Surfaces de Riemann (Jean-Pierre Demailly), feuille n°6, 07/03/2019

Rappels (?) d'algèbre linéaire et de calcul différentiel extérieur. Le produit extérieur $\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_p$ de formes linéaires $\alpha_i \in V^*$ sur un espace vectoriel V est par définition la p-forme multilinéaire alternée sur V telle que

$$\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_p(u_1, \ldots, u_p) = \det(\alpha_i(u_j)).$$

Ainsi, si $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ est une base de V et $\mathcal{B}^* = (e_1^*, \ldots, e_n^*)$ la base duale dans V^*, alors

$$e_1^* \wedge \ldots \wedge e_n^*(u_1, \ldots, u_n) = \det_{\mathcal{B}}(u_1, \ldots, u_n).$$

Cette quantité représente le volume (compté algébriquement, i.e. avec signe) du parélélépipède oblique $P_{u_1,\ldots,u_n} = \{\sum x_i u_i / x_i \in [0,1]\}$. Dans $\mathbb{R}^n$ avec sa base canonique $(e_1, \ldots, e_n)$ et $(x_1, \ldots, x_n)$ comme coordonnées, on a $dx_i = e_i^*$, et

$$e_1^* \wedge \ldots \wedge e_n^* = dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$$

est la forme volume associée à la mesure de Lebesgue. En dimension 2, avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ comme coordonnées, on a donc $dx \wedge dx = dy \wedge dy = 0$ et $dx \wedge dy = -dy \wedge dx$ est la forme volume standard (à savoir, l'aire dans ce cas !). Dans un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, on utilisera une notation avec des multi-indices : pour $I = (i_1, \ldots, i_p)$ de longueur $|I| = p$, on écrira les p-formes différentielles comme

$$\alpha(x) = {\sum_{|I|=p}}' \alpha_I(x)\, dx_I = \sum_{i_1 < \ldots < i_p} \alpha_{i_1 \ldots i_p}(x_1, \ldots, x_n)\, dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_p}$$

où $\sum'$ désigne la somme restreinte aux multi-indices *croissants*. Par définition, la *différentielle extérieure* de α est

$$(*) \qquad d\alpha := {\sum_{|I|=p}}' d\alpha_I \wedge dx_I = {\sum_{|I|=p}}' \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \alpha_I}{dx_j} dx_j \wedge dx_I.$$

On a la formule dite de Leibniz

$$d(\alpha \wedge \beta) = (d\alpha) \wedge \beta + (-1)^p \alpha \wedge (d\beta)$$

(pas très difficile à démontrer à partir de $(*)$).

1. *Formule de Green-Riemann* (connue ?) Soit $\alpha = P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ une 1-forme différentielle réelle ou complexe de classe C^1 sur un domaine compact $\overline{\Omega} \subset \mathbb{R}^2$ à bord $\partial\Omega$ de classe C^1 par morceaux. On note

$$d\alpha := dP \wedge dx + dQ \wedge dy = \Big(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\Big) dx \wedge dy$$

sa différentielle extérieure (une 2-forme sur $\overline{\Omega}$). Alors

$$\int_{\partial\Omega} \alpha = \iint_{\Omega} d\alpha \iff \int_{\partial\Omega} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \iint_{\Omega} \Big(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\Big) dx\, dy$$

où le bord $\partial\Omega$ est muni de son orientation “naturelle”.
Preuve possible : Par approximation polygonale du bord $\partial\Omega$ (et passage à la limite uniforme), on se ramène au cas où Ω est un domaine à bord polygonal. Par découpage de Ω, il suffit de traiter le cas d'un triangle, puis par rotation et découpage éventuel du triangle, au cas où Ω est un triangle rectangle dont les côtés de l'angle droit dont des segments OA et OB sur les axes Ox et Oy. Démontrer alors la formule en utilisant Fubini et les formules d'intégration élémentaires.

2. *Formule de Cauchy-Pompeiu* (c'est une généralisation, publiée par Pompeiu en 1905, de la formule classique énoncée par Cauchy en 1825). Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert d'adhérence compact dont le bord $\partial\Omega$ est de classe C^1 par morceaux, et $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{C}$ une fonction de classe C^1 sur l'adhérence de Ω. Alors

(a) $$\int_{\partial\Omega} f(z)\,dz = 2i \iint_\Omega \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}\,d\lambda \quad \text{et}$$

(b) $$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Omega} \frac{f(z)}{z-z_0}dz - \frac{1}{\pi}\iint_\Omega \frac{1}{z-z_0}\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}\,d\lambda$$

pour tout $z_0 \in \Omega$, où $d\lambda = dx \wedge dy$ est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{C}$ (avec $z = x + iy$).

