Surfaces de Riemann (Jean-Pierre Demailly), feuille n°1, 27/01/2018

1. *Formule de Green-Riemann* (rappel ?) Soit $\alpha = P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ une 1-forme différentielle réelle ou complexe de classe C^1 sur un domaine compact $\overline{\Omega} \subset \mathbb{R}^2$ à bord $\partial\Omega$ de classe C^1 par morceaux. On note

$$d\alpha := dP \wedge dx + dQ \wedge dy = \Big(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\Big) dx \wedge dy$$

sa différentielle extérieure (une 2-forme sur $\overline{\Omega}$). Alors

$$\int_{\partial\Omega} \alpha = \iint_\Omega d\alpha \quad \Longleftrightarrow \quad \int_{\partial\Omega} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \iint_\Omega \Big(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\Big) dx\, dy$$

où le bord $\partial\Omega$ est muni de son orientation naturelle.
Indication. On rappelle que le produit extérieur $\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_p$ de formes linéaires α_i sur un espace vectoriel V est la p-forme multilinéaire alternée sur V telle que

$$\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_p(u_1, \ldots, u_p) = \det(\alpha_i(u_j)),$$

en dimension 2 on a donc $dx \wedge dx = dy \wedge dy = 0$ et $dy \wedge dx = -dx \wedge dy$. Par approximation polygonale du bord $\partial\Omega$ (et passage à la limite uniforme), on se ramène au cas où Ω est un domaine à bord polygonal. Par découpage de Ω, il suffit de traiter le cas d'un triangle, puis par rotation et découpage éventuel du triangle, au cas où Ω est un triangle rectangle dont les côtés de l'angle droit dont des segments OA et OB sur les axes Ox et Oy. Démontrer alors la formule en utilisant Fubini et les formules d'intégration élémentaires.

2. *Formule de Cauchy-Pompeiu.* Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert d'adhérence compact dont le bord $\partial\Omega$ est de classe C^1 par morceaux, et $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{C}$ une fonction de classe C^1. Alors

(a) $$\int_{\partial\Omega} f(z)\, dz = 2i \iint_\Omega \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}\, d\lambda \quad \text{et}$$

(b) $$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Omega} \frac{f(z)}{z - z_0} dz - \frac{1}{\pi} \iint_\Omega \frac{1}{z - z_0} \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}\, d\lambda$$

pour tout $z_0 \in \Omega$, où $d\lambda = dx \wedge dy$ est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{C}$ (avec $z = x + iy$).

Indication. Pour (a), appliquer la formule de Green-Riemann avec $\alpha = f(z)\, dz$, et calculer $d\alpha$. Pour (b), remplacer f par $g(z) = \frac{f(z)}{z - z_0}$ et Ω par $\Omega_\varepsilon = \Omega \smallsetminus \overline{D}(z_0, \varepsilon)$, et passer à la limite quand $\varepsilon \to 0$, en utilisant un changement de variable $z = z_0 + \varepsilon e^{i\theta}$ sur le bord orienté du disque $D(z_0, \varepsilon)$. On s'assurera que la fonction $z \mapsto \frac{1}{z - z_0}$ est bien intégrable pour la mesure de Lebesgue au voisinage de z_0.

3. *Caractérisation des fonctions harmoniques.* L'objectif de cet exercice est de montrer qu'une fonction continue $u : \Omega \to \mathbb{R}$ est harmonique si et seulement si elle vérifie l'égalité de moyenne sur les cercles bordant les disques fermés $\overline{D}(z_0, r)$ contenus dans Ω.

(a) Montrer que l'harmonicité de u implique l'égalité de moyenne (en se ramenant au cas holomorphe et en utilisant la décomposition en série entière).

(b) Inversement, montrer que la propriété de moyenne implique l'harmonicité si u est de classe C^2.
Indication. Se placer sur un cercle de centre $(0,0)$, après translation, et faire un développement limité de $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(re^{i\theta}) d\theta$ quand $r \to 0$, à partir d'un développement limité de $u(x,y)$ à l'ordre 2 en 0. On comparera la valeur moyenne à $u(0)$ lorsque $\Delta u(0) > 0$ (resp. $\Delta u(0) < 0$).

(c) Montrer que la propriété de valeur moyenne implique en fait que u est de classe C^∞.
Indication. Montrer que u coïncide avec sa convolution $u \star \rho_\varepsilon$ sur $\Omega_\varepsilon = \{z \in \Omega\,,\ d(z, \partial\Omega) > \varepsilon\}$ où ρ_ε est un noyau régularisant C^∞ invariant par rotation, à support dans le disque $D(0, \varepsilon)$, et utiliser les propriétés de dérivation des convolutions.

4. (a) Soient (E, q) et (F, q') des espaces vectoriels euclidiens de même dimension (avec q, q' des formes quadratiques définies positives), et $\ell : E \to F$ une application linéaire bijective. Montrer que ℓ préserve les angles non orientés de couples de vecteurs si et seulement si ℓ est une similitude (c'est-à-dire la composée d'une isométrie et d'une homothétie).
Indication. Prendre une base orthonormée (e_i) de (V, q) et observer que $(\ell(e_i))$ doit être une base orthogonale. Considérer alors les angles des couples $(e_i, e_i + e_j)$ et ceux de leurs images.

(b) Soit $f : \Omega \to \Omega'$ un C^1-difféomorphisme entre deux ouverts $\Omega, \Omega' \subset \mathbb{R}^n$, où $\mathbb{R}^n$ est muni de sa structure euclidienne canonique $q = \sum dx_i^2$. Montrer que f est conforme (i.e. préserve les angles de courbes) si et seulement si $df(x)$ est en tout point une similitude, c'est-à-dire encore si $f^*q := \sum df_i^2$ vérifie $f^*q = \lambda(x)\, q$ pour une certaine fonction $\lambda(x) > 0$ (appelée facteur conforme au point x).