Magistère M1 **Université Grenoble Alpes** **année 2018-2019**

Surfaces de Riemann (Jean-Pierre Demailly), feuille n°9, 11/04/2019

Soit V un espace vectoriel sur un corps $\mathbb{K}$ (commutatif). On rappelle qu'un espace affine $\mathcal{V}$ de direction V est un ensemble tel qu'on ait une opération du groupe additif $(V,+)$ sur $\mathcal{V}$, fidèle et transitive, $V\times\mathcal{V}\to\mathcal{V}$, $(\overrightarrow{u},p)\mapsto p'=\overrightarrow{u}+p$ (dans ce cas on note aussi $\overrightarrow{pp'}=\overrightarrow{u}$, et on omettra parfois les flèches sur les vecteurs). On rappelle également qu'étant donné un ensemble A, l'ensemble $\mathbb{K}^{(A)}$ des familles presque nulles $(x_p)_{p\in A}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel ayant pour base "canonique" $(\langle p\rangle)_{p\in A}$ où $\langle p\rangle$ est le vecteur ayant les composantes $x_p=1$ et $x_q=0$ pour $q\in A\smallsetminus\{p\}$. Le but des deux premiers exercices est de construire *l'espace vectoriel universel* $\widehat{\mathcal{V}}$ qui contient V comme sous-espace vectoriel de codimension 1, et $\mathcal{V}$ comme sous-espace affine de direction V.

1. *Première construction de l'espace vectoriel universel* (on suppose ici $V\neq\{0\}$)
On désigne par $\widehat{\mathcal{V}}$ l'ensemble des applications $f:\mathcal{V}\to V$ ayant la propriété suivante : pour tous $m,m'\in\mathcal{V}$, on a $f(m)-f(m')=\alpha\overrightarrow{mm'}$ pour un certain scalaire unique $\alpha\in\mathbb{K}$, qu'on appelle le "poids" de f, noté $\alpha=\varphi(f)$.

(a) Montrer que $\widehat{\mathcal{V}}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et que $\varphi:\widehat{\mathcal{V}}\to\mathbb{K}$ est une forme linéaire.

(b) Montrer que si (p_i,α_i) est un système de points pondérés, l'application $f(m)=\sum\alpha_i\overrightarrow{mp_i}$ définit un élément $f\in\widehat{\mathcal{V}}$ de poids $\varphi(f)=\sum\alpha_i$ (c'est ce qu'on appelle la fonction vectorielle de Leibniz associée au système de points pondérés).

(c) Si $f\in\widehat{\mathcal{V}}$ et $\alpha=\varphi(f)\neq 0$, il existe un unique point $g\in\mathcal{V}$, appelé barycentre de f, tel que $f(g)=0$, et on a alors $f(m)=\alpha\overrightarrow{mg}$.

(d) On a une injection canonique $V\hookrightarrow\widehat{\mathcal{V}}$, qui à un vecteur $u\in V$ associe la fonction constante $f_u(m)=u$, et $\mathrm{Ker}(\varphi)$ est l'ensemble de ces fonctions constantes f_u.

(e) On a une injection canonique $\mathcal{V}\hookrightarrow\widehat{\mathcal{V}}$ qui à un point $p\in\mathcal{V}$ associe la fonction $f_p:m\mapsto\overrightarrow{mp}$, vérifiant $\varphi(f_p)=1$.

(f) Si $a\in\mathcal{V}$ est une origine fixée, $\widehat{\mathcal{V}}$ est l'ensemble des fonctions de la forme $f=\alpha f_a+u$, $u\in V$, cette écriture étant unique, de sorte que $\widehat{\mathcal{V}}=\mathbb{K}f_a\oplus V$ et $\dim\widehat{\mathcal{V}}=\dim V+1$.

(g) En identifiant $\mathcal{V}$ à un sous-espace affine de $\widehat{\mathcal{V}}$, on a la formule $\sum\alpha_ip_i=(\sum\alpha_i)g$ pour tout système de points pondérés (p_i,α_i) de masse $\sum\alpha_i\neq 0$ et de barycentre g, tandis que $\sum\alpha_ip_i\in\mathrm{Ker}(\varphi)=V$ si $\sum\alpha_i=0$.

2. *Deuxième construction* (*équivalente*) *de l'espace vectoriel universel*
Avec les notations du préambule, les éléments de $\mathbb{K}^{(\mathcal{V})}$ sont en bijection avec les sommes formelles finies $\sum\alpha_i\langle p_i\rangle$, $\alpha_i\in\mathbb{K}$, $p_i\in\mathcal{V}$, qu'on peut voir aussi comme des systèmes de points pondérés. On introduit la forme linéaire "poids"

$$\psi:\mathbb{K}^{(\mathcal{V})}\to\mathbb{K},\qquad \sum\alpha_i\langle p_i\rangle\mapsto\sum\alpha_i.$$

On considère le sous-espace vectoriel S de $\mathbb{K}^{(\mathcal{V})}$ engendré par les éléments de $\mathbb{K}^{(\mathcal{V})}$ de la forme $\langle\lambda u+p\rangle-\langle p\rangle-\lambda\langle u+q\rangle+\lambda\langle q\rangle$, pour tous $\lambda\in\mathbb{K}$, $u\in V$ et $p,q\in\mathcal{V}$, et on pose $\widehat{\mathcal{V}}=\mathbb{K}^{(\mathcal{V})}/S$.

