_i, e_i + e_j)$ et ceux de leurs images.

(b) Soit $f : X \to Y$ une application de classe C^ℓ, $\ell \geq 1$, entre deux variétés riemannienne (X, g) et (Y, γ) de même dimension n. Si on écrit localement $y = f(x)$ sous la forme

$$(y_1, \ldots, y_n) = (f_i(x_1, \ldots, x_n))_{1 \leq i \leq n}$$

relativement à des systèmes de coordonnées locales $(x_1, \ldots, x_n)$ sur X et $\gamma(y) = \sum_{i,j} \gamma_{ij}(y)\, dy_i \otimes dy_j$, on définit la forme bilinéaire "tirée en arrière" de γ par f comme étant la forme obtenue en effectuant la substitution $y = f(x)$ dans l'expression de $\gamma(y)$:

$$f^*\gamma(x) = \sum_{1 \leq i,j \leq n} \gamma_{ij}(f(x))\, df_i(x) \otimes df_j(x),$$

de sorte que pour deux vecteurs tangents ξ, η à X en un point x, on ait

$$f^*\gamma(x)(\xi, \eta) = \gamma(f(x))(df_x(\xi), df_x(\eta)).$$

Montrer qu'il y a équivalence entre

• f est un difféomorphisme local qui préserve les angles de vecteurs tangents (ou de courbes concourantes non singulières en leur point d'intersection) ;
• en tout point $x \in X$, df_x est, pour les métriques riemanniennes g, γ données, une similitude entre l'espace tangent à X en x et l'espace tangent à Y en $f(x)$;
• il existe une fonction $x \mapsto \rho(x) > 0$ de classe $C^{\ell-1}$ sur X telle que $f^*\gamma(x) = \rho(x)g(x)$ en tout point.

On dit alors que f est une application conforme de (X, g) dans (Y, γ) et que $\rho^{1/2}$ est le "facteur conforme" ou "facteur de dilatation" de f.

(c) Si $\Omega, \Omega' \subset \mathbb{C}$ sont des ouverts connexes, un difféomorphisme local $f : \Omega \to \Omega'$ est conforme relativement aux structures euclidiennes standards $(\Omega, |dz|^2)$, $(\Omega', |dz|^2)$ si et seulement si f est holomorphe ou anti-holomorphe avec $f' \neq 0$, en fonction de l'orientation.

(d) Montrer que la projection stéréographique de pôle Sud σ de la sphère de Riemann S est une application conforme de $S \smallsetminus \{\sigma\}$ dans le plan complexe (S étant munie de la restriction de la métrique euclidienne de $\mathbb{R}^3$, et $\mathbb{C}$ de $|dz|^2$). Déterminer le facteur conforme correspondant.

(e) Si U est un ouvert de $S \smallsetminus \{\sigma\}$, montrer que les cartes conformes $\tau : U \to \Omega' \subset \mathbb{C}$ bijectives et d'orientation positive sont obtenues en composant $\pi_\sigma : U \to \Omega := \pi_\sigma(U)$ avec une application holomorphe bijective quelconque $f : \Omega \to \Omega'$, i.e. en prenant $\tau = f \circ \pi_\sigma$.

2. *Projection de Mercator* (du nom du mathématicien et géographe Gerardus Mercator, 1512–1594) On considère sur la sphère de $\mathbb{R}^3$ de centre l'origine et de rayon R un point $p = (u, v, w)$ de longitude θ et de latitude φ, de sorte que

$$\begin{cases} u = R\cos\varphi\,\cos\theta \\ v = R\cos\varphi\,\sin\theta \\ w = R\sin\varphi. \end{cases}$$

Étant donné une fonction différentiable $h :]-\pi/2, \pi/2[\to \mathbb{R}$ strictement croissante et $a > 0$ un facteur d'échelle, on considère la représentation cartographique rectangulaire

$$\tau : S(0, R) \smallsetminus M_\pi \to \mathbb{R}^2,$$

bien définie en dehors des pôles et du méridien $M_\pi : \theta = \pm\pi$, de la forme

$$p \mapsto \tau(p) := (x, y) = (a\theta, ah(\varphi)), \qquad \theta \in \,]-\pi, \pi[, \quad \varphi \in \,]-\pi/2, \pi/2[.$$

(a) Calculer la métrique $\|\overrightarrow{dp}\|^2 = (du)^2 + (dv)^2 + (dw)^2$ en fonction de $d\theta$ et $d\varphi$, et calculer de même $\|\overrightarrow{d\tau(p)}\|^2 = (dx)^2 + (dy)^2$.