Indication. Pour (a), appliquer la formule de Green-Riemann avec $\alpha = f(z)\,dz$, et calculer $d\alpha$. Pour (b), remplacer f par $g(z) = \frac{f(z)}{z-z_0}$ et Ω par $\Omega_\varepsilon = \Omega \smallsetminus \overline{D}(z_0, \varepsilon)$, et passer à la limite quand $\varepsilon \to 0$, en utilisant un changement de variable $z = z_0 + \varepsilon e^{i\theta}$ sur le bord orienté du disque $D(z_0, \varepsilon)$. On s'assurera que la fonction $z \mapsto \frac{1}{z-z_0}$ est bien intégrable pour la mesure de Lebesgue au voisinage de z_0.

3. *Surface de Riemann conjuguée d'une surface de Riemann*

(a) Soit $(X, \mathcal{O}_X)$ une surface de Riemann, et $\tau_j : U_j \to \Omega_j \subset \mathbb{C}$, $j \in I$, un atlas holomorphe. Montrer que l'espace annelé $(X, \overline{\mathcal{O}_X})$ obtenu en remplaçant les fonctions holomorphes par les fonctions anti-holomorphes est encore une surface de Riemann, pour laquelle un atlas (holomorphe !) est constitué du système de cartes $\overline{\tau}_j : U_j \to \overline{\Omega_j}$, où $\overline{\Omega_j}$ désigne ici l'ouvert de $\mathbb{C}$ symétrique de Ω_j par conjugaison (et non pas l'adhérence...). On note en général $\overline{X}$ cette surface de Riemann, de sorte que $\mathcal{O}_{\overline{X}} = \overline{\mathcal{O}_X}$. On dit que $\overline{X}$ est la surface de Riemann conjuguée de X.

(b) Donner une définition raisonnable de ce qu'est une application anti-holomorphe $\varphi : X \to Y$ entre surfaces de Riemann, et montrer que les applications anti-holomorphes renversent l'orientation (par définition, l'orientation d'une surface de Riemann est donnée par l'orientation usuelle de $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$ relativement aux cartes holomorphes).

(c) Montrer que la sphère de Riemann $S = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ est isomorphe à sa conjuguée $\overline{S}$, et déterminer quels sont les isomorphismes $S \to \overline{S}$.

(d) Soit $X = E_{\alpha,\beta}$ une courbe elliptique. Montrer que $\overline{X}$ est encore une courbe elliptique dont on précisera le réseau de périodes. On cherche maintenant à déterminer les courbes elliptiques X qui sont isomorphes à leurs conjuguées. Montrer que l'on a toujours $X \simeq E_{1,\tau}$ avec $|\tau| \geq 1$ et $-\frac{1}{2} \leq \operatorname{Re}\tau \leq \frac{1}{2}$, d'où $\operatorname{Im}\tau \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$, ce qu'on suppose désormais. Dans ce cas, la conjuguée de X est donnée par $E_{1,-\overline{\tau}}$ et X est isomorphe à sa conjuguée si et seulement si il existe une matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ telle que $-\overline{\tau} = \frac{a\tau+b}{c\tau+d}$, et que ceci implique $|c\tau + d| = 1$. En prenant les parties réelles et imaginaires, montrer que cette condition implique $|c| \leq 2/\sqrt{3}$, d'où $|c| \leq 1$, puis $|d| \leq 3/2$. Ceci laisse les possibilités $c = 0$, $d = \pm 1$, ou bien $c = \pm 1$, $d = 0$, ou bien $c = \pm 1$, $d = \pm 1$. En déduire qu'une condition nécessaire et suffisante pour que $X = E_{1,\tau}$ soit isomorphe à $\overline{X}$ est que $|\tau| = 1$ ou $\operatorname{Re}\tau = 0$ ou $\operatorname{Re}\tau = \pm\frac{1}{2}$. Vérifier qu'un domaine fondamental précis des courbes elliptiques dans le demi-plan supérieur (ne contenant pas de paires de courbes isomorphes) est le domaine

$$\Big\{|\tau| > 1,\ -\frac{1}{2} < \operatorname{Re}\tau \leq \frac{1}{2}\Big\} \cup \Big\{|\tau| = 1,\ 0 \leq \operatorname{Re}\tau \leq \frac{1}{2}\Big\}.$$

Schéma !