(a) Soit $p\in\mathcal{V}$ un point fixé. Montrer que l'application $j_V:V\to\mathbb{K}^{(\mathcal{V})}/S$, $u\mapsto\langle u+p\rangle-\langle p\rangle$ mod S ne dépend pas du choix du point p et que j_V est linéaire. Vérifier que $\widehat{\mathcal{V}}=\mathrm{Im}(j_V)+\mathbb{K}\langle p\rangle$ pour tout $p\in\mathcal{V}$ (en notant encore par abus $\langle p\rangle$ l'image de cet élément de $\mathbb{K}^{(\mathcal{V})}$ dans $\widehat{\mathcal{V}}$), de sorte que $\dim\widehat{\mathcal{V}}\leq\dim V+1$.

(b) Montrer que $S\subset\mathrm{Ker}(\psi)$ et en déduire par passage au quotient une forme linéaire poids $\varphi:\widehat{\mathcal{V}}\to\mathbb{K}$. Vérifier aussi que $\mathrm{Im}(j_V)\subset\mathrm{Ker}(\varphi)$ et en déduire que l'on a en fait $\widehat{\mathcal{V}}=\mathrm{Im}(j_V)\oplus\mathbb{K}\langle p\rangle$ pour tout $p\in\mathcal{V}$.

(c) Pour $m \in \mathcal{V}$ fixé, on considère l'application linéaire $\ell_m : \mathbb{K}^{(\mathcal{V})} \to V$, $\sum \alpha_i \langle p_i \rangle \mapsto \sum \alpha_i \overrightarrow{mp_i}$. Montrer que $S \subset \mathrm{Ker}(\ell_m)$ et que l'on a donc une application linéaire induite $\widehat{\ell}_m : \widehat{\mathcal{V}} \to V$ qui vérifie $\widehat{\ell}_m \circ j = \mathrm{Id}_V$. En déduire que j_V est injective et que l'on a $\dim \widehat{\mathcal{V}} = \dim V + 1$ (on utilisera cette injection j_V pour identifier V à un hyperplan vectoriel de $\widehat{\mathcal{V}}$). Quel est le noyau de ℓ_m ?

(d) Montrer que l'application $\mathcal{V} \to \widehat{\mathcal{V}}$, $p \mapsto \langle p \rangle$, induit un isomorphisme de l'espace affine $\mathcal{V}$ sur l'hyperplan affine $\{\varphi = 1\}$ de $\widehat{\mathcal{V}}$, dont la direction vectorielle est l'hyperplan $\mathrm{Ker}(\varphi) = j_V(V) \simeq V$.

(e) Montrer que l'application

$$L : \mathbb{K}^{(\mathcal{V})} \to \mathrm{Appl}(\mathcal{V}, V), \quad \sum \alpha_i \langle p_i \rangle \mapsto f, \quad f(m) = \sum \alpha_i \overrightarrow{mp_i}$$

induit un isomorphisme $\widehat{L} : \mathbb{K}^{(\mathcal{V})}/S \to \widehat{\mathcal{V}} \subset \mathrm{Appl}(\mathcal{V}, V)$ de la deuxième construction sur la première construction.

3. On considère dans $\mathbb{C}^2$ la courbe affine $\Gamma : y^m = P(x)$ où $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$, et où $P(x) = \sum_{j=0}^{d} a_j x^j$ est un polynôme de degré $d > m$ à coefficients dans $\mathbb{C}$, $a_d \neq 0$.

(a) Montrer que Γ est lisse dans $\mathbb{C}^2$ dès que P a toutes ses racines simples.

(b) On désigne par $\widetilde{P}(x,t) = t^d P(x/t)$ l'homogénéïsé de P. Déterminer l'équation de la courbe projective $\widetilde{\Gamma} \subset \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ associée à Γ, et montrer que $\widetilde{\Gamma}$ admet un seul "point à l'infini" que l'on déterminera.

(c) Montrer que ce point à l'infini est lisse si (et seulement si) $d = m + 1$.

(d) On considère l'application $\rho : \widetilde{\Gamma} \to \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ qui envoie le point à l'infini de $\widetilde{\Gamma}$ sur ∞, et $(x, y) \in \Gamma$ sur $x \in \mathbb{C}$ (ou, si on veut $[x : y : 1]$ sur $[x : 1]$). Montrer, si $\widetilde{\Gamma}$ est lisse (i.e. si P est à racines simples et $d = m + 1$), qu'il s'agit d'une application holomorphe entre surfaces de Riemann, et que cette application est un revêtement de degré m, ramifié au dessus des zéros de P et du point $\infty \in \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$.

(e) Le revêtement ρ est "galoisien de groupe $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$", c'est-à-dire qu'on a un groupe d'automorphismes holomorphes $\varphi_\zeta : (x, y) \mapsto (x, \zeta y)$ associés aux racines m-ièmes de l'unité, tels que $\rho \circ f_\zeta = \rho$.