Magistère M1 **Université Grenoble Alpes** **année 2018-2019**

Surfaces de Riemann (Jean-Pierre Demailly), feuille n°3, 07/02/2019

1. *Revêtements*

On appelle revêtement de base Y et de fibre F (où Y, F sont des espaces topologiques, F étant supposé *discret*), un espace topologique X muni d'une application continue surjective $\rho : X \to Y$ possédant la propriété suivante, dite de *locale trivialité au dessus de* Y : *tout point* $y_0 \in Y$ *possède un voisinage ouvert* V *de sorte qu'il existe un homéomorphisme* $h_V : \rho^{-1}(V) \to V \times F$ *tel que* $\mathrm{pr}_1 \circ h_V = \rho_{|\rho^{-1}(V)}$, *où* pr_1 *désigne la première projection* $V \times F \to V$.

L'homéomorphisme h_V est appelé trivialisation de ρ au dessus de V.

(a) Montrer que $\mathrm{pr}_1 : X = Y \times F \to Y$ est un revêtement (et que X n'est jamais connexe si $\operatorname{card} F \geq 2$) : on l'appelle *revêtement trivial* de base Y et de fibre F.

(b) Si $j \in F$ est vu comme un indice, montrer que les $U_j = h_V^{-1}(V \times \{j\})$ sont des ouverts disjoints de X et que ρ induit un homéomorphisme de U_j sur V.

Définitions • On dit que U_j est le feuillet d'indice $j \in F$ au dessus de V.

• On dit que le revêtement est *fini* si F est fini, *connexe* si X est connexe (ce qui entraîne automatiquement que Y est connexe).

• On dit que ρ est un *revêtement holomorphe* si de plus X et Y sont des variétés holomorphes (nécessairement de même dimension), et ρ une application holomorphe de X dans Y. Le cas qui nous intéresse est celui des surfaces de Riemann ($\dim_{\mathbb{C}} X = \dim_{\mathbb{C}} Y = 1$).

(c) Si $\rho : X \to Y$ est un revêtement et h_V, h_W des trivialisations de ρ au dessus d'ouverts $V, W \subset Y$, montrer que $h_W \circ h_V^{-1}$ définit un homéomorphisme $(V \cap W) \times F \to (V \cap W) \times F$ de la forme $(y, j) \mapsto (y, \sigma_y(j))$ où σ_y est une permutation de F, qui en outre reste constante lorsque y parcourt les composantes connexes de $V \cap W$.

(d) Montrer que $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$ est un revêtement holomorphe de fibre $\mathbb{Z}$, et décrire explicitement les trivialisations h_V lorsqu'on considère l'ouvert $V = V_\alpha = \mathbb{C} \smallsetminus \mathbb{R}_+ e^{i\alpha}$ de $\mathbb{C}^*$, $\alpha \in \mathbb{R}$, et les feuillets associés $U_{\alpha,j} = \{z \in \mathbb{C} \,/\, \alpha + 2j\pi < \operatorname{Im} z < \alpha + 2(j+1)\pi\}$, $j \in \mathbb{Z}$. Déterminer dans ce cas $h_{V_\beta} \circ h_{V_\alpha}^{-1}$ au dessus de $V_\alpha \cap V_\beta$, d'abord lorsque $\beta \equiv \alpha \mod 2\pi$, puis lorsque $\beta \not\equiv \alpha \mod 2\pi$.

(e) Pour $m \in \mathbb{N}^*$, montrer de même que $\mu_m : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$, $z \mapsto z^m$, définit un revêtement holomorphe connexe à m feuillets, et expliciter les $h_{V_\beta} \circ h_{V_\alpha}^{-1}$ comme ci-dessus, en posant cette fois

$$U_{\alpha,j} = \{z \in \mathbb{C}^* \,/\, (\alpha + 2j\pi)/m < \arg z < (\alpha + 2(j+1)\pi)/m\}, \quad j = 0, 1, \ldots, m-1.$$

(f) Montrer que $z \mapsto z^m$ définit un morphisme de la sphère de Riemann $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ dans elle-même, et qu'il s'agit d'un revêtement ramifié ayant en général 0 et ∞ comme seuls points de ramification [= points critiques].

(g*) Décrire la situation lorsque $P(z) = az^2 + bz + c$ est un polynôme du second degré ($a \neq 0$), vu comme revêtement ramifié de la sphère de Riemann sur elle-même. Quelle est la condition sur a, b, c pour que ce revêtement ramifié soit équivalent à $\zeta \mapsto \zeta^2$ comme morphisme, resp. comme endomorphisme, modulo les automorphismes de la sphère ?

