Surfaces de Riemann (Jean-Pierre Demailly), feuille n°2, 07/02/2018

1. *Projection de Mercator* (du nom du mathématicien et géographe Gerardus Mercator, 1512–1594)
On considère sur la sphère de $\mathbb{R}^3$ de centre l'origine et de rayon R un point $M = (u, v, w)$ de longitude θ et de latitude φ, de sorte que

$$\begin{cases} u = R\cos\varphi\,\cos\theta \\ v = R\cos\varphi\,\sin\theta \\ w = R\sin\varphi. \end{cases}$$

Étant donné une fonction différentiable $f :]-\pi/2, \pi/2[\to \mathbb{R}$ strictement croissante et $a > 0$ un facteur d'échelle quelconque, on considère la représentation cartographique rectangulaire $\rho_f : S(0,R) \smallsetminus \mu_\pi \to \mathbb{R}^2$, bien définie en dehors des pôles et du méridien $\mu_\pi : \theta = \pm\pi$, de la forme

$$M \mapsto \rho_f(M) := (x, y) = a(\theta, f(\varphi)), \qquad \theta \in]-\pi, \pi[, \quad \varphi \in]-\pi/2, \pi/2[.$$

(a) Calculer la métrique $\|\overrightarrow{dM}\|^2 = (du)^2 + (dv)^2 + (dw)^2$ en fonction de $d\theta$ et $d\varphi$, et calculer de même $\|\overrightarrow{d\rho_f(M)}\|^2 = (dx)^2 + (dy)^2$.

(b) En déduire que ρ_f est conforme si et seulement si f satisfait une certaine équation différentielle du premier ordre que l'on déterminera. Trouver alors l'expression explicite de f pour que ρ_f soit conforme, en supposant $f(0) = 0$. On fera plus loin l'identification $\mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}$, $(x, y) \mapsto z = x + iy$.

(c) L'application ρ_f ainsi obtenue est ce qu'on appelle "la projection de Mercator": que se passe-t-il lorsque le point M s'approche des pôles ? Déterminer le facteur conforme et le facteur de dilatation des aires en fonction de φ (et des valeurs de R et du facteur d'échelle a).

(d) Un navire suit une route en "gardant un cap constant", c'est-à-dire que sa boussole indique un angle constant $\alpha \in]-\pi/2, \pi/2[$ par rapport aux "parallèles" φ = constante (ou de façon équivalente, par rapport aux méridiens). En supposant qu'il part de l'équateur à la longitude θ_0, déterminer sa trajectoire sur la sphère.
Indication: la réponse est quasi-triviale pour la route représentée en projection de Mercator ...

(e) En supposant $R = 1$ pour simplifier, on considère l'application $\psi : \mathbb{C} \cup \{\infty\} \to S(0,1)$ inverse de la projection stéréographique de pôle Sud. Déterminer explicitement l'expression $(u, v, w) = \psi(\zeta)$ pour $\zeta \in \mathbb{C}$, puis l'expression de la composée $z = \rho_f \circ \psi(\zeta)$ lorsque $\zeta \in \mathbb{C} \smallsetminus \mathbb{R}_-$. Quelle propriété possède cette transformation $\rho_f \circ \psi$?

(f) Exprimer l'élément d'aire de la sphère en fonction de $d\theta \wedge d\varphi$ et en déduire les choix possibles de la fonction f pour que la projection ρ_f préserve les aires à un facteur constant près. Constater qu'aucun de ces choix ne permet d'obtenir que ρ_f soit conforme.

2. Soit Ω un disque du plan complexe (on pourra supposer $\Omega = D(0,1)$ pour simplifier). Le but de cet exercice est de montrer que pour pour toute fonction $v \in C^p(\Omega)$ avec $p \geq 1$, l'équation

$$(*) \qquad \frac{\partial u}{\partial \overline{z}} = v(z)$$

admet une solution $u \in C^p(\Omega)$.

(a) En supposant que $(*)$ ait une solution u_0, quel est l'ensemble des solutions u ?