(b) En déduire que τ est conforme si et seulement si h satisfait une certaine équation différentielle du premier ordre que l'on déterminera. Trouver alors l'expression explicite de h pour que τ soit conforme, en supposant $h(0) = 0$. On fera plus loin l'identification $\mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}$, $(x, y) \mapsto z = x + iy$.

(c) L'application τ ainsi obtenue est ce qu'on appelle "la projection de Mercator": que se passe-t-il lorsque le point p s'approche des pôles ? Déterminer le facteur conforme et le facteur de dilatation des aires en fonction de φ (et des valeurs de R et du facteur d'échelle a).

(d) Un navire suit une route en "gardant un cap constant", c'est-à-dire que sa boussole indique un angle constant $\alpha \in \,]-\pi/2, \pi/2[$ par rapport aux "parallèles" $\varphi =$ constante (ou de façon équivalente, par rapport aux méridiens). En supposant qu'il part de l'équateur à la longitude θ_0, déterminer sa trajectoire sur la sphère.
Indication: la réponse est quasi-triviale pour la route représentée en projection de Mercator ...

(e) On suppose $R = 1$ pour simplifier, de sorte que $S = S(0, 1)$ est la sphère de Riemann. Déterminer l'application holomorphe f telle que $\tau = f \circ \pi_\sigma$.

(f) Exprimer l'élément d'aire de la sphère en fonction de $d\theta \wedge d\varphi$ et en déduire les choix possibles de la fonction h pour que la carte τ préserve les aires à un facteur constant près. Constater qu'aucun de ces choix ne permet d'obtenir que τ soit conforme.

3. Si $(X, \mathcal{O}_X)$ est une surface de Riemann munie d'une métrique hermitienne $h(z) = \eta(z)|dz|^2$, on définit la *courbure* (ou courbure de Gauss) de h en en point $p \in X$ comme étant

$$G_h(p) = -\frac{2}{\eta(z)} \frac{\partial^2 \log \eta}{\partial z \partial \overline{z}},$$

relativement à une coordonnée locale $z = \tau(p)$ quelconque (le facteur -2 étant ajouté de manière quelque peu conventionnelle pour retomber sur les valeurs et le signe usuels de la courbure ...)

(a) Montrer que $G_h(p)$ est bien indépendant de la carte locale τ choisie.
Indication. Si $w = \tilde{\tau}(p)$ est une autre coordonnées locale près d'un point p_0, poser $z = \psi(w)$ avec ψ holomorphe bijective d'un voisinage de $\tilde{\tau}(p_0)$ sur un voisinage de $\tau(p_0)$, et exprimer h et G_h en termes de la nouvelle coordonnée w.

(b) Calculer la courbure de la sphère de Riemann S et des courbes elliptiques avec leurs métriques usuelles, ainsi que celle du disque unité $\mathbb{D}$ muni de sa métrique de Poincaré d_P invariante par $\mathrm{Aut}(\mathbb{D})$.

(c) Si $f : X \to Y$ est une application holomorphe entre surfaces de Riemann qui est aussi une isométrie de (X, h) sur (Y, h') (c'est-à-dire que $f^*h' = h$), alors $G_h = G_{h'} \circ f$.

(d) Déduire de ce qui précède qu'il ne peut pas exister d'isométries locales entre la sphère de Riemann et le plan complexe (en d'autres termes, il n'existe pas de représentations cartographiques locales de la Terre préservant à la fois les angles et les aires à un facteur rigoureusement constant près).