2. *Morphismes entre courbes elliptiques*

Ce problème est destiné à étudier les morphismes $\varphi : E_{a,b} \to E_{a',b'}$ entre deux courbes elliptiques, associées respectivement à des réseaux $\Lambda = \mathbb{Z}a + \mathbb{Z}b$ et $\Lambda' = \mathbb{Z}a' + \mathbb{Z}b'$.

(a) Montrer que les fonctions méromorphes $f \in \mathcal{M}(E_{a,b})$ peuvent s'identifier aux fonctions méromorphes F sur $\mathbb{C}$ qui sont périodiques de périodes Λ, c'est-à-dire telles que $F(z + pa + qb) = F(z)$ si $p, q \in \mathbb{Z}$. Montrer que $\mathcal{O}(E_{a,b})$ se réduit aux constantes.

(b) On note $\dot{z} \in E_{a,b}$ la classe d'équivalence de $z \in \mathbb{C}$ mod Λ. Montrer que pour tout entier $m \in \mathbb{Z}$ et tout $\dot{w} \in E_{a,b}$, l'application $\dot{z} \mapsto m\dot{z} + \dot{w}$ (induite par l'application affine $z \mapsto mz + w$) définit un endomorphisme $E_{a,b} \to E_{a,b}$, et que pour $m \neq 0$, il s'agit d'un revêtement non ramifié de degré m^2.

(c) Soit $\varphi : E_{a,b} \to E_{a',b'}$ un morphisme. Pour $z \in \mathbb{C}$, on pose $\Phi(z) = \varphi(\dot{z}) \in E_{a',b'}$. Lorsque $h \in \mathbb{C}$ est petit, montrer qu'il existe un unique représentant dans $\mathbb{C}$ de $\Phi(z + h) - \Phi(z)$ mod Λ' appartenant au parallélogramme $\{ua' + vb' \,/ u, v \in \,]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[\}$, et qu'on peut définir sans ambiguïté une dérivée holomorphe

$$\Phi'(z) = \lim_{h \to 0} \frac{\Phi(z + h) - \Phi(z)}{h} \in \mathbb{C}$$

en choisissant ce représentant au numérateur [on travaillera pour cela dans des cartes adaptées]. Déduire de (a) que Φ' est une constante, puis que φ est nécessairement induit par une application affine $z \mapsto \eta z + c$ où $\eta, c \in \mathbb{C}$ sont des constantes. Montrer en outre que η doit être tel que $\eta\Lambda \subset \Lambda'$, c'est-à-dire que $\eta a, \eta b \in \Lambda'$.

(d) Montrer qu'une condition nécessaire et suffisante pour l'existence d'un morphisme $\varphi : E_{a,b} \to E_{a',b'}$ non constant est que les rapports $\tau = \frac{b}{a}$, $\tau' = \frac{b'}{a'}$ soient reliés par une relation de la forme $\tau = \frac{\alpha\tau' + \beta}{\gamma\tau' + \delta}$ avec $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{Z}$, $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$. En déduire que pour $\tau' \in \mathbb{H}$ donné, il y a seulement une famille dénombrable de valeurs de $\tau \in \mathbb{H}$ pour lesquels ceci se produit – on montrera explicitement que si $\tau = it$ et $\tau' = it'$ avec $t, t' \in \mathbb{R}_+^*$, les morphismes φ non constants existent si et seulement si $t'/t \in \mathbb{Q}_+^*$ ou $tt' \in \mathbb{Q}_+^*$.

(e) Déterminer tous les endomorphismes de $E_{a,b}$ lorsque $\tau = \frac{b}{a} = i$, resp. lorsque $\tau = j = e^{2\pi i/3}$.

(f*) On suppose que $\tau = \frac{b}{a}$ est une racine non réelle d'une équation quadratique de la forme $p\tau^2 + q\tau + r = 0$, $p, q, r \in \mathbb{Z}$, $q^2 - 4pr < 0$. Montrer que $E_{a,b}$ possède alors un endomorphisme autre que ceux décrits en (b), et que c'est le seul cas où ceci peut se produire [on dit alors que la courbe elliptique $E_{a,b}$ possède une *multiplication complexe*, et on veut dire par là qu'il existe un endomorphisme induit par $z \mapsto \eta z$ avec $\eta \in \mathbb{C}$ non entier].