(b) On suppose ici que v est à support compact dans $D(0,1)$, c'est-à-dire que v s'annule en dehors d'un disque fermé $\overline{D}(0,r)$, $r < 1$. Dans ce cas, on peut considérer v comme une fonction de classe C^p sur $\mathbb{C}$ tout entier en posant $v(z) = 0$ en dehors de $D(0,1)$. Montrer alors que si $d\lambda(\zeta)$ est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$, la fonction

$$u_0(z) = \iint_{\zeta\in\mathbb{C}} \frac{1}{\pi(z-\zeta)}\, v(\zeta)\, d\lambda(\zeta) = \iint_{\zeta\in\mathbb{C}} \frac{1}{\pi\zeta}\, v(z-\zeta)\, d\lambda(\zeta)$$

est une solution de $(*)$.
Indication: utiliser une dérivation sous le signe $\int$ et la formule de Cauchy-Pompeiu.

(c) Montrer qu'il existe une fonction $\theta : \mathbb{R} \to [0,1]$ croissante et de classe C^∞, telle que $\theta(x) = 0$ pour $x \geq 0$ et $\theta(x) = 1$ pour $x \geq 1$ (on pourra considérer $\theta(x) = \varphi(x)/(\varphi(x) + \varphi(1-x))$ où φ est telle que $\varphi(x) = e^{-1/x}$ pour $x > 0$ et $\varphi(x) = 0$ pour $x \leq 0$). Pour $k \in \mathbb{N}$, on pose

$$v_k(z) = v(z)\,\theta(2^k(1 - |z|^2) - 1).$$

Que peut-on dire du support de v_k et de la limite $\lim_{k\to+\infty} v_k$? Montrer qu'il existe une solution u_k de classe C^p de l'équation

$$\frac{\partial u_k}{\partial \overline{z}} = v_k(z)$$

dans $\Omega = D(0,1)$, et que $u_{k+1} - u_k$ est holomorphe dans un disque $D(0, r_k)$ pour une suite strictement croissante de rayons $r_k < 1$ telle que $\lim_{k\to+\infty} r_k = 1$.

(d) On choisit une suite $r'_k < r_k$ telle que $\lim r'_k = 1$ (le choix $r'_k = r_k^2$ convient par exemple). Montrer par récurrence sur k et par troncature de la série entière représentant $u_{k+1} - u_k$ qu'il existe une suite de polynômes $P_k \in \mathbb{C}[z]$ tels que $P_0 = 0$ et

$$\big|(u_{k+1} - P_{k+1}) - (u_k - P_k)\big| \le 2^{-k} \quad \text{sur } D(0, r'_k).$$

(e) Montrer que $\tilde{u} = \lim_{k\to+\infty}(u_k - P_k)$ définit alors une fonction continue sur $D(0,1)$ et que $\tilde{u} - u_k$ est holomorphe sur $D(0, r_k)$. En déduire que $\tilde{u}$ est une solution de $(*)$.

(f) Montrer que l'équation $\Delta u = v$ admet également des solutions de classe C^p, et les déterminer toutes en fonction de l'une d'entre elles.

3. (attendre le cours du jeudi 15 février pour (b) et (c), à moins que vous ne puissiez deviner intuitivement le sens des questions, assez transparent ...)

(a) En utilisant les inégalités de Cauchy, montrer qu'une fonction holomorphe $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ telle que f est à croissance polynomiale à l'infini, c'est-à-dire $|f(z)| \le C(1 + |z|)^A$ avec $C, A \ge 0$, est nécessairement un polynôme de degré $d \le A$.

(b) En utilisant l'atlas "standard" de la sphère de Riemann $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$, montrer qu'un champ de vecteurs holomorphe $f(z)\frac{\partial}{\partial z}$ sur $\mathbb{C}$ se prolonge en un champ de vecteurs holomorphe à l'infini si et seulement si $z \mapsto z^2 f(1/z)$ se prolonge holomorphiquement en zéro. Montrer que ces champs sont obtenus précisément lorsque $f(z) = a + bz + cz^2$ est un polynôme de degré 2 (on examinera ce que peut être la croissance de f à l'infini).

(c) Définir un atlas de la sphère de Riemann en utilisant deux projections de Mercator définies sur les complémentaires des demi grands cercles fermés situés dans les demi-plans orthogonaux Ouw $(u \le 0)$ et Ouv $(u \ge 0)$. Expliciter dans ce cas les applications de changement de